

Doc. Ing. Jiří Muk, CSc.

STATIKA II

STK PRAHA



2660206619

2001
Vydavatelství ČVUT

OBSAH

8. PROSTÉ PŘÍPADY PRUŽNOSTI	5
8.1. Základní pojmy a vztahy v technické pružnosti	6
8.2. Prostý tah a tlak	14
8.3. Prostý smyk	24
8.4. Prostý ohyb	28
8.5. Ohybová čára za prostého ohybu	43
8.6. Šikmý ohyb	54
8.7. Tangenciální napětí za ohybu	59
8.8. Hlavní normálová napětí	65
9. VZPĚRNÁ PEVNOST	75
9.1. Stabilita pružných soustav	75
9.2. Eulerovo řešení vzpěrné pevnosti	76
9.3. Součinitel vzpěrnosti	80
10. OPĚRNÉ ZDI	87
10.1. Tlak zeminy	87
10.2. Kombinace tlaku s ohybem	89
10.3. Typy a konstrukce opěrných zdí	99

11. STATICKY NEURČITÉ PRUTOVÉ ROVINNÉ KONSTRUKCE	107
11.1. Metoda rozdělování momentů (Crossova) pro konstrukce s neposuvnými styčníky	107
11.2. Spojitý nosník	114
11.3. Plastické rezervy spojitých nosníků	119
11.4. Rámové konstrukce	125
11.5. Rámové výseky pro svislé zatížení	137
11.6. Rámové výseky pro zatížení větrem	148
12. STĚNOVÉ KONSTRUKCE	153
12.1. Nosné stěny	153
12.2. Vodorovné ztužení výškových budov	155
13. STROPNÍ KONSTRUKCE	161
13.1. Nosné desky	161
13.2. Roštové konstrukce	167
14. KONSTRUKCE ZAKŘIVENÉ	171
14.1. Oblouky	171
14.2. Klenby	175
14.3. Skořepiny	182
Literatura ke studiu	197

8. PROSTÉ PŘÍPADY PRUŽNOSTI.

Vlivem vnějších sil (zatěžováním), změnou teploty, smršťováním apod. změní těleso zpravidla svůj tvar, vzájemnou polohu svých částí, přetvoří se (deformuje). Úkolem nauky o pružnosti a pevnosti je vyšetřovat vnitřní síly a deformace přetvořeného tělesa a zkoumat stabilitu přetvořených konstrukcí. Ve stavební praxi řešíme tyto úkoly:

- a) Návrh neboli dimenzování konstrukce, to je určování rozměrů stavební konstrukce nebo jejího dílu tak, aby konstrukce bezpečně snesla předepsané zatížení (vnější síly) nebo vůbec účinky, které přetvoření působí, tj. aby vnitřní síly nevzrostly nad dovolenou mez. Při tom přihlížíme nejen k bezpečnosti, ale i k hospodárnosti konstrukce. Dbáme tedy, aby rozměry konstrukce sice dostačovaly, ale nebyly vzhledem k působícím silám nadbytečné.
- b) Posouzení konstrukce záleží ve výpočtu vnitřních sil pro dané zatížení při známých rozměrech a v jejich porovnání s nejvýše přípustnými hodnotami (při destrukci konstrukce v porovnání s mezí pevnosti, po případě jinou charakteristickou hodnotou materiálu, rozhodnou pro životnost díla).
- c) Výpočet únosnosti konstrukce je stanovení nejvýše přípustné velikosti vnějších sil při daných rozměrech konstrukce, nemají-li vnitřní síly překročit přípustnou mez.
- d) Výpočet přetvoření konstrukce patří též k praktickým úkolům, protože i přetvoření nesmí být z různých důvodů větší než povolené.
- e) Posouzení stability - často nerozhoduje o použitelnosti konstrukce v praxi ani velikost vnitřních sil, ani deformace, ale stabilita soustavy. Tak jako vylučujeme v praxi labilní podepření těles, při němž nepatrnou změnou polohy těžiště je porušena statická rovnováha tělesa, žádáme při řešení problémů stability, aby vnější síly nepřekročily kritickou mez, při jejímž překročení deformace značně vzrůstají až do porušení konstrukce.

Odpor těles proti porušení jejich celistvosti působením vnějších sil se nazývá pevnost. Pevnost záleží především na látce tělesa. Mez pevnosti je nejvyšší hodnota vnitřních sil, kterou materiál snese bez porušení celistvosti tělesa.

Přetvoření, které pomine po zániku vnějších sil, jež je způsobily, označujeme za přetvoření pružné neboli elastické. Pružnost hmoty je tedy schopnost těles vracet se do původního tvaru, pomine-li vnější zatížení, které přetvoření způsobilo. Vedle přetvoření pružného, které převládá jen tak dlouho, dokud vnitřní síly nepřekročí určitou mez, vzniká i přetvoření plastické, které je trvalé - nezanikne, ani když vnější síly přestanou působit. Přestoupí-li vnitřní síly určitou mez, zvanou mez pružnosti, převládá u materiálu trvalé přetvoření. Nejde tedy v nauce o pružnosti a pevnosti vždy o přetvoření pružné, avšak název nauka o pružnosti a pevnosti se již vžil a užívá se ho, ačkoliv při tom myslíme na teorii pružnosti a plasticity.

Teoretická nauka o pružnosti a pevnosti dospívá často k matematicky obtížným operacím a k výsledkům nesnadno v praxi aplikovatelným, často i zbytečně přesným a podle zavedených předpokladů jen v omezené míře platným. Proto se pro potřeby praxe často používá technická nauka o pružnosti a pevnosti, která dochází na podkladě přijatelných hypotéz k závěrům méně přesným, ale s postačující přesností aplikovatelným. Potřebné hypotézy volíme tak, aby zhruba souhlasily se skutečností a aby na jejich základě bylo možno problém matematicky snadno zvládnout.

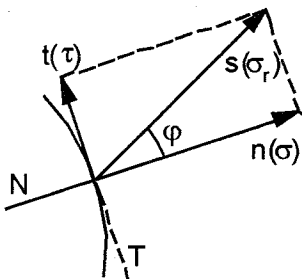
S omezením, jež ve zvláštních případech připomeneme, platí v teorii pružnosti, pokud jde o malá přetvoření, princip superpozice, podle něhož nezáleží na pořadí, v jakém různé účinky působí nebo v jakém přetvoření vznikají, a podle něhož je výsledný účinek součtem účinků jednotlivých sil. Dále přijímáme platnost Saint-Venantova principu, podle něhož při zatížení malé části tělesa rovnováhou soustavou sil jsou v bodech tělesa dostatečně vzdálených od zatížené oblasti vnitřní síly i deformace zanedbatelně malé.

U stavebních konstrukcí bývají přetvoření zpravidla nepatrná. Malá deformovatelnost stavebních látek nás opravňuje k předpokladu, že lze čtverec poměrných deformací jako nepatrný proti jedničce zanedbat. Nepatrné přetvoření umožňuje také řešit rovnováhu sil působících na prvek přetvořeného tělesa, jako by působily na element nepřetvořený, neboť posuvy působišť (a tím změny ramen) vnějších sil i pootočení jejich paprsků jsou malé. Závislost mezi zatížením a deformacemi předpokládáme až do jisté meze jako lineární.

Případy, kdy je třeba uvažovat i součiny poměrných deformací, se zabývá tzv. teorie konečných deformací. Teorie pružnosti druhého řádu uvažuje rovnováhu sil na přetvořeném prvku. Nelineární teorie pružnosti předpokládá jinou závislost vnitřních sil a deformací než přímou úměru.

8.1. Základní pojmy a vztahy v technické pružnosti.

Napětí definujeme jako velikost vnitřní síly na jednotku plochy. Napětí jsou konečné podíly elementů vnitřních sil a ploch. Podle vnitřních sil zavádíme napětí celkové $\sigma_r = ds/dA$, napětí normálové $\sigma = dn/dA$ ve směru normály k ploše a napětí tangenciální $\tau = dt/dA$ ve směru tečném k ploše (obr. 8.1). Můžeme-li pokládat sílu s a její složky n , t za rovnoměrně rozložené po ploše velikosti A , určujeme napětí podílem vnitřní síly a plochy



Obr. 8.1. Napětí celkové, normálové a smykové.

$$\sigma_r = \frac{s}{A} \quad \sigma = \frac{n}{A} \quad \tau = \frac{t}{A} \quad (8.1)$$

Napětí má podle toho rozměr síla lomeno plochou, tedy N/m^2 . Tato jednotka má v mezinárodní soustavě jednotek SI označení „pascal“. Ve vztahu k základním jednotkám soustavy tedy

platí převodní vztah

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ Nm}^{-2} = 1 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$$

Protože pascal je jednotka velmi malá, obvykle se ve stavební praxi používá jejích násobků. Jsou povoleny násobky kPa (kilopascal) a MPa (megapascal), pro něž platí převodní vztahy

$$1 \text{ MPa} = 10^3 \text{ kPa} = 10^6 \text{ Pa}$$

Starší jednotka pro napětí byla kp/cm^2 , která je s jednotkami soustavy SI svázána převodním vztahem

$$1 \text{ kpcm}^{-2} = 98,1 \text{ kPa} = 0,0981 \text{ MPa} \approx 0,1 \text{ MPa}$$

Označíme-li úhel mezi paprskem celkového napětí a normálou k ploše jako φ , bude platit z obrázku 8.1

$$\sigma = \sigma_r \cdot \cos \varphi \quad \tau = \sigma_r \cdot \sin \varphi \quad \sigma_r = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \quad (8.2)$$

Působením normálových sil se mění rozměry tělesa. Je-li jeho rozměr ve směru síly před deformací roven l a po deformaci se změní na l' , je rozdíl

$$\Delta l = l' - l \quad (8.3)$$

mezi délkou přetvořeného a nepřetvořeného tělesa skutečným (absolutním) protažením tělesa ve směru l . Má rozměr délky. Je-li protažení záporné, nazýváme je zkrácením. Rovnovážná soustava normálových sil působících na těleso je protahuje směrem působících sil a v příčném směru je stlačuje (obr. 8.2). Tažená tyč se tedy ve směru tahu prodlužuje, v příčném směru se zužuje, tlačena se naopak ve směru působících sil zkracuje, v příčných směrech prodlužuje.

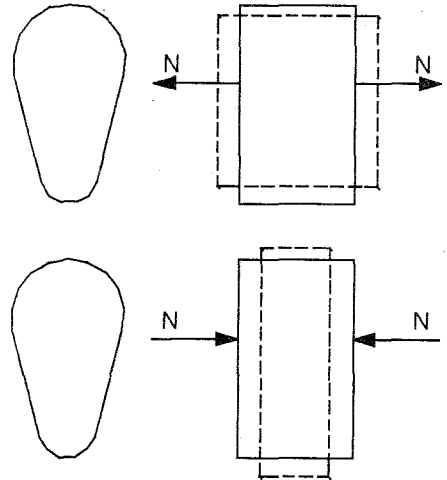
Ze spojitosti pružného prostředí vyplývá, že se podobně deformuje účinkem elementárním normálových sil každý prvek tělesa, a skutečným protažením prvku původní délky ds a délky po přetvoření ds' označujeme veličinu

$$\Delta ds = ds' - ds \quad (8.4)$$

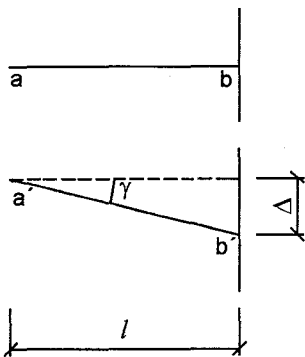
Častěji než se skutečným protažením tělesa nebo elementu počítáme s poměrným (relativním) protažením ε , které je poměrem skutečného protažení a původní délky, tedy

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta ds}{ds} \quad (8.5)$$

Má znaménko shodné se skutečným protažením a jako poměr dvou délek je to veličina bezrozměrná.



Obr. 8.2. Protažení tělesa.



Obr. 8.3. Relativní zkosení.

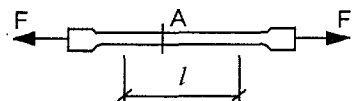
Tangenciální (smykové) napětí způsobuje posunutí bodů v rovině průřezu. Tím se mění původně pravé úhly v kosé (obr. 8.3). Označíme-li jako Δ rozdíl posunutí dvou koncových bodů úsečka ab kolmé před deformací k průřezu a délku úsečky ab jako l , potom poměr rozdílu posunutí k délce kolmého vlákna

$$\gamma = \frac{\Delta}{l} = \frac{d\Delta}{ds} \quad (8.6)$$

je poměrné zkosení. Je to obdobně jako relativní protažení hodnota bezrozměrná. Znamená tangentu úhlu, o němž se změní

pravý úhel vlákna kolmého k průřezu. Protože se jedná o velmi malý úhel, je možno velikost tohoto úhlu zaměnit s jeho tangentou.

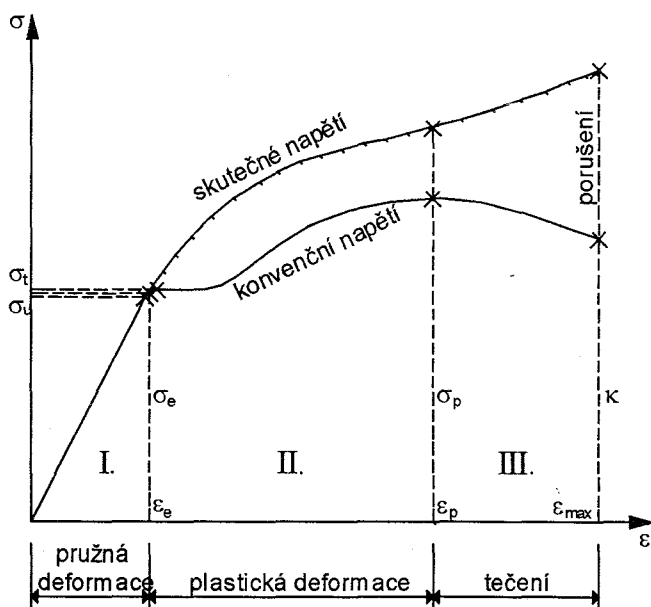
Ocelovou tyč poměrně značné délky l a malé průřezové plochy A upněme do čelistí trhacího stroje a zvyšujeme tah F , jímž působí obě čelisti na tyč (obr. 8.4). Můžeme předpokládat, že napětí je po průřezu rozděleno rovnoměrně a má hodnotu



Obr. 8.4. Tahová zkouška.

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Měříme-li délku tyče mezi dvěma značkami vzdálenými před zkouškou o délku l , pozorujeme, že tato délka se vzrůstem síly F roste. S rostoucím napětím vzrůstá proto také poměrné protažení. Vyznačíme-li závislost normálového napětí σ na poměrném protažení ε v pravouhlych souřadnicích např. pro ocel (obr. 8.5), dostaneme tzv. pracovní diagram. Tvar pracovního diagramu závisí na materiálu i jeho zpracování. Na pracovním diagramu oceli pozorujeme, že až do určité hodnoty napětí se vzrůstající deformací roste, avšak na konci



Obr. 8.5. Pracovní diagram pro ocel.

nápadně klesá. Tuto nesrovnalost si vysvětlujeme tím, že plně vytažená čára na obrázku 8.5 je sice vynesena podle skutečně působící tahové síly F , avšak nepřihlíží ke změně průřezové plochy. Takovému napětí vypočtenému z původní plochy průřezu říkáme konvenční nebo imenovité napětí. Ve skutečnosti se materiál v příčném směru zužuje, průřez jeví kontrakci. Při malé napínací síle je toto zúžení poměrně malé a nemusí se k němu přihlížet. Při určitém napětí tyče se však průřez začne po celé délce tyče úžít

zřetelně, takže musíme pro výpočet skutečného napětí dosazovat do vzorce plochu menší, než má nepřetvořený průřez, a napětí je pak ve skutečnosti větší, jak vyznačuje na obrázku 8.5 čárkovaná křivka. Poměr napínací síly a skutečné plochy průřezu nazýváme skutečné napětí.

Sledujme v pracovním diagramu závislost konvenčního napětí na poměrném protažení. Poměr přírůstku napětí a přírůstku deformace (derivace napětí podle relativního protažení)

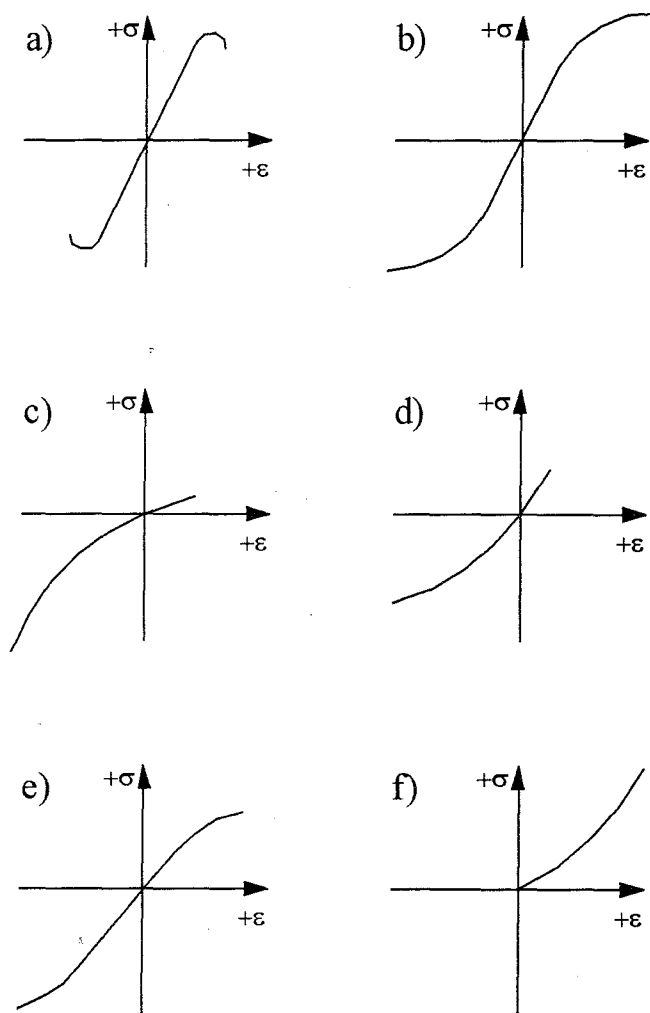
$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (8.7)$$

se nazývá modul pružnosti, přesněji modul pružnosti v tahu nebo tlaku. Bývá též nazýván Youngův modul pružnosti. U oceli a některých jiných látek roste protažení v oboru I (obr. 8.5) lineárně, přímo úměrně k napětí, derivace napětí podle protažení je tedy v tomto oboru konstantní a rovná se podílu napětí a protažení

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (8.7a)$$

Modul pružnosti má stejný rozměr jako napětí a u stavebních hmot má značnou hodnotu, např. pro ocel je $E=2,1 \cdot 10^5$ MPa. Je to myšlené napětí (které ve skutečnosti materiál většinou nesnese), při němž by se původní délka tyče protáhla na dvojnásobek. Pracovní diagramy různých látek se od sebe ovšem značně liší. Pracovní diagramy pro některé látky jsou uvedeny na obrázku 8.6. Lze na nich též poznat, že se některé látky chovají odlišně v tahu a v tlaku. Např. kůže je ohebná a tedy nevzdoruje tlaku, naopak beton je vůči tlaku značně odolný.

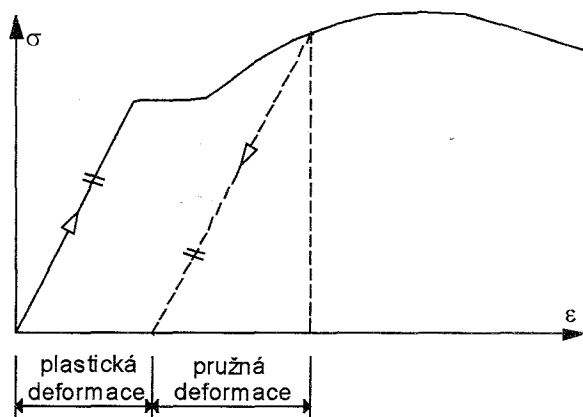
Prohlédněme si nyní podrobně pracovní diagram oceli (obr. 8.5). Lineární závislost napětí na deformaci platí tak dlouho, pokud napětí nepřestoupí určitou hodnotu σ_u , kterou nazýváme mez úměrnosti.



Obr. 8.5. Pracovní diagramy pro:
a) litina b) bronz
c) mramor d) beton
e) dřevo f) kůže

Zmenšujeme-li spojitě zatížení působící na některý materiál, klesá deformace v závislosti na napětí podle téhož pracovního diagramu jako při vzrůstajícím zatížení a při úplném odlehčení se tyč zkrátí na původní délku. Říkáme, že materiál je dokonale pružný. Zachovává však úplnou pružnost jen potud, pokud napětí nepřestoupí hodnotu σ_e , které říkáme mez pružnosti (elasticity). Obor zatížení až po tuto mez se nazývá pružný. Mez pružnosti se prakticky mnoho neliší od meze úměrnosti, takže napětí a deformace v pružném oboru jsou plně charakterizovány modulem pružnosti a mezí pružnosti.

Vzroste-li napětí, a tím i příslušná deformace, nad mez pružnosti, nastává plastické přetváření, obor plasticity. Ten je charakterizován daleko rychlejším vzrůstem deformace při rostoucím konvenčním napětí než v oboru pružném. Závislost relativního protažení na napětí neprobíhá v oboru II na obrázku 8.5 podle přímky a modul pružnosti v tomto oboru není stálý. Můžeme zde mluvit pouze o okamžitém modulu pružnosti, který je roven derivaci na-

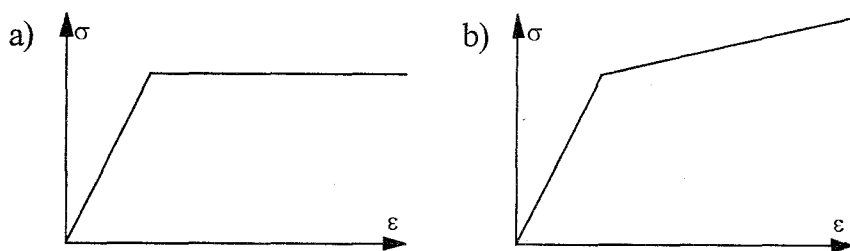


Obr. 8.7. Odlehčování v plastickém oboru.

pětí podle relativního protažení. Deformace je v tomto oboru převážně plastická, proto se při odlehčení nevrací po čáře, která znázorňovala její růst, ale klesá zhruba podle rovnoběžky s přímkou platnou v pružném oboru (obr. 8.7).

U látek tvárných (plastických) je plastický obor charakterizován mezí kluzu (průtažnosti) σ_t , tj. napětím, za něhož deformace začne vzrůstat velmi rychle,

takže deformační čára probíhá v pracovním diagramu téměř rovnoběžně s osou deformací a materiál se stále protahuje při zhruba konstantním napětí $\sigma = \sigma_t$. Ve výpočtech za stavu plasticity idealizujeme průběh napětí za mezí kluzu podle Prandtla rovnoběžkou s osou ε nebo



Obr. 8.8. Plasticita a) bez zpevnění, b) se zpevněním.

mírně stoupající přímkou (obr. 8.8).

Ve skutečnosti je při dosažení napětí na mezi kluzu napětí konstantní jen do určité relativní deforma-

mace a po jejím překročení deformační čára dále stoupá, materiál se zpevňuje. Maximální hodnota, kterou může jmenovité napětí dosáhnout, se nazývá mez pevnosti σ_p . Po překročení meze pevnosti materiál teče při současně značném zužování průřezu, až dojde k porušení tyče - tyč se přetrhne.

Pracovní diagram popsáný při zkoušce ocelové tyče na tah je charakteristický pro materiály tvárné (plastické). Křehké látky se přetvářejí jinak, zejména se u nich objevuje náhlé porušení soudržnosti materiálu bez znatelné kontrakce průřezu. Plastické materiály jsou pro konstrukci daleko výhodnější. Porušují se totiž až po značně větší deformaci, kterou nás předem upozorní na nebezpečí porušení, kdežto křehké materiály povolují náhle při poměrně malé deformaci. Průběh namáhání též umožňuje u látek tvárných plastické vyrovnání místních namáhání, rovněž lépe odolávají dynamickým účinkům. Plastické materiály se hodí na konstrukce namáhané tahem i tlakem, kdežto křehké materiály vzdorují tahu daleko hůře než tlaku. Křehkost a tvárnost nejsou ovšem trvalými vlastnostmi materiálů, ale závisí i na různých okolnostech, zejména na zpracování (např. kalení), namáhání a teplotě. Může proto být tentýž materiál za různých okolností ve stavu více méně křehkém nebo plastickém. Z běžných stavebních látek je křehká litina, kámen a beton, houževnatá je ocel. Za nízkých teplot se materiál stává obvykle křehčím.

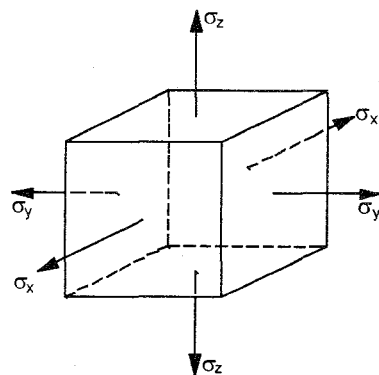
Výpočty stavebních konstrukcí zjednodušíme předpokladem, že ve stavební praxi jde o látky stejnorodé čili homogenní, to je stejné struktury a vlastností ve všech bodech tělesa, a látky izotropní, to je takové, které mají ve všech směrech stejné materiálové vlastnosti. Ve skutečnosti se stavební hmoty řídí těmito předpoklady jen přibližně. Zpracování oceli válcováním, jednosměrný růst vláken dřeva apod. dávají stavebnímu materiálu v různých směrech různé vlastnosti, avšak pro výpočty podle nauky o pružnosti předpoklady homogenity a izotropie materiálu prakticky vyhovují. K nesourodosti (heterogenitě) a anizotropii materiálu přihlížíme jen výjimečně. Na příklad železobetonová průřezy řešíme jako složené z betonu a ocelové výztuže, dřevo má různou únosnost a modul pružnosti ve směru podél vláken a ve směru kolmém ...

Z různých důvodů (bezpečnost, vyloučení větších deformací apod.) namáháme větší stavební materiál jen po mez úměrnosti. Můžeme tudíž materiál idealizovat jako homogenní, izotropní a dokonale lineárně pružný - modul pružnosti je konstantní. Matematicky tento vztah vyjádříme rovnicí

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (8.8)$$

kde E je modul pružnosti, σ normálové napětí a ε relativní protažení. Rovnice (8.8) vyjadřuje základní vztah pružnosti, tzv. Hookeův zákon.

Hookeův zákon platí pouze tehdy, jsou-li splněny dva předpoklady: napětí nepřestoupí mez úměrnosti a nepůsobí napětí v příčných směrech. Působí-li totiž v příčných směrech další normálová napětí (obr. 8.9), mají tato napětí rovněž vliv na přetvoření v uvažovaném směru. Z popisu tahové zkoušky víme, že síla působí protažení ve směru svého vektoru a současně příčnou kontrakci v kolmých směrech.



Obr. 8.9. Normálová napětí v kolmých směrech.

Normálové napětí σ_x ve směru osy X vyvolává kromě protažení ve směru svého působení také zkrácení v kolmých směrech Y, Z (záporné protažení). Příčný rozměr tažené tyče se zkracuje (relativně) m - krát méně, než se prodlužuje délka ve směru tahové síly. Číslo m se nazývá Poissonova konstanta a musí být vždy větší než 2. Pro ocel se obvykle používá hodnota $m = 3$, pro beton $m = 6$ až 7. Převrácená hodnota Poissonovy konstanty se nazývá Poissonovo číslo a značí se μ . Napětí σ_x tedy vyvolává relativní deformace

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\varepsilon_x}{m} = -\mu \cdot \varepsilon_x = -\mu \cdot \frac{\sigma_x}{E}$$

Obdobné vztahy pro účinek napětí σ_y a σ_z získáme pomocí cyklických záměn indexů y za x , z za y , x za z .

Sečteme-li účinky všech tří napětí na protažení ve směru osy X , dostaneme výsledné poměrné protažení ve směru osy X a obdobně ve směrech os Y a Z :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y - \mu \cdot \sigma_z) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \mu \cdot \sigma_z - \mu \cdot \sigma_x) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_z - \mu \cdot \sigma_x - \mu \cdot \sigma_y) \end{aligned} \qquad (8.9)$$

Tyto závislosti se nazývají rozšířený Hookeův zákon, jenž stanoví deformaci za současného působení normálových napětí ve všech třech kolmých směrech.

Mezi relativním zkosením a tangenciálním napětím platí vztah obdobný Hookeovu zákonu

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \qquad (8.10)$$

kde γ je relativní zkosení, τ tangenciální napětí a G tzv. modul pružnosti ve smyku.

Modul pružnosti v tahu E , modul pružnosti ve smyku G a Poissonovo číslo μ (resp. Poissonova konstanta m) jsou tři materiálové konstanty, které v pružném oboru plně charakterizují daný materiál. Ovšem pouze dvě z těchto materiálových konstant jsou nezávislé, protože mezi těmito konstantami platí vztah

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \qquad (8.11)$$

Přetvoření nevzniká jen působením zatížení, ale také různými jinými vlivy. Ve stavební praxi to jsou zejména změna teploty a smršťování betonu. Změna teploty vyvolává v daném místě relativní protažení

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha \cdot \Delta T \qquad (8.12)$$

kde ΔT značí oteplení ve stupních Celsia a α je součinitel tepelné roztažnosti. Protože relativní protažení je veličina bezrozměrná, musí být rozměr součinitele tepelné roztažnosti $1/^\circ\text{C}$. Součinitel tepelné roztažnosti pro ocel i beton se od sebe příliš neliší a jejich hodnota je přibližně $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$.

Příklad 8.1.1.

Krychle o hraně 0,1 m byla zatížena napětím $\sigma_x = -20$ MPa, $\sigma_y = -5$ MPa. Účinkem tohoto zatížení se její strana rovnoběžná s osou X zkrátila o 0,1 mm a strana rovnoběžná s osou Y se zkrátila o 0,01 mm. Určete pružnostní konstanty materiálu, z něhož je krychle zhotovena.

Řešení: Protože původní délky stran byly 0,1 m, jsou relativní deformace ve směrech os X , Y rovny

$$\varepsilon_x = \frac{-0,0001}{0,1} = -0,001 \qquad \varepsilon_y = \frac{-0,00001}{0,1} = -0,0001$$

Napětí σ_z ve zbývajícím směru je nulové a po dosazení do rovnice (8.9) dostáváme závislosti

$$-0,001 = \frac{1}{E} \cdot (-20 + 5 \cdot \mu) \qquad -0,0001 = \frac{1}{E} \cdot (-5 + 20 \cdot \mu)$$

Tato soustava dvou rovnic o dvou neznámých E , μ má řešení

$$E = 19\,231 \text{ MPa} \qquad \mu = 0,154$$

Velikost modulu pružnosti ve smyku získáme z rovnice (8.11) a je

$$G = \frac{19\,231}{2 \cdot (1 + 0,154)} = 8\,333 \text{ MPa}$$

Příklad 8.1.2.

O kolik se stlačí betonová krychle o stranách 0,2 m, která je ve dvou směrech upnuta tak, že se nemůže roztahovat, a ve svislém směru je zatížena silou 160 kN. Modul pružnosti betonu uvažujte $E = 20\,000$ MPa, Poissonovo číslo $\mu = 0,15$.

Řešení: Upnutí kostky způsobuje, že relativní deformace ve směrech os X , Y jsou nulové. Ve směru osy Z vzniká vlivem působící síly napětí

$$\sigma_z = \frac{-160}{0,2 \cdot 0,2} = -4\,000 \text{ kPa} = -4 \text{ MPa}$$

Dosazením známých hodnot do soustavy (8.9) dostáváme

$$0 = \frac{1}{2 \cdot 10^4} \cdot (\sigma_x - 0,15 \cdot \sigma_y + 0,15 \cdot 4)$$

$$0 = \frac{1}{2 \cdot 10^4} \cdot (\sigma_y - 0,15 \cdot \sigma_x + 0,15 \cdot 4)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2 \cdot 10^4} \cdot (-4 - 0,15 \cdot \sigma_x - 0,15 \cdot \sigma_y)$$

Je to lineární soustava tří rovnic o třech neznámých σ_x , σ_y , ε_z , jejímž řešením dostáváme

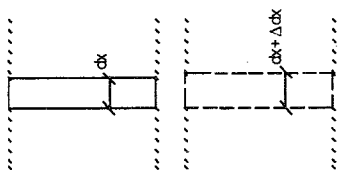
$$\sigma_x = \sigma_y = -0,7059 \text{ MPa} \qquad \varepsilon_z = -1,894 \cdot 10^{-4}$$

Celkové stlačení získáme přenásobením relativního stlačení původní délkou a je rovno

$$\Delta \ell = (-\varepsilon_z) \cdot \ell = 1,894 \cdot 10^{-4} \cdot 0,2 = 3,79 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0,0379 \text{ mm}$$

8.2. Prostý tah a tlak.

Prostý tah nebo tlak vzniká tehdy, když jedinou vnější silou v prutu je normálová síla (síla ve směru osy prutu - normály k průřezu). Při řešení zavádíme Navierovu hypotézu,



Obr. 8.10. Navierova hypotéza.

podle které zůstane osa prutu po přetvoření přímá a všechny body dvou sousedních rovnoběžných průřezů kolmých k ose prutu a tedy i ke směru výslednice vnějších sil N zůstanou i po deformaci rovinné, rovnoběžné a kolmé k ose prutu (obr. 8.10). Tato hypotéza v praxi plně vyhovuje a s výjimkou nejbližšího okolí konců prutu je v souladu

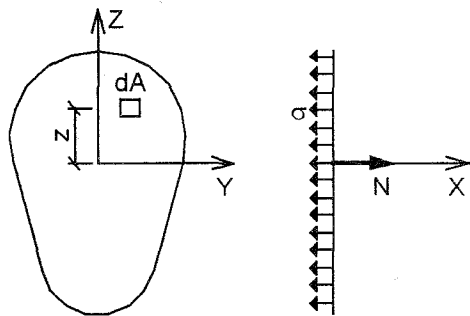
s experimentem. Všechna elementární vlákna mezi dvěma rovnoběžnými průřezy měla před deformací délku dx a po deformaci mají délku $dx + \Delta dx$. Relativní protažení je proto v celém průřezu konstantní a je rovno

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} \quad (8.13)$$

Protože předpokládáme, že v příčném směru nepůsobí žádná normálová napětí, platí jednoduchý Hookeův zákon (8.8). Velikost normálového napětí v průřezu je pak konstantní a je

rovna

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \text{konst.}$$



Obr. 8.11. Rovnováha při prostém tahu.

protože modul pružnosti je u homogenního materiálu konstantní. V průřezu musí být v rovnováze vnější síly působící z jedné strany (jejich výslednicí je normálová síla N) a z druhé strany působící vnitřní síly (obr. 8.11), neboli musí být splněny statické podmínky rovnováhy. Na každou elementární plochu dA

působí elementární vnitřní síla $\sigma \cdot dA$ a na celou plochu A vnější síla N . Směrová podmínka rovnováhy ve směru podélné osy X nosníku má tvar

$$N - \int_A \sigma \cdot dA = 0$$

Protože napětí je konstantní, můžeme σ vytknout před integrál a dostáváme

$$N - \sigma \cdot \int_A dA = 0 \quad N - \sigma \cdot A = 0$$

Odtud po dělení plošným obsahem průřezu A dostáváme výraz pro velikost normálového napětí při prostém tahu a tlaku

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (8.14)$$

Normálové napětí je při prostém tahu a tlaku po celém průřezu konstantní a jeho velikost je rovna podílu normálové síly a plochy průřezu.

Momentová podmínka ose Y (a obdobně i k jiné ose protínající paprsek síly N) má tvar

$$N \cdot 0 - \sigma \cdot \int_A z \cdot dA = 0$$

a protože napětí σ je od nuly různé, musí platit

$$\int_A z \cdot dA = 0$$

Tento integrál má význam statického momentu plochy A k ose Y a ten je nulový jen tehdy, je-li osa Y těžišťovou osou. A protože stejnou úvahu můžeme provést pro kteroukoliv osu jdoucí těžištěm, musí paprsek normálové síly tímto těžištěm průřezu procházet. Při excentrickém působení dává normálová síly k těžišti také ohybový moment a pak nastává kombinace několika základních případů pružnosti.

Návrh průřezu spočívá v určení nejmenší nutné plochy, při které napětí v průřezu nepřesáhne povolenou hodnotu. Požadujeme-li, aby napjatost v konstrukci zaručeně nepřesáhla mez pružnosti (tzv. návrh podle klasické teorie), nesmí napětí překročit stanovenou hodnotu tzv. mezního napětí. Mezní napětí je vždy podstatně menší než mez pružnosti, aby tak byla zachována určitá míra bezpečnosti. V praxi totiž ani nejsou zcela přesně splněny předpoklady o zatížení ani není zajištěna kvalita materiálu a elastické vlastnosti hmot. Míra bezpečnosti je odlišná pro různé materiály a konstrukce podle toho, jak je ve výrobě zaručena homogenita materiálu, podle předpokládaného namáhání konstrukce, důležitosti konstrukce ...

Průřezová plocha musí tedy být vždy taková, aby platilo

$$|\sigma| \leq R \quad (8.15)$$

kde R značí mezní napětí, a po dosazení ze vztahu (8.14) dostáváme

$$\frac{|N|}{A_{nut}} \leq R \quad A_{nut} \geq \frac{|N|}{R} \quad (8.16)$$

Posouzení je výpočet největšího napětí v konstrukci a ověření, zda je splněna nerovnost (8.15). Přitom je třeba, aby napětí nebylo značně menší než je mezní napětí, protože potom by materiál konstrukce nebyl využit hospodárně, konstrukce by byla neekonomická a těžkopádná. Návrh ve statickém výpočtu může být vynechán, ale posouzení musí být provedeno vždy!

Nerovnost (8.15) platí ovšem pouze pro materiály se stejnou odolností v tahu a tlaku, jako je např. ocel. U materiálů, které mají v tahu a tlaku odlišné vlastnosti, musíme rozlišovat mezní napětí v tahu R_t a mezní napětí v tlaku R_c (je udáváno jako prostá hodnota bez znaménka). Rovnici (8.15) je pak třeba upravit na tvar

$$-R_c \leq \sigma \leq R_t \quad (8.15a)$$

a pro návrh použijeme jednoho ze vztahů

$$A_{nut} \geq \frac{N}{R_t} \quad A_{nut} \geq \frac{-N}{R_c} \quad (8.16a)$$

prvého v případě kladné normálové síly a druhého pro tlakovou normálovou sílu.

Celkové protažení (stlačení) prutu při namáhání prostým tahem nebo tlakem získáme součtem protažení jednotlivých diferenciálních elementů, tedy

$$\Delta l = \int_0^{\ell} \varepsilon \cdot dx$$

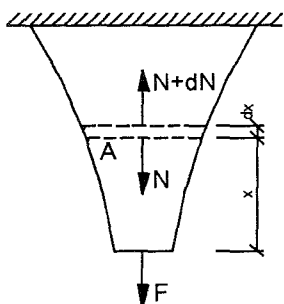
Dosadíme-li do integrálu za relativní protažení podle Hookeova zákona (8.8) a dále za napětí σ podle vztahu (8.14), dostáváme pro velikost protažení

$$\Delta l = \int_0^{\ell} \frac{N}{E \cdot A} \cdot dx \quad (8.17)$$

Ve stavební praxi se nejčastěji vyskytují pruty stálého průřezu, tzv. pruty prismatické, u nichž je plocha konstantní. Je-li dále normálová síla konstantní (nedbáme tíhy prutu) a prut je zhotoven z jediného materiálu, můžeme vytknout konstantní členy před integrál a protažení prismatického prutu je pak rovno

$$\Delta l = \frac{N}{E \cdot A} \cdot \int_0^{\ell} dx = \frac{N \cdot \ell}{E \cdot A} \quad (8.18)$$

U prutů z těžkých a málo únosných materiálů je třeba dbát při návrhu i vlastní tíhy prutu. Potom ovšem normálová síla není konstantní, ale mění se s výškou průřezu a při hospodárném návrhu nejnamáhanějšího průřezu nebude v ostatních průřezích prismatického prutu materiálu hospodárně využito. Tuto nehospodárnost můžeme odstranit, navrheme-li prut proměnného průřezu, tzv. prut konstantního odporu (obr. 8.12). U něho je velikost průřezové plochy spojitě proměnná tak, aby napětí bylo ve všech průřezích stejné. Je však třeba připomenout, že výraznějších úspor, které by převýšily zvýšenou pracnost výroby takového prutu, je možno dosáhnout jen u dlouhého prutu.



Obr. 8.12. Prut konstantního odporu.

Uvažujme prut konstantního odporu o měrné tíze na horním konci upevněný a na dolním zatížený tahovou silou F (obr. 8.12). Napětí σ , které je rovno normálové síle N dělené plochou A

$$\sigma = \frac{N}{A} = konst. \quad (8.19)$$

je u tohoto prvku konstantní. Uvažujme-li rovnováhu na elementární části prutu o šířce dx , je přírůstek normálové síly dN roven tíze elementární části

$$dN = \gamma \cdot A \cdot dx \quad (8.20)$$

kde γ značí měrnou tíhu materiálu. Z rovnice (8.19) je normálová síla N na prutu rovna

$$N = A \cdot \sigma$$

a protože napětí je konstantní, musí být přírůstek normálové síly

$$dN = \sigma \cdot dA$$

Ze srovnání vztahů (8.20) a (8.21) vyplývá

$$\sigma \cdot dA = \gamma \cdot A \cdot dx$$

a po úpravě

$$\frac{dA}{A} = \frac{\gamma}{\sigma} \cdot dx$$

Integrací této rovnice dostáváme

$$\ln A = \frac{\gamma}{\sigma} \cdot x + C \qquad A = e^{C + \frac{\gamma}{\sigma} x} = e^C \cdot e^{\frac{\gamma}{\sigma} x} \qquad (8.22)$$

Integrační konstantu C , resp. člen e^C , určíme z podmínky na dolním okraji. Pro $x=0$ musí být totiž $A=F/\sigma$ a po dosazení do vztahu (8.22) vychází

$$\frac{F}{\sigma} = e^C \cdot 1$$

Rovnice plochy průřezu je tedy

$$A = \frac{F}{\sigma} \cdot e^{\frac{\gamma}{\sigma} x} \qquad (8.23)$$

Ze vzorce (8.23) je patrné, že plocha vzrůstá se vzdáleností od volného konce podle exponenciály.

Všechny zákonitosti zde uvedené platí stejně tak pro prostý tah jako pro prostý tlak, avšak platnost předpokladu prostého tlaku je v praxi velmi omezena. Jak poznáme později, ohýbají se štíhlé (dlouhé a úzké) pruty za působení zdánlivě dostředné tlakové síly tak, že je nelze vyšetřovat jen na prostý tlak. Omezujeme proto výpočet v prostém tlaku jen na vyšetřování krátkých částí konstrukce s poměrně značnými průřezovými rozměry, jako jsou masivní zděné sloupy nebo základové patky apod. Tam, kde je tzv. štíhlostní poměr (poměr délky a poloměru setrvačnosti) značný, např. u tlačných částí příhradových soustav, nemůžeme navrhovat podle teorie odvozené z předpokladů dosud zavedených. Meze, v nichž můžeme řešit tlačné konstrukce v prostém tlaku, poznáme později. Zatím se pro porozumění přidržme jen zkušenosti. Tenký vrbový proutek zůstává přímý při natahování, ale ohne se nebo zlomí, tlačíme-li z obou konců poměrně malými silami. Naproti tomu nevybočí ze svislé polohy osa nízkého masivního špalku, i když do něj bušíme mohutnými údery.

Prohlédneme-li si pracovní diagram betonu, (obr. 8.6d), vidíme, že v tlačené oblasti má vysokou únosnost, zato v oblasti tažené je jeho únosnost minimální. Ocel má výborné vlastnosti v tahu i tlaku, je však velmi drahá a její výroba energeticky náročná. Proto vznikla myšlenka spojit oba materiály dohromady a byl vytvořen železobeton. V něm je úkol přenášet tahové síly a napětí přisouzen ocelové výztuži, beton v tahu působí až do dosažení meze pevnosti v tahu; po jejím překročení vzniknou v betonu trhlinky, napětí v betonu poklesne na nulu a celý tah přenáší pouze výztuž.



Vyšetřujeme napjatost tláčeného masivního železobetonového sloupu, zatíženého normálovou silou N . Označme plochu výztuže A_a , plochu betonu A_b , modul pružnosti výztuže nechť je E_a a modul pružnosti betonu E_b . Protože sloup se stlačuje jako celek, bude stlačení betonu i výztuže stejné, tedy

$$\varepsilon_a = \varepsilon_b = \varepsilon \quad (8.24)$$

Podle Hookeova zákona (8.8) je napětí přímo úměrné relativní deformaci, takže platí

$$\sigma_a = E_a \cdot \varepsilon \quad \sigma_b = E_b \cdot \varepsilon \quad (8.25)$$

a výslednice všech napětí bude tedy

$$N = \sigma_a \cdot A_a + \sigma_b \cdot A_b = \varepsilon \cdot (E_a \cdot A_a + E_b \cdot A_b)$$

Odtud vychází pro relativní deformaci

$$\varepsilon = \frac{N}{E_a \cdot A_a + E_b \cdot A_b}$$

a po dosazení do vztahu (8.25)

$$\sigma_b = \frac{N}{A_b + \frac{E_a}{E_b} \cdot A_a} \quad \sigma_a = \frac{E_a}{E_b} \cdot \frac{N}{A_b + \frac{E_a}{E_b} \cdot A_a} \quad (8.26)$$

Porovnáme-li vztah pro napětí v betonu se vztahem (8.14), můžeme napětí v betonu vyjádřit jako poměr normálové síly a náhradní plochy železobetonového průřezu A_i

$$\sigma_b = \frac{N}{A_i} \quad \sigma_a = \frac{E_a}{E_b} \cdot \frac{N}{A_i} \quad (8.27)$$

kde je

$$A_i = A_b + \frac{E_a}{E_b} \cdot A_a \quad (8.28)$$

Náhradní plocha železobetonového průřezu se tedy rovná ploše betonu zvětšené o plochu výztuže vynásobenou poměrem modulů pružnosti oceli a betonu (tento poměr závisí na druhu betonu a má hodnotu okolo 10).

Při posouzení železobetonového průřezu namáhaného na tlak, ale také namáhaného na tah, pokud je namáhaný tak malou silou, že v betonu ještě nevznikají trhlinky, vypočteme napětí v betonu a ve výztuži podle vztahů (8.27) a (8.28) a porovnáme je podle vztahu (8.15) s mezním napětím betonu a oceli. Při návrhu postupujeme tak, že zvolíme poměr mezi plochou výztuže a plochou betonu, tzv. procento vyztužení μ (nezaměňovat s Poissonovým číslem, které se značí také μ). Obvykle volíme $\mu \leq 1\%$. Dosadíme-li do vztahu (8.28) za plochu výztuže $A_a = \mu \cdot A_b$, dostáváme ze vztahů (8.27) a (8.15)

$$A_b \geq \frac{N}{R_b \left(1 + \frac{E_a}{E_b} \cdot \mu \right)} \quad (8.29)$$

Při odvození vztahu (8.29) jsme předpokládali, že napětí v betonu dosáhne dříve mezní hodnoty než napětí ve výztuži, neboli že platí

$$\frac{E_a}{E_b} \cdot R_b \leq R_a$$

Při tlakovém namáhání platí vztahy (8.24) až (8.29) tak dlouho, pokud napětí v betonu ani ve výztuži nedosáhne meze kluzu. Po dosažení této meze se předpokládá, že podle obrázku 8.8a napětí v plastickém materiálu zůstává konstantní a napětí v pružném materiálu vzrůstá tak dlouho, dokud i ono nedosáhne příslušné meze kluzu, pak je únosnost průřezu vyčerpána. Podle teorie plasticity je tedy únosnost tláčeného železobetonového prvku rovna

$$N_{\max} = R_a \cdot A_a + R_b \cdot A_b \quad (8.30)$$

a zatěžující síla musí být menší než tato únosnost.

Příklad 8.2.1.

Navrhnete a posudíte prut příhradové soustavy na osovou sílu $N=600$ kN. Prut je složen ze dvou rovnoramenných úhelníků z oceli, která má mezní napětí v tahu $R=160$ MPa.

Řešení: Podle vztahu (8.16) vychází nutná průřezová plocha

$$A_{\text{nut}} \geq \frac{N}{R} = \frac{600}{160\,000} = 3,75 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 = 3\,750 \text{ mm}^2$$

V tabulkách nalezneme, že nejbližší vyšší plochu mají 2 L100.100.10, jejichž plocha je

$$A = 2 \cdot 1\,900 = 3\,800 \text{ mm}^2$$

Skutečné napětí v prutu příhradové soustavy potom bude

$$\sigma = \frac{600}{3\,800} = 0,1579 \text{ kN/mm}^2 = 157,9 \text{ MPa} \leq 160 \text{ MPa}$$

V prutu složeném ze 2 L100.100.10 vychází napětí 157,9 MPa, což je menší než mezní napětí a prut tedy vyhovuje.

Příklad 8.2.2.

Navrhnete a posudíte čtvercovou základovou patku pod sloup, ve kterém působí normálová síla $N = -0,5$ MN, je-li mezní napětí základové zeminy $R = 0,2$ MPa.

Řešení: Nutnou průřezovou plochu určíme opět ze vztahu (8.16). Dostaneme

$$A_{\text{nut}} \geq \frac{0,5}{0,2} = 2,5 \text{ m}^2$$

Této ploše odpovídá čtverec o délce strany $a=1,6$ m.

Posouzení: napětí v základové spáře získáme podle vztahu (8.14). Dostáváme

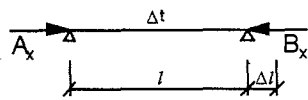
$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-0,5}{1,6 \cdot 1,6} = -0,195 \text{ MPa} \quad |\sigma| < R = 0,2 \text{ MPa}$$

průřez 1,6 x 1,6 m tedy vyhovuje.

Příklad 8.2.3.

Jaké napětí vznikne v ocelovém prutu, který se nemůže roztahovat, ohřejeme-li jej o 30° C.

Řešení: Označíme-li délku prutu l (obr. 8.13), potom vlivem oteplení by se tento prut protáhl



o délku

$$\Delta l_t = \alpha \cdot \Delta t \cdot l$$

Obr. 8.13. Miv oteplení.

Tomuto protažení však brání podpora b . Reakce B_x podle vztahu (8.18) způsobí protažení prutu o rozdíl délek (záporné znaménko

vyjadřuje, že se ve skutečnosti jedná o zkrácení)

$$\Delta l_B = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} = \frac{-B_x \cdot l}{E \cdot A}$$

Oteplení a jím vyvozená reakce vznikají současně a tedy i obě protažení se sčítají. Protože podpory jsou neposuvné, musí být celkové protažení nulové, tedy

$$\Delta l = \Delta l_t + \Delta l_B = 0$$

$$\alpha \cdot \Delta t \cdot l + \left(\frac{-B_x \cdot l}{E \cdot A} \right) = 0$$

$$B_x = E \cdot A \cdot \alpha \cdot \Delta t$$

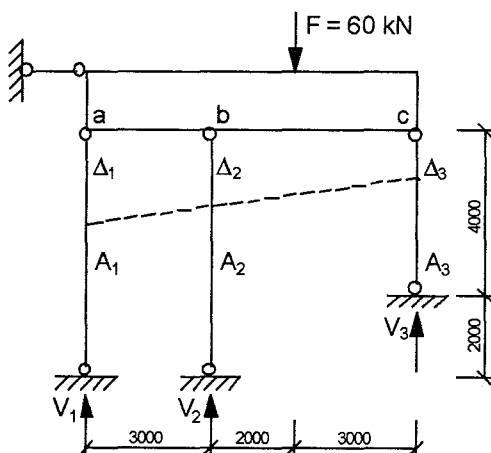
Napětí v prutu je dáno vztahem (8.14), a protože součinitel tepelné roztažnosti oceli je $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ a modul pružnosti oceli je $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, vyvozuje oteplení prutu o $\Delta t = 30 \text{ } ^\circ\text{C}$ v tomto prutu napětí

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-B_x}{A} = -\frac{E \cdot A \cdot \alpha \cdot \Delta t}{A} = -E \cdot \alpha \cdot \Delta t = -2,1 \cdot 10^5 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 30 = -75,6 \text{ MPa}$$

Je vidět, že napětí v neposuvně podepřeném prutu vlivem oteplení není závislé na délce prutu ani na ploše průřezu.

Příklad 8.2.4.

Tuhá deska na obrázku 8.14 je podepřena čtyřmi ocelovými kyvnými pruty, jejichž plochy jsou $A_1 = 0,002 \text{ m}^2$, $A_2 = A_3 = 0,005 \text{ m}^2$. Určete osové síly v prutech, jestliže tuhou desku zatížíme silou $F = 60 \text{ kN}$.



Obr. 8.14. Staticky neurčitý případ tahu a tlaku.

Řešení: Tuhá deska má v rovině tři stupně volnosti. Protože je podepřena čtyřmi jednoduchými vazbami, jedná se o případ jedenkrát staticky neurčitý. Příklad můžeme řešit dvojím způsobem - metodou silovou a metodou deformační.

a) řešení metodou silovou

Při řešení staticky neurčitých konstrukcí silovou metodou volíme za nezávisle proměnné silové veličiny (síly, ohybové momenty, napětí

apod.). Pro tyto neznámé píšeme statické podmínky rovnováhy. Pro určení neznámých nám chybí tolik podmínek, kolikrát je konstrukce staticky neurčitá. Musíme tedy statické podmínky rovnováhy doplnit podmínkami deformačními - podmínkami spojitosti konstrukce po deformaci čili podmínkami kompatibility.

Označme reakce ve svislých prutech na obrázku 8.14 jako V_1 , V_2 , V_3 . Ze směrové podmínky rovnováhy ve vodorovném směru okamžitě vyplývá, že reakce ve vodorovném prutu je nulová. Pro svislé reakce můžeme napsat tedy ještě dvě další statické podmínky rovnováhy, např. momentovou podmínku rovnováhy k bodu a a momentovou podmínku rovnováhy k bodu c . Tyto podmínky jsou

$$\curvearrowleft_a: V_2 \cdot 3 + V_8 \cdot 8 - F \cdot 5 = 0 \qquad V_3 = \frac{5}{8}F - \frac{3}{8}V_2$$

$$\curvearrowleft_c: -V_1 \cdot 8 - V_2 \cdot 5 + F \cdot 3 = 0 \qquad V_1 = \frac{3}{8}F - \frac{5}{8}V_2$$

Poslední potřebná rovnice je podmínka kompatibility. Protože se jedná o tuhou desku, nemůže se tato deformovat, a proto body a , b , c , které před deformací leží na jedné přímce, musí i po deformaci zůstat ležet na jedné přímce. Mezi poklesy bodů a , b , c musí tedy platit závislost

$$\frac{\Delta_2 - \Delta_3}{\Delta_1 - \Delta_3} = \frac{5}{8} \qquad -5 \cdot \Delta_1 + 8 \cdot \Delta_2 - 3 \cdot \Delta_3 = 0$$

Stlačení Δ_i prutu i je podle vztahu (8.18) rovno

$$\Delta_i = \frac{V_i \cdot \ell_i}{E \cdot A_i}$$

Po dosazení číselných hodnot do rovnice kompatibility dostáváme poslední podmínku ve tvaru

$$-5 \cdot \frac{V_1 \cdot 6}{E \cdot 0,002} + 8 \cdot \frac{V_2 \cdot 6}{E \cdot 0,005} - 3 \cdot \frac{V_3 \cdot 4}{E \cdot 0,005} = 0$$

a dosadíme-li sem za V_1 a V_3 jejich závislosti na V_2 a F podle výše uvedených statických podmínek rovnováhy, má rovnice kompatibility tvar

$$-5 \cdot \frac{6}{E \cdot 0,002} \cdot \left(\frac{3}{8}F - \frac{5}{8}V_2 \right) + 8 \cdot \frac{6}{E \cdot 0,005} \cdot V_2 - 3 \cdot \frac{4}{E \cdot 0,005} \cdot \left(\frac{5}{8}F - \frac{3}{8}V_2 \right) = 0$$

Řešení této rovnice je

$$V_2 = 21,51 \text{ kN}$$

a po dosazení do výrazů pro V_1 a V_3 dostáváme

$$V_1 = 9,06 \text{ kN} \qquad V_3 = 29,43 \text{ kN}$$

b) řešení metodou deformační

Řešíme-li staticky neurčitou soustavu metodou deformační, pak za nezávisle proměnné považujeme deformační veličiny (posunutí, pootočení atd.). Tyto neznámé veličiny musí splňovat podmínky kompatibility; podmínky kompatibility však samy k určení neznámých deformací nestačí, chybí tolik rovnic, kolik má soustava bez vazeb stupňů volnosti, soustavu rovnic kompatibility tedy doplníme statickými podmínkami rovnováhy.

V konstrukci na obrázku 8.14 jsou posunutí Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 vázána již dříve uvedenou podmínkou

$$\frac{\Delta_2 - \Delta_3}{\Delta_1 - \Delta_3} = \frac{5}{8} \qquad \Delta_2 = \frac{5}{8}\Delta_1 + \frac{3}{8}\Delta_3$$

Normálové síly v prutech můžeme vyjádřit pomocí vztahu (8.18) jako funkce protažení prutů, a protože reakce V_1 , V_2 , V_3 jsou rovny záporně vzaté normálové síle v příslušném prutu, platí

$$V_i = \frac{E \cdot A_i \cdot \Delta_i}{\ell_i}$$

$$V_1 = \frac{0,002 \cdot E}{6} \cdot \Delta_1 \qquad V_3 = \frac{0,005 \cdot E}{4} \cdot \Delta_3$$

$$V_2 = \frac{0,005 \cdot E}{6} \cdot \Delta_2 = \frac{5}{8} \cdot \frac{0,005 \cdot E}{6} \cdot \Delta_1 + \frac{3}{8} \cdot \frac{0,005 \cdot E}{6} \cdot \Delta_3$$

Tyto reakce nyní dosadíme do dvou statických podmínek rovnováhy (třetí - směrovou ve vodorovném směru - jsme již použili k určení reakce ve vodorovném prutu)

$$\curvearrowright \mathbf{a}: \quad V_2 \cdot 3 + V_8 \cdot 8 - F \cdot 5 = 0 \qquad V_3 = \frac{5}{8}F - \frac{3}{8}V_2$$

$$\curvearrowright \mathbf{c}: \quad -V_1 \cdot 8 - V_2 \cdot 5 + F \cdot 3 = 0 \qquad V_1 = \frac{3}{8}F - \frac{5}{8}V_2$$

Dosadíme-li sem za reakce jejich výše uvedené deformační závislosti, dostaneme soustavu rovnic

$$3 \cdot \left(\frac{5}{8} \cdot \frac{0,005 \cdot E}{6} \cdot \Delta_1 + \frac{3}{8} \cdot \frac{0,005 \cdot E}{6} \cdot \Delta_3 \right) + 8 \cdot \frac{0,005 \cdot E}{4} \cdot \Delta_3 = 5 \cdot F$$

$$8 \cdot \frac{0,002 \cdot E}{6} \cdot \Delta_1 + 5 \cdot \left(\frac{5}{8} \cdot \frac{0,005 \cdot E}{6} \cdot \Delta_1 + \frac{3}{8} \cdot \frac{0,005 \cdot E}{6} \cdot \Delta_3 \right) = 3 \cdot F$$

kteřá má řešení

$$\Delta_1 = \frac{27\,170}{E}$$

$$\Delta_3 = \frac{23\,547,2}{E}$$

Dosazením posunutí Δ_1 , Δ_3 do výrazů pro V_i dostáváme velikosti svislých reakcí

$$V_1 = 9,06 \text{ kN}$$

$$V_2 = 21,51 \text{ kN}$$

$$V_3 = 29,43 \text{ kN}$$

Příklad 8.2.5.

Jak se zvětší únosnost konstrukce z příkladu 8.2.4, předpokládáme-li plastické vyrovnání osových sil v prutech. Předpokládejme, že vnější síla $F=60$ kN z příkladu 8.2.4 způsobí právě dosažení meze kluzu v nejméně namáhaném prutu.

Řešení: Vyjdeme-li z osových sil stanovených při řešení příkladu 8.2.4, vypočteme napjatost v jednotlivých prutech po dosazení do rovnice (8.14)

$$\sigma_1 = \frac{9,06}{0,002} = 4\,530 \text{ kPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{21,51}{0,005} = 4\,302 \text{ kPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{29,43}{0,005} = 5\,886 \text{ kPa}$$

Největší napětí vzniká v prutu 3, takže mez kluzu má hodnotu $\sigma_f = 5\,886 \text{ kPa}$. Protože v prutu 3 je dosaženo meze kluzu, při zvětšování zatížení již v tomto prutu napětí nevzrůstá a vzrůst zatížení přenášení pouze pruty 1 a 2. Toto podepření má o jeden stupeň volnosti více než původní konstrukce, jde tedy o podepření staticky určité, takže reakce můžeme stanovit přímo ze statických podmínek rovnováhy. Označíme-li přitížení jako ΔF , dostaneme z momentové podmínky rovnováhy k bodu **a**

$$\Delta V_2 \cdot 3 - \Delta F \cdot 5 = 0$$

Aby v prutu 2 bylo napětí právě rovno napětí na mezi kluzu, musí být přírůstek osově síly

$$\Delta V_2 = \sigma_f \cdot A_2 - V_2 = 5\,886 \cdot 0,005 - 21,51 = 7,92 \text{ kN}$$

a tedy z výše uvedené momentové podmínky rovnováhy k bodu **a** vyplývá

$$\Delta F = \frac{3}{5} \Delta V_2 = 4,75 \text{ kN}$$

Tato síla vyvolá v prutu 1 reakci (z momentové podmínky k bodu **b**)

$$-\Delta V_1 \cdot 3 - \Delta F \cdot 2 = 0 \qquad \Delta V_1 = -\frac{2}{3} \Delta F = -3,17 \text{ kN}$$

K plastickému vyrovnání dojde tedy při zatížení tuhé desky silou $F = 64,75 \text{ kN}$ a reakce v prutech budou pak mít velikost

$$V_1' = 5,89 \text{ kN}$$

$$V_2' = 29,43 \text{ kN}$$

$$V_3' = 29,43 \text{ kN}$$

Příklad 8.2.6.

Navrhněte plochu železobetonového sloupu zatíženého tlakovou silou $F = 800 \text{ kN}$. Mezní napětí betonu a oceli jsou $R_b = 8 \text{ MPa}$, $R_a = 180 \text{ MPa}$, moduly pružnosti jsou $E_b = 20\,000 \text{ MPa}$, $E_a = 210\,000 \text{ MPa}$. Procento vyztužení uvažujte $\mu = 0,01$.

Návrh proveďte pro stav: a) pružný
b) plastický

Výsledek:

	A_b	A_a	σ_b	σ_a
a) pružný stav	90 500 mm ²	905 mm ²	8 MPa	84 MPa
b) plastický stav	81 640 mm ²	817 mm ²	8 MPa	180 MPa

8.3. Prostý smyk

Průřez je namáhán na prostý smyk, působí-li na něj vnější síly, jejichž účinek lze ekvivalentně nahradit jedinou smykovou silou T jejíž paprsek působí v rovině průřezu a prochází těžištěm průřezu. Teorie prostého smyku se ve stavební praxi používá k výpočtu styků, jako jsou nýty, svorníky, šrouby, sváry, hřeby apod. Prostý smyk počítáme za předpokladu, že se tangenciální napětí po průřezu rozděluje rovnoměrně. Tato hypotéza je ve stavební praxi přijatelná, protože při výpočtu styků jde vždy o průřezy malých ploch, kde lze nerovnoměrnost napětí zanedbat. Namáhání ve stycích nepřestoupí bezpečnou mez, určíme-li mezní napětí ve smyku R_s z experimentálně zjištěných sil, jež způsobují porušení, za stejných předpokladů rozdělení vnitřních sil. Tím zároveň vyloučíme z výpočtu vedlejší vlivy, které smyk doprovázejí (tření ve styčných plochách spojovaných částí, ohyb a tah spojovacích prvků apod.)

Označíme-li plochu spojovací části jako A a smykovou sílu jako T , pak napětí v prostém smyku τ je rovno

$$\tau = \frac{T}{A} \quad (8.31)$$

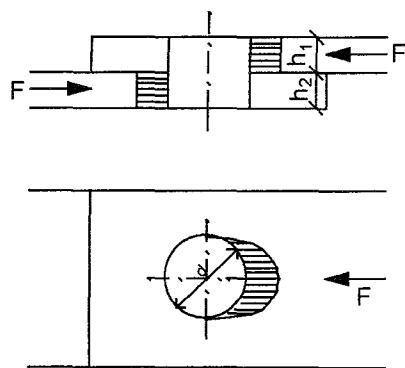
navrhujeme nebo posuzujeme z podmínky bezpečné pevnosti

$$\tau \leq R_s \quad (8.32)$$

takže nejmenší nutná plocha je dána vztahem

$$A_{nut} \geq \frac{T}{R_s} \quad (8.33)$$

Síla, kterou styk přenáší, musí do spojovacího prvku (nýtu, šroubu ...) přejít ze spojovaných částí normálovým napětím v čele prvku (obr.8.15). Nastává tak otlačení materiálu a



Obr. 8.15. Otláčení nýtu nebo šroubu.

se zřetelem na toto otláčení je třeba též všechny styky navrhovat a posuzovat. Předpokládáme, že se napětí rozděluje rovnoměrně na plochu styku, kolmou k přenášené síle, takže napětí v otláčení počítáme podle vztahu

$$\sigma_o = \frac{T}{d \cdot \min(h_1, h_2)} \quad (8.34)$$

kde d je průměr prvku a $\min(h_1, h_2)$ je menší tloušťka z obou spojovaných částí. Napětí v otláčení nesmí přestoupit mezní napětí v otláčení R_o , tedy

$$\sigma_o \leq R_o \quad (8.35)$$

kteří je vždy vyšší než mezní napětí spojovaných částí v tlaku s ohledem na soustředěné napětí (spojovací prvek je okolním materiálem sevřen).

Nýty, svorníky nebo šrouby jsou jednostřížné, dvojtřížné nebo vícetřížné, vzdorují-li vzájemnému posunutí spojovaných částí jedním, dvěma nebo více svými průřezy (obr. 8.16). Při jednostřížném spojení tažených nebo tlačných prvků nepůsobí normálové síly v jediném společném paprsku a proto je styk současně namáhán i na ohyb; toto spojení proto připouštíme jen u méně významných nebo nepřiliš namáhaných částí.

Nýt nebo šroub m -střížný, který přenáší celkovou sílu F_1 , je namáhán na smyk napětím, které se rovná síle F_1 dělené m -násobkem plochy průřezu, tedy

$$\tau = \frac{F_1}{m \cdot 0,25 \cdot \pi \cdot d^2} \quad (8.36)$$

Toto smykové napětí nesmí přestoupit mezní napětí ve smyku, takže musí platit nerovnost

$$\frac{4 \cdot F_1}{m \cdot \pi \cdot d^2} \leq R_s \quad (8.37)$$

a potom maximální síla, kterou jeden nýt může na smyk přenést, se rovná

$$F_{1,s} = \frac{m \cdot \pi \cdot d^2 \cdot R_s}{4} \quad (8.38)$$

Současně nesmí být nýt přemáhán na otláčení podle vztahů (8.34) a (8.35). Ve vztahu (8.34) jsou h_1 , h_2 celkové tloušťky, které sílu přenášejí; např. na obrázku 8.16c je h_1 celková tloušťka všech tří plechů vlevo a h_2 je celková tloušťka obou plechů vpravo. Ze vztahů (8.34) a (8.35) vyplývá, že maximální síla, kterou jeden nýt může na otláčení přenést, je

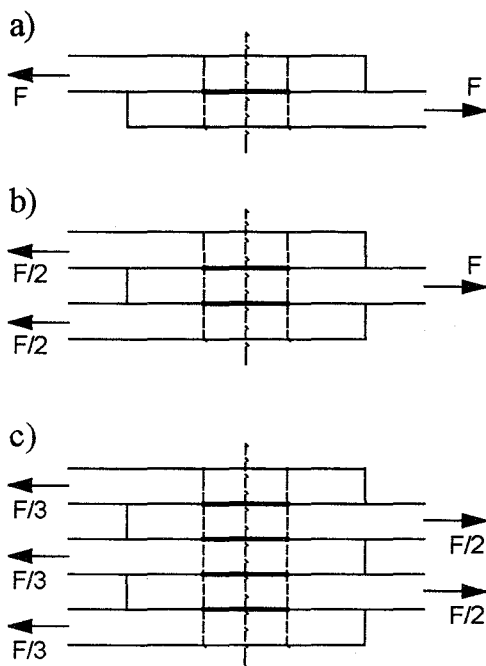
$$F_{1,o} = d \cdot \min(h_1, h_2) \cdot R_o \quad (8.39)$$

Potřebný počet nýtů pak určíme podle menší z únosností na smyk a na otláčení. Je-li celková síla, kterou má spoj přenést, rovna F , potom počet nýtů je

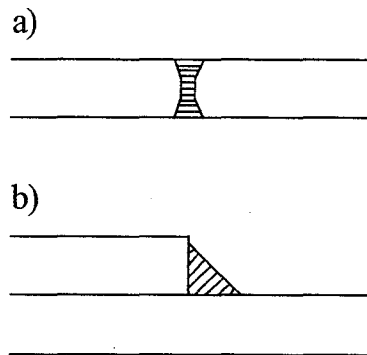
$$n = \frac{F}{\min(F_{1,s}, F_{1,o})} \quad (8.40)$$

Počet nýtů pak volíme jako nejbližší vyšší celé číslo, přičemž nejmenší přípustný počet nýtů je dva.

Ocelové části se nejčastěji stykují svárem, jehož předností je snadná práce a z hlediska statického to, že se jím průřez zpravidla neoslabí. Sváry jsou nejčastěji tupé nebo koutové (obr. 8.17).



Obr. 8.16. Spojovací prvek: a) jednostřížný, b) dvojtřížný, c) čtyřstřížný.



Obr. 8.17. Svár: a) tupý, b) koutový.



Tupé sváry jsou namáhány stejným způsobem jako základní materiál, takže při stykování tažených prutů určujeme napjatost ve sváru z podmínky napětí v prostém tahu (8.14). Mezní napětí sváru v tahu bývá obvykle nižší než mezní napětí základního materiálu.

Koutový svár vyplňuje pravoúhlý kout mezi dvěma spojovanými kusy a do jeho průřezu lze zhruba vepsat pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s odvěsnami, jejichž délka je rovna tloušťce sváru. Označíme-li tloušťku sváru t (obr.8.18), je nejmenší rozměr, ve kterém svár vzdoruje, dán výškou trojúhelníka a , kde

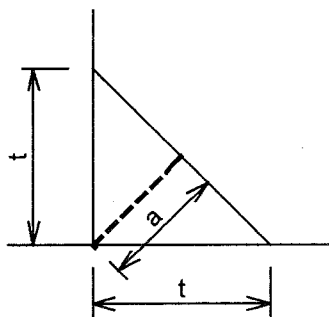
$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot t \approx 0,7 t$$

označíme-li délku sváru l , potom plocha, ve které by došlo k usmyknutí, je $0,7 \cdot t \cdot l$ a napětí ve sváru je

$$\tau = \frac{T}{0,7 \cdot t \cdot l} \leq R_s \quad (8.41)$$

Při návrhu sváru určíme potřebnou délku sváru z podmínky (8.41), ze které vychází

$$l \geq \frac{T}{0,7 \cdot t \cdot R_s} \quad (8.42)$$



Obr. 8.18. Nebezpečná rovina koutového sváru.

Příklad 8.3.1.

Navrhněte připojení taženého prutu složeného ze dvou úhelníků 100.100.10 ke styčnickovému plechu tloušťky 15 mm. Prut připojte pomocí nýtů $\varnothing 25$ na plnou únosnost taženého prutu. Mezní napětí oceli v tahu je $R=160$ MPa, mezní napětí nýtů na smyk je $R_s=125$ MPa a na otláčení je $R_o=250$ MPa.

Řešení: Plocha dvou úhelníků 100.100.10 oslabených otvory $\varnothing 25$ je (viz obr. 8.19)

$$A = 2 \cdot 920 - 2 \cdot 25 \cdot 10 = 3\,340 \text{ mm}^2$$

Tato plocha přenesení sílu

$$F = 3\,340 \cdot 160 = 534\,400 \text{ N}$$

Únosnost jednoho nýtu na smyk (dvojitřizný nýt) je

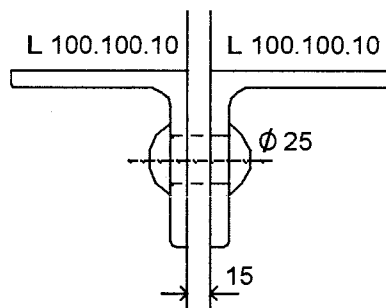
$$F_{1,s} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 25^2 \cdot 125}{4} = 122\,718 \text{ N}$$

Při otláčení se uplatní v jednom směru tloušťka dvou úhelníků $h_1=2 \cdot 10=20$ mm, v druhém směru tloušťka styčnickového plechu $h_2=15$ mm. Pro únosnost na otláčení je rozhodující menší tloušťka, takže ze vztahu (8.39) vychází únosnost na otláčení

$$F_{1,o} = 25 \cdot 15 \cdot 250 = 93\,750 \text{ N}$$

Rozhoduje únosnost na otláčení, která je menší. Únosnost jednoho nýtu je tedy $F_1=F_{1,o}=93\,750$ N, takže nutný počet nýtů je

$$n = \frac{F}{F_1} = \frac{534\,400}{93\,750} = 5,8 \quad \text{volíme 6 nýtů } \varnothing 25$$



Obr. 8.19. Nýtovaný spoj.

Příklad 8.3.2.

Tažený prut z příkladu 8.3.1 připojte na plnou únosnost prutu pomocí koutových svárů tloušťky 10 mm (obr. 8.20). Mezní napětí sváru je $R_s=104$ MPa.

Řešení: Plocha dvou úhelníků 100.100.10 je

$$A = 2 \cdot 1920 = 3840 \text{ mm}^2$$

takže únosnost prutu vychází

$$F = 3840 \cdot 160 = 614400 \text{ N}$$

což je o 13% více než v případě nýtovaného připojení prutu. Tuto sílu je třeba rozdělit mezi oba úhelníky. Síla v úhelnících působí v jejich těžišti, které není uprostřed výšky, proto síly F_1 , F_2 budou různé, jejich velikosti budou nepřímo úměrné vzdálenostem svárů od paprsku síly (těžiště úhelníků). Musí tedy platit $F_1:F_2=71,8:28,2$, takže pro celkovou sílu $F=614400$ N dostáváme (úhelníky jsou dva, každý je připojen dvěma sváry)

$$F_1 = 220570 \text{ N}$$

$$F_2 = 86630 \text{ N}$$

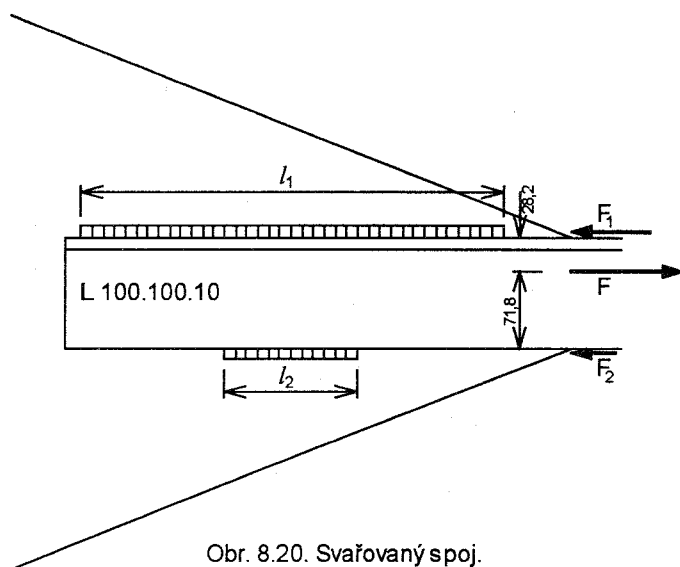
Délka sváru 2 vypočtená podle vztahu (8.42) je rovna

$$\ell_2 = \frac{86630}{0,7 \cdot 10 \cdot 104} = 119 \cong 120 \text{ mm}$$

Svár 1 je namáhán složitějším způsobem. Napětí v úhelníku je po jeho ploše rozloženo rovnoměrně, takže síla v přírubě kolmé k styčnickovému plechu působí v dosti velké vzdálenosti od sváru a kromě smyku namáhá svár 1 i ohybem. Tento ohyb způsobí ve sváru 1 další smykové napětí, kolmé k působící síle. Obě kolmá smyková napětí se vektorově sčítají (podle Pythagorovy věty) a toto výsledné smykové napětí nesmí být větší než mezní napětí. Pro splnění této podmínky obvykle postačí, aby podélné smykové napětí ve sváru 1 (tj. napětí vyvolané smykovou silou) bylo menší než 0,8 násobek mezního napětí. Odtud dostáváme

$$\ell_1 = \frac{220570}{0,7 \cdot 10 \cdot 0,8 \cdot 104} = 378,7 \text{ mm}$$

Délky svárů zaokrouhlujeme na násobky 5 mm nahoru, takže úhelníky budou připojeny sváry délek 380 mm (na straně příruby úhelníku) a 120 mm (na straně vzdálenější od příruby úhelníku).



8.4. Prostý ohyb.

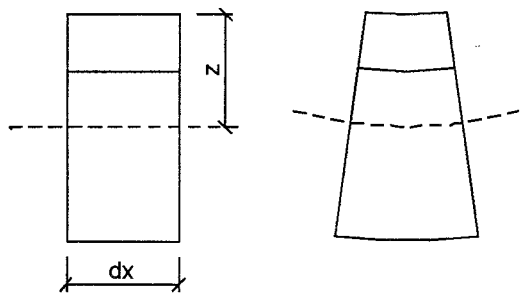
Prostý ohyb vzniká tehdy, je-li jedinou vnitřní silou ohybový moment, který působí v hlavní centrální rovině setrvačnosti průřezu (vektor ohybového momentu má směr druhé hlavní centrální osy setrvačnosti průřezu).

I při prostém ohybu zavádíme jako předpoklad řešení Navierovu hypotézu, kterou si můžeme obecněji definovat takto:

„Rovinné řezy kolmé před deformací ke střednici nosníku zůstanou i po deformaci rovinné a kolmé k deformované střednici nosníku.“

Podélná vlákna na sebe netlačí.“

Označme podélnou osu nosníku X a zatěžovací moment nechť působí v rovině XZ - vektor ohybového momentu má směr osy Y a označme jej proto M_y . Jak bylo řečeno v úvodu odstavce, aby se jednalo o prostý ohyb, musí být osy Y, Z hlavními centrálními osami setrvačnosti průřezu.



Obr. 8.21. Navierova hypotéza.

Ukažme si nyní, jaké jsou důsledky přijetí Navierovy hypotézy na napjatost a deformaci v průřezu. To, že podélná vlákna na sebe netlačí, znamená, že napjatost ve směrech kolmých k podélné ose nosníku je nulová, takže platí

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

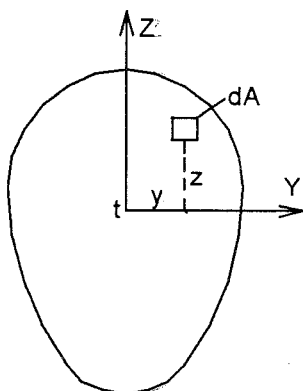
Na nosníku tedy bude platit zjednodušený Hookeův zákon (8.8)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \sigma_x$$

Dva řezy rovinné před deformací vzdálené od sebe dx (obr. 8.21) zůstanou i po deformaci rovinné, proto se tedy bude protažení resp. stlačení podélných vláken měnit po průřezu lineárně, a protože původní délka vláken byla stejná (dx), mění se lineárně i relativní deformace. Můžeme tedy relativní deformaci vyjádřit lineární závislostí

$$\varepsilon_x = B + C \cdot y + D \cdot z \quad (8.43)$$

kde B, C, D jsou pro dané x konstanty.



Obr. 8.22. Rovnováha při prostém ohybu.

Velikost konstant B, C, D určíme ze statických podmínek rovnováhy mezi vnitřními silami v průřezu a napětím. Jedinou nenulovou vnitřní silou je ohybový moment M_y ; normálová síla N a ohybový moment M_z jsou při prostém ohybu nulové.

Normálovou sílu získáme jako součet elementárních sil

působících na plošky dA (obr.8.22), tedy

$$N = \int_A \sigma_x \cdot dA$$

Ohybový moment získáme jako součet statických momentů elementárních sil k ose Y ; kladný ohybový moment byl definován tak, že vytahuje spodní vlákna, proto tahová síla na kladném rameni z vyvozuje záporný moment, tedy

$$M_y = - \int_A z \cdot \sigma_x \cdot dA$$

a obdobně

$$M_z = - \int_A y \cdot \sigma_x \cdot dA$$

Dosadíme-li sem za napětí z Hookeova zákona (8.8) a za relativní deformace ze vztahu (8.43), dostaneme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \int_A E \cdot (B + C \cdot y + D \cdot z) \cdot dA &= 0 \\ - \int_A E \cdot z \cdot (B + C \cdot y + D \cdot z) \cdot dA &= M_y \\ - \int_A E \cdot y \cdot (B + C \cdot y + D \cdot z) \cdot dA &= 0 \end{aligned}$$

V daném průřezu jsou B , C , D i modul pružnosti E konstanty, můžeme je proto po rozkladu integrálu součtu na součet integrálů před jednotlivé integrály vytknout a dostaneme po dělení rovnic modulem pružnosti E

$$\begin{aligned} B \cdot \int_A dA + C \cdot \int_A y \cdot dA + D \cdot \int_A z \cdot dA &= 0 \\ B \cdot \int_A z \cdot dA + C \cdot \int_A y \cdot z \cdot dA + D \cdot \int_A z^2 \cdot dA &= - \frac{M_y}{E} \\ B \cdot \int_A y \cdot dA + C \cdot \int_A y^2 \cdot dA + D \cdot \int_A y \cdot z \cdot dA &= 0 \end{aligned}$$

V těchto rovnicích je integrál dA roven ploše průřezu A , integrály $y \cdot dA$, $z \cdot dA$ jsou statické momenty plochy průřezu k těžišťovým osám Z , Y , integrály $y^2 \cdot dA$, $z^2 \cdot dA$ jsou momenty setrvačnosti I_z , I_y plochy průřezu k těžišťovým osám Z , Y a integrál $y \cdot z \cdot dA$ je deviační moment D_{xy} plochy průřezu k týmž osám Z , Y . Po zavedení těchto průřezových veličin dostáváme

$$\begin{aligned} B \cdot A + C \cdot U_x + D \cdot U_y &= 0 \\ B \cdot U_y + C \cdot D_{yz} + D \cdot I_y &= - \frac{M_y}{E} \\ B \cdot U_z + C \cdot I_z + D \cdot D_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

Protože osy Y , Z jsou hlavní centrální osy setrvačnosti, musí k nim být deviační moment nulový. Protože i statické momenty U_y , U_z plochy průřezu k těžišťovým osám Z , Y mají v tomto případě velikost rovnou nule, dostáváme jako řešení soustavy rovnic

$$B = 0 \qquad C = 0 \qquad D = - \frac{M_y}{E \cdot I_y}$$

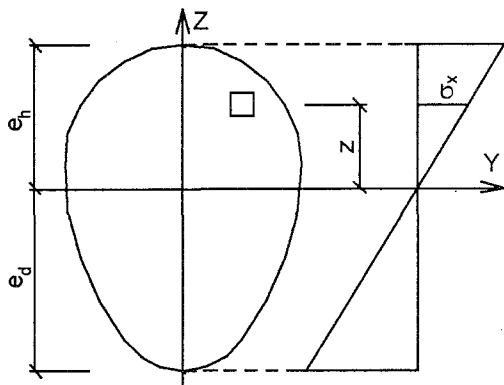
Dosazením do vztahu (8.43) dostáváme pro relativní deformaci vztah

$$\varepsilon_x = -\frac{M_y \cdot y}{E \cdot I_y} \quad (8.44)$$

a po použití Hookeova zákona (8.8) dostaneme pro napětí

$$\sigma_x = -\frac{M_y \cdot z}{I_y} \quad (8.45)$$

Vzorec (8.45) vyjadřuje velikost normálového napětí při prostém ohybu. Napětí je přímo



Obr. 8.23. Napjatost při prostém ohybu.

úměrné hodnotě ohybového momentu a nepřímo úměrné momentu setrvačnosti průřezu. Nulové hodnoty nabývá v bodech osy Y a roste lineárně se vzdáleností bodu od této osy (obr. 8.23). Maximálních hodnot nabývá v bodech od osy Y nejvzdálenějších.

Body, v nichž je normálové napětí nulové, leží na přímce, která se nazývá neutrální osa. Při prostém ohybu neutrální osa prochází těžištěm a je totožná s jednou z hlavních centrálních os setrvačnosti průřezu, s tou, která je rovnoběžná se směrem vektoru ohybového momentu.

Při návrhu průřezu namáhaného prostým ohybem je třeba zajistit, aby maximální kladné napětí vypočtené podle vzorce (8.45) nepřekročilo mezní napětí materiálu v tahu a největší záporné napětí nepřesáhlo mezní napětí v tlaku. Označíme-li vzdálenost horních vláken průřezu od neutrální osy e_h a vzdálenost dolních vláken od neutrální osy e_d (obr. 8.23), musí být při kladném ohybovém momentu splněny nerovnosti

$$\frac{M_y \cdot e_d}{I_y} \leq R_t \quad \frac{M_y \cdot e_h}{I_y} \leq R_c \quad (8.46)$$

Při záporném ohybovém momentu vzniká tah v horních vláknech a tlak v dolních vláknech, takže v nerovnostech (8.46) je třeba e_d , e_h navzájem zaměnit (a ohybový moment brát v absolutní hodnotě). Nerovnosti (8.46) můžeme dále upravit na tvar

$$\frac{I_y}{e_d} \geq \frac{M_y}{R_t} \quad \frac{I_y}{e_h} \geq \frac{M_y}{R_c}$$

Členy závislé na rozměrech průřezu se v takto upravených nerovnostech vyskytují pouze na levých stranách nerovnic. Poměry I_y/e_d , I_y/e_h se nazývají průřezový modul a značí se W_d , W_h . Průřezový modul je tedy poměr momentu setrvačnosti průřezu a vzdálenosti krajních vláken

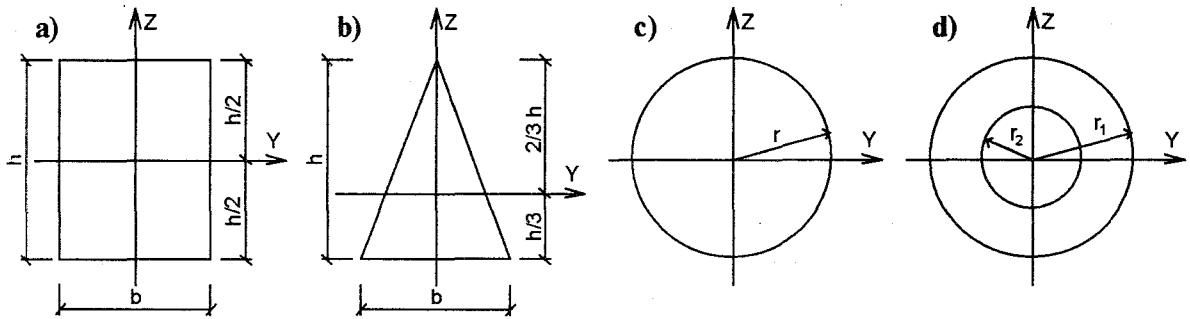
$$W_d = \frac{I_y}{e_d} \quad W_h = \frac{I_y}{e_h} \quad (8.47)$$

a jejich rozměr je m^3 .

Při návrhu ohýbaného prutu postupujeme tak, že ze vztahu

$$W_{nut} \geq \frac{\pm M_y}{R} \quad (8.48)$$

určíme nejmenší možný průřezový modul a podle něj navrhne průřez.



Obr. 8.24. Základní průřezy.

Průřezový modul obdélníkového průřezu (obr. 8.24a) vychází podle vzorce (8.47) stejný pro horní i pro spodní vlákna a je roven

$$W_h = W_d = \frac{\frac{1}{12} b \cdot h^3}{\frac{1}{2} h} = \frac{1}{6} b \cdot h^2 \quad (8.49)$$

U průřezu tvaru rovnoramenného trojúhelníka (obr. 8.24b) dostáváme pro osu Y rovnoběžnou se základnou (základna dole) průřezové moduly

$$W_h = \frac{\frac{1}{36} b \cdot h^3}{\frac{2}{3} h} = \frac{1}{24} b \cdot h^2 \quad (8.50)$$

$$W_d = \frac{\frac{1}{36} b \cdot h^3}{\frac{1}{3} h} = \frac{1}{12} b \cdot h^2$$

Pro kruhový průřez (obr. 8.24c) je průřezový modul stejně veliký pro jakoukoliv centrální osu (každá centrální osa je současně i hlavní osa setrvačnosti) vychází

$$W = \frac{\frac{1}{4} \pi \cdot r^4}{r} = \frac{1}{4} \pi \cdot r^3 \quad (8.51)$$

a u průřezu ve tvaru mezikruží (obr. 8.24d) je pro jakoukoliv centrální osu

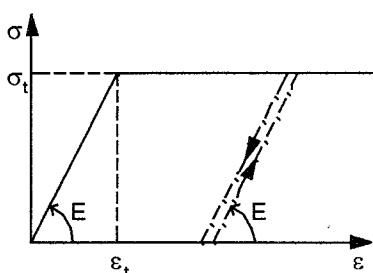
$$W = \frac{\frac{1}{4} \pi \cdot (r_1^4 - r_2^4)}{r} = \frac{1}{4} \pi \cdot \left(r_1^3 - \frac{r_2^4}{r_1} \right) \quad (8.51a)$$

Průřezové moduly válcovaných průřezů jsou přímo uvedeny ve statických tabulkách těchto průřezů.

Když jsme se v prvním odstavci této kapitoly seznamovali s pracovním diagramem, viděli jsme, že lineárně pružná oblast není v celém rozsahu diagramu až po porušení materi-

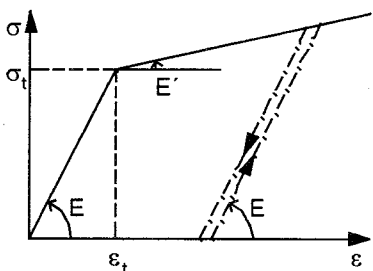
álu. Materiál je lineárně pružný jen po mez úměrnosti, která obvykle téměř splývá s mezí kluzu. Po jejím překročení následuje plastická oblast, kdy deformace vzrůstá bez zvyšování napětí, ale materiál se ještě neporuší.

Doposud jsme předpokládali, že únosnost materiálu je plně vyčerpána, jestliže v některém místě dosáhne napjatost meze kluzu. Ale když po dosažení této meze v jednom místě budeme dále zvyšovat zatížení, začne v tomto místě materiál téci za zachování velikosti napětí a v ostatních místech dojde k dalšímu vzrůstu napětí - dochází k redistribuci napětí, kdy méně napjatá místa přebírají zatížení míst přetížených. Zřetelně toto můžeme vidět při prostém ohybu. Zatěžme průřez ohybovým momentem, při němž napětí v krajních vláknech dosahuje meze kluzu. Zvětšíme-li zatěžovací ohybový moment, potom se krajní vlákna protáhnou a meze kluzu dosahují další vlákna blíže k neutrální ose. Říkáme, že průřez využívá plastických rezerv.



Obr. 8.25. Plasticita bez zpevnění.

Po dosažení meze kluzu rostou deformace při zachování intenzity napětí na mezi kluzu, modul pružnosti je tedy v plastické oblasti nulový.



Obr. 8.26. Plasticita se zpevněním.

Skutečný pracovní diagram, jak jsme viděli na obrázcích 8.5 a 8.6, je dost složitý, proto jej při výpočtu idealizujeme. Idealizace bývá dvojího druhu. První způsob nazýváme plasticita bez zpevnění (obr. 8.25) a předpokládáme při něm, že až do dosažení meze kluzu σ_t , ε_t je materiál lineárně pružný a relativní protažení je přímo úměrné napětí s konstantou úměrnosti E (modul pružnosti v tahu).

Druhý způsob výpočtu nazýváme plasticita se zpevněním (obr. 8.26). Při něm předpokládáme, že po překročení meze kluzu roste při zvětšování deformací i napětí, ovšem při značně menším modulu pružnosti E' . Platí tedy v oblasti

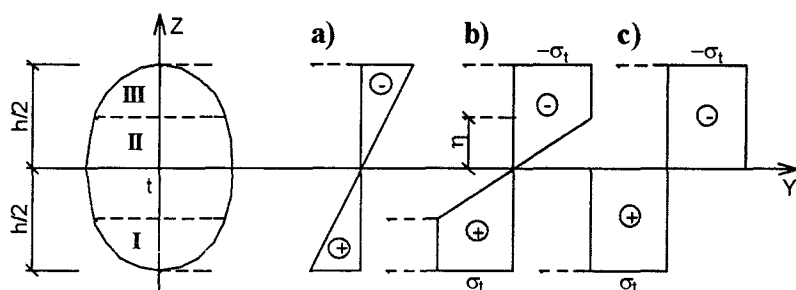
$$\sigma > \sigma_t \quad \sigma = \sigma_t + E'(\varepsilon - \varepsilon_t) \quad (8.52)$$

Obvykle ke zpevnění materiálu v plastické oblasti nepřihlížíme, klademe tedy $E' = 0$.

Při odlehčování u obou způsobů výpočtu - plasticity bez zpevnění i plasticity se zpevněním - předpokládáme, že se materiál chová pružně s modulem pružnosti rovným modulu pružnosti v pružné oblasti (nenapjatém stavu). Při plném odlehčení pak deformace nevymizí, ale zůstávají tzv. plastické deformace (části deformací, které vymizí, se nazývají pružné deformace). Při opětovném zatěžování se pak materiál vrací po stejné přímce, kterou sledoval při odlehčování (chová se pružně až do té doby, dokud se napjatost i deformace nenavratí na to místo pracovního diagramu, kde začalo odlehčování), a pak opět sleduje pracovní diagram.

Při ohybu nosníku se krajní vlákna dostávají do plastického stavu. Část průřezu poblíž neutrální osy je však stále v pružném stavu, a proto se tento ohyb nosníku nazývá pružně plastický. Uvažujme ohyb nosníku, jehož průřez má dvě osy souměrnosti a je zatížen ohybem v rovině XZ , jež je rovinou souměrnosti průřezu. Zkoušky potvrzují, že hypotéza o rovinnosti průřezů i po deformaci a o jejich kolmosti k deformované střednicové ose zůstává v platnosti i pro pružnoplastický a plastický stav. Bude tedy i nadále platit, že ve vláknech, která zůstávají v pružném stavu, se napětí mění lineárně a pro vlákna v plastickém stavu je napětí konstantní, rovné napětí na mezi kluzu σ_t .

Při postupném růstu ohybového momentu prochází průřez postupně třemi stadii. Je to stadium pružné (obr. 8.27a), stadium pružnoplastické (obr. 8.27b) a stadium plastické (obr. 8.27c).



Obr. 8.27. Pružnoplastický ohyb.
Stadium a) pružné
b) pružnoplastické
c) plastické.

Ve stadiu pružném je napjatost dána výše odvozeným vztahem (8.45)

$$\sigma_x = -\frac{M_y \cdot z}{I_y}$$

Tento vztah udává závislost mezi napětím a ohybovým momentem do té doby, dokud je napětí b krajních vláknech menší nebo nejvýše rovno napětí na mezi kluzu σ_t , dokud tedy platí vztah

$$\sigma_e = \frac{M_y}{W_y} \leq \sigma_t \quad W_y = \frac{2 \cdot I_y}{h} \quad (8.53)$$

Ze vztahu (8.53) můžeme určit ohybový moment na mezi pružné únosnosti, který má hodnotu

$$M_p = W_y \cdot \sigma_t = \frac{2 \cdot I_y \cdot \sigma_t}{h} \quad (8.54)$$

Jakmile ohybový moment překročí hodnotu M_p , objeví se na krajích průřezu plastické oblasti, průřez se dostává do stadia pružnoplastického. Označme vzdálenost plastické oblasti od neutrální osy jako η . Protože ohybový moment je výsledným účinkem vnitřních sil, platí v průřezu podmínka ekvivalence

$$\begin{aligned} M_y &= - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z \cdot dA = - \int_{-h/2}^{-\eta} \sigma_t \cdot z \cdot dA - \int_{-\eta}^{\eta} (-\sigma_t) \cdot \frac{z}{\eta} \cdot z \cdot dA - \int_{\eta}^{h/2} (-\sigma_t) \cdot z \cdot dA = \\ &= \sigma_t \cdot \left(- \int_{-h/2}^{-\eta} z \cdot dA + \int_{\eta}^{h/2} z \cdot dA + \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^{\eta} z^2 \cdot dA \right) \end{aligned}$$

První z integrálů v tomto vztahu představuje statický moment U_I plastické oblasti I k ose Y , podobně druhý z integrálů představuje statický moment U_{III} plastické oblasti III k ose Y . Třetí integrál je moment setrvačnosti I_{II} pružné oblasti II k ose Y . Je tedy ohybový moment v pružoplastickém stavu roven

$$M_y = \sigma_t \cdot \left(-U_I + \frac{1}{\eta} \cdot I_{II} + U_{III} \right) = \sigma_t \cdot \left(2 \cdot U_{III} + \frac{1}{\eta} \cdot I_{II} \right) \quad (8.55)$$

Rovnice (8.55) je podmínka pro určení vzdálenosti η plastické oblasti od neutrální osy.

Největší ohybový moment přenáší průřez v okamžiku, kdy je pružná oblast nulová, takže celý průřez je v plastickém stavu. Označíme-li statický moment horní poloviny průřezu jako U , je moment na mezi plastické únosnosti průřezu

$$M_t = 2 \cdot U \cdot \sigma_t \quad (8.56)$$

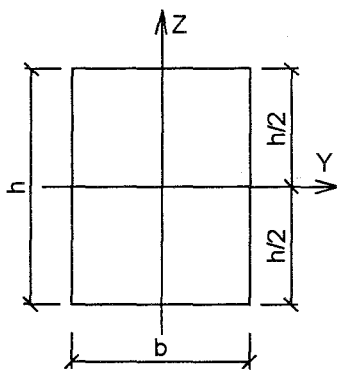
Označíme-li obdobně jako W_t u pružného stavu

$$M_t = W_t \cdot \sigma_t \quad (8.57)$$

kde W_t nazýváme plastický průřezový modul, je tento plastický průřezový modul roven

$$W_t = 2 \cdot U \quad (8.58)$$

Plastický průřezový modul je roven dvojnásobku statického momentu poloviny průřezu. Na příklad pro obdélníkový průřez (obr. 8.28) je



Obr. 8.28. Obdélníkový průřez

$$U = b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{1}{8} \cdot b \cdot h^2$$

takže plastický průřezový modul obdélníka se rovná

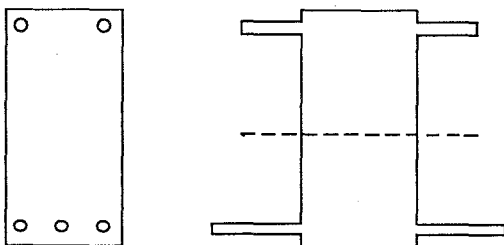
$$W_t = \frac{1}{4} \cdot b \cdot h^2 \quad (8.59)$$

Protože pružný průřezový modul obdélníka je podle (8.49) roven $W = b \cdot h^2 / 6$, vychází plastická únosnost průřezu na ohybový moment

$$M_t = 1,5 \cdot M_p$$

Při pružném namáhání průřezu je tedy ještě plastická rezerva, která u obdélníkového průřezu činí padesát procent.

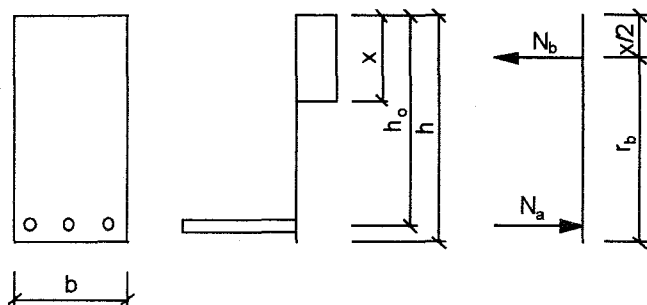
Ovšem padesátiprocentní plastická rezerva se vztahuje pouze na obdélníkový průřez, u jiných průřezů je velikost plastické rezervy odlišná. Na příklad u I průřezu jsou téměř současně zplastizovány obě příruby, takže plastickou rezervu tvoří pouze stojina.



Obr. 8.29. Náhradní plocha železobetonového průřezu.

Železobetonový průřez se při namáhání ohybem chová zpočátku jako pružný. Platí tedy pro napětí vztahy (8.45) až (8.48), přičemž plochu výztuže nahrazujeme náhradní plochou betonu obdobně jako při prostém tahu a tlaku podle vztahu (8.28) - viz obrázek 8.29. Tato napjatost platí ovšem pouze na málo namáhaných

nosnicích, kdy nepřipouštíme vznik trhlinek v betonu, jako je tomu např. u konstrukcí nacházejících se v agresivním prostředí. Posouzení takovéto konstrukce se provádí podle vztahu (8.46), rozhoduje maximální přípustná velikost tahového napětí v betonu.



Obr. 8.30. Napjatost ohybaného železobetonového průřezu.

Při větším zatížení se tažený beton potrhá a v tlačené zóně dojde k plastickému vyrovnání napětí. Na mezi únosnosti bude tedy napětí v železobetonovém průřezu (bez výztuže v tlačené oblasti) rozděleno podle obrázku 8.30. Nachází-li se v průřezu i tlačená výztuž, je postup řešení obdobný, výpočet je ovšem komplikovanější.

Označme šířku průřezu b , výšku průřezu h , vzdálenost osy výztuže od tlačенého okraje průřezu h_0 (tzv. účinná výška železobetonového průřezu, tedy výška nosníku zmenšená o krytí výztuže a polovinu profilu), x výšku tlačенé oblasti betonu (před výpočtem neznámá). Sílu ve výztuži označme N_a a výslednici napětí v betonu N_b ; vzdálenost výslednic N_a , N_b se nazývá rameno vnitřních sil a označme ji r_b . Z obrázku 8.30 vidíme, že je to účinná výška průřezu zmenšená o polovinu výšky tlačенé oblasti betonu.

Posouzení průřezu spočívá ve stanovení maximálního ohybového momentu, který je průřez schopen přenést, a jeho porovnání se skutečně působícím ohybovým momentem. Protože průřez je namáhán pouze ohybovým momentem, je normálová síla nulová a musí tedy být $N_a = N_b$. Odtud získáme výšku tlačенé oblasti betonu x

$$-N_a + b \cdot x \cdot R_b = 0$$

$$x = \frac{N_a}{b \cdot R_b} = \frac{A_a \cdot R_a}{b \cdot R_b} \quad (8.60)$$

a ohybový moment na mezi únosnosti bude potom roven

$$M_R = N_a \cdot r_b = A_a \cdot R_a \cdot \left(h_0 - \frac{x}{2} \right) \quad (8.61)$$

Návrh průřezu spočívá v stanovení velikosti plochy výztuže tak, aby průřez byl schopen přenést zadaný ohybový moment M . Po dosažení z (8.60) do (8.61) dostáváme kvadratickou rovnici pro plochu výztuže

$$M = A_a \cdot R_a \cdot \left(h_0 - \frac{A_a \cdot R_a}{2 \cdot b \cdot R_b} \right)$$

která má řešení

$$A_a = b \cdot h_0 \cdot \frac{R_b}{R_a} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot M}{b \cdot h_0^2 \cdot R_b}} \right) \quad (8.62)$$

Při návrhu můžeme také postupovat iteračním způsobem. Nejprve odhadneme velikost ramene vnitřních sil, která bývá obvykle blízká 0,9 násobku účinné výšky průřezu h_0 . Z podmínky (8.61) vyplývá, že při tomto ramenu vnitřních sil vychází velikost normálové síly ve výztuži

$$N_a = \frac{M}{r_b} \quad (8.63)$$

Této síle ve výztuži odpovídá podle vztahu (8.60) výška tlačené betonové oblasti

$$x = \frac{N_a}{b \cdot R_b}$$

takže upřesněná hodnota ramene vnitřních sil je

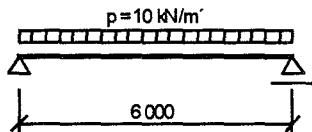
$$r_b' = h_0 - \frac{x}{2} \quad (8.64)$$

Tuto hodnotu dosadíme znovu do vztahu (8.63) a celý výpočet opakujeme tak dlouho, dokud se ve dvou po sobě následujících bězích nebude síla ve výztuži shodovat s požadovanou přesností. Plochu výztuže pak vypočteme ze vztahu

$$A_a = \frac{N_a}{R_a} \quad (8.65)$$

Příklad 8.4.1.

Navrhňte a posuďte prostý nosník o rozpětí 6 m zatížený rovnoměrným zatížením intenzity $p=10 \text{ kN/m'}$. Nosník navrhňte jako válcovaný I profil z oceli s mezním napětím $R=160 \text{ MPa}$ (obr. 8.31).



Obr. 8.31. Prostý nosník.

Řešení: Maximální ohybový moment na prostém nosníku zatíženém plným rovnoměrným zatížením je uprostřed nosníku a jeho velikost je

$$M_c = \frac{1}{8} \cdot p \cdot \ell^2 = \frac{1}{8} \cdot 10 \cdot 6^2 = 45 \text{ kNm}$$

Nutný průřezový modul nosníku nyní dostaneme ze vztahu (8.48) Po dosazení dostáváme

$$W_{nut} = \frac{M_c}{R} = \frac{0,045}{160} = 281,25 \cdot 10^6 \text{ m}^3$$

Ve statických tabulkách najdeme nejbližší vyšší hodnotu průřezového modulu, je to pro nosník I č. 24, který má průřezový modul $W=345 \text{ 000 mm}^3$.

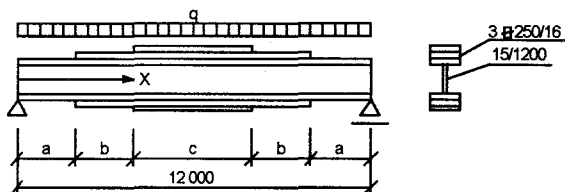
Posouzení I č. 24: maximální napětí je dáno vztahem (8.45), případně pomocí vztahu (8.48)

$$\sigma_x = -\frac{M_y \cdot z}{I_y} \quad \sigma_{\max} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{45}{3,54 \cdot 10^{-4}} = 127,1 \cdot 10^3 \text{ kPa} < 160 \text{ MPa}$$

Navržený průřez I č. 24 tedy vyhovuje.

Příklad 8.4.2.

Jaké rovnoměrné zatížení unese prostý nosník o rozpětí 12 m zhotovený jako svařovaný I průřez se třemi pásnicemi v přírubách, je-li mezní napětí oceli $R=160$ MPa. Délky pásnic odstupňujte tak, aby byly hospodárně využity (obr. 8.32).



Obr. 8.32. Prostý nosník - svařovaný I průřez

Řešení: Nejprve určíme únosnost průřezů s jednou, dvěma a třemi pásnicemi, vypočteme tedy momenty setrvačnosti, průřezové moduly a ohybové momenty, které průřezy unesou.

Moment setrvačnosti stojiny k ose Y je (viz [3], str. 387, kde jsou uvedeny momenty setrvačnosti stojin různých výšek o šířce 1 cm)

$$I_s = 1,5 \cdot 144\,000 = 216\,000 \text{ cm}^4 = 2,16 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

Moment setrvačnosti přírub s jednou pásnicí, tj. rozměrů 250/16 (viz [3], str. 389)

$$I_1 = 25 \cdot 11\,830 = 295\,750 \text{ cm}^4 = 2,9575 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

Moment setrvačnosti přírub s dvěma pásnicemi, tj. rozměrů 250/32 (tamtéž)

$$I_2 = 25 \cdot 24\,291 = 607\,275 \text{ cm}^4 = 6,07275 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

Moment setrvačnosti přírub s třemi pásnicemi, tj. rozměrů 250/48 (tamtéž)

$$I_3 = 25 \cdot 37\,399 = 934\,975 \text{ cm}^4 = 9,34975 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

Průřezový modul průřezu s jednou pásnicí (označme h výšku stojiny) je roven

$$W_1 = \frac{I_s + I_1}{\frac{h}{2} + 0,016} = \frac{2,16 \cdot 10^{-3} + 2,9575 \cdot 10^{-3}}{0,6 + 0,016} = 8,3076 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Průřezový modul průřezu s dvěma pásnicemi je roven

$$W_2 = \frac{I_s + I_2}{\frac{h}{2} + 2 \cdot 0,016} = \frac{2,16 \cdot 10^{-3} + 6,07275 \cdot 10^{-3}}{0,6 + 0,032} = 13,027 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Průřezový modul průřezu s třemi pásnicemi je roven

$$W_3 = \frac{I_s + I_3}{\frac{h}{2} + 3 \cdot 0,016} = \frac{2,16 \cdot 10^{-3} + 9,34975 \cdot 10^{-3}}{0,6 + 0,048} = 17,762 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Únosnost průřezu, to je ohybový moment, který průřez unese, určíme ze vztahu

$$M = W \cdot R$$

Pro průřezy s jednou, dvěma a třemi pásnicemi dostáváme

$$M_1 = 8,3076 \cdot 10^{-3} \cdot 160 = 1,3292 \text{ MNm}$$

$$M_2 = 13,027 \cdot 10^{-3} \cdot 160 = 2,0843 \text{ MNm}$$

$$M_3 = 17,762 \cdot 10^{-3} \cdot 160 = 2,8419 \text{ MNm}$$

Maximální ohybový moment je u prostého nosníku uprostřed a je roven

$$M_{\max} = \frac{1}{8} \cdot q \cdot \ell^2$$

Tento ohybový moment má být roven ohybovému momentu na mezi únosnosti nosníku se třemi přírubami M_3 , takže dostáváme

$$M_3 = \frac{1}{8} \cdot q \cdot \ell^2 \quad q = \frac{8 \cdot M_3}{\ell^2} = \frac{8 \cdot 2,8419}{12^2} = 0,1579 \text{ MN/m'}$$

Ohybový moment v obecném průřezu x prostého nosníku zatíženého rovnoměrným zatížením je roven

$$M = \frac{1}{2} \cdot q \cdot x \cdot (\ell - x)$$

Známe-li hodnotu ohybového momentu M , můžeme z tohoto vztahu určit vzdálenost x , v níž se tento moment nachází. Řešením kvadratické rovnice dostáváme

$$x = \frac{\ell}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - \frac{2 \cdot M}{q}} = \frac{\ell}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{M}{M_3}}\right)$$

Pro momenty M_1 , M_2 po dosazení do tohoto vztahu vychází

$$x_1 = \frac{12}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1,3292}{2,8419}}\right) = 1,623 \text{ m} ; 10,377 \text{ m}$$

$$x_2 = \frac{12}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2,0843}{2,8419}}\right) = 2,902 \text{ m} ; 9,098 \text{ m}$$

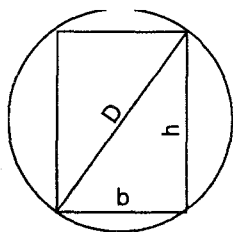
Vzdálenosti konců jednotlivých pásnic (obr. 8.32) tedy jsou

$$a = 1,623 \text{ m} \quad b = 1,279 \text{ m} \quad c = 6,196 \text{ m}$$

Příklad 8.4.3.

Jaký má být poměr stran dřevěného trámu, který je vytesán z kmene o průměru D , aby měl největší únosnost na prostý ohyb.

Řešení: Označíme-li základnu trámu b , výšku trámu h , musí podle obrázku 8.33 platit



Obr. 8.33. Dřevěný trám.

$$b^2 + d^2 = D^2$$

Velikost průřezového modulu obdélníkového průřezu je podle vztahu (8.49) rovna

$$W = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2 = \frac{1}{6} \cdot b \cdot (D^2 - b^2)$$

Maximální hodnotu průřezového modulu bude mít trám s takovou šířkou b , pro níž je derivace průřezového modulu podle šířky b nulová, tedy když bude platit podmínka

$$\frac{dW}{db} = \frac{1}{6} \cdot (D^2 - 3 \cdot b^2) = 0 \quad b = \frac{D}{\sqrt{3}}$$

Této šířce odpovídá výška trámu

$$h = \sqrt{D^2 - b^2} = \sqrt{D^2 - \frac{D^2}{3}} = D \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Dostáváme tak výsledek, že nejvýhodnější poměr šířky k výšce průřezu, při kterém získáváme největší únosnost na ohybový moment, je

$$\frac{b}{h} = \frac{D \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}}{D \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,707 \cong 5 : 7$$

Příklad 8.4.4.

Jaký by musel být spád střechy, aby vaznice ve tvaru Z průřezu uvedená na obrázku 8.34 byla namáhána prostým ohybem. Zatížení působí svisle (vlastní tíha a tíha střešní konstrukce, sníh ...), rovněž reakce podpor jsou svislé.

Řešení: Podle definice nastává prostý ohyb tehdy, když rovina ohybového momentu obsahuje hlavní centrální osu setrvačnosti průřezu.

Průřez je středově souměrný, takže těžiště průřezu se nachází ve středu souměrnosti. Určíme proto nejprve momenty setrvačnosti a deviační moment k centrálním osám X, Z rovnoběžným se stranami průřezu. Průřez si můžeme pro výpočet rozložit na tři obdélníky a jejich momenty setrvačnosti určit pomocí Steinerovy věty. Dostáváme

$$I_{x,1} = \frac{1}{12} \cdot 0,01 \cdot 0,2^3 = 6,667 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

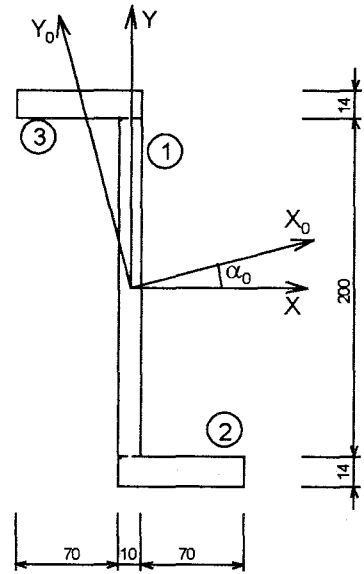
$$I_{x,2} = I_{x,3} = \frac{1}{12} \cdot 0,07 \cdot 0,014^3 + 0,07 \cdot 0,014 \cdot (0,1 + 0,007)^2 = 1,601 \cdot 10^{-8} + 1,122 \cdot 10^{-5} = 1,1236 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_x = 6,667 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 1,1236 \cdot 10^{-5} = 2,91387 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_{y,1} = \frac{1}{12} \cdot 0,2 \cdot 0,01^3 = 1,667 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$I_{y,2} = I_{y,3} = \frac{1}{12} \cdot 0,014 \cdot 0,07^3 + 0,07 \cdot 0,014 \cdot (0,04 - 0,005)^2 = 4,002 \cdot 10^{-7} + 1,2005 \cdot 10^{-6} = 1,6007 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_y = 1,667 \cdot 10^{-8} + 2 \cdot 1,6007 \cdot 10^{-6} = 3,218 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

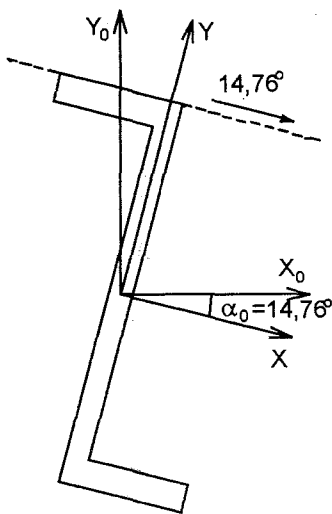


Obr. 8.34. Svařovaný Z průřez.

$$I_{xy,1} = 0$$

$$I_{xy,2} = I_{xy,3} = -0,07 \cdot 0,014 \cdot (0,1 + 0,007) \cdot (0,04 - 0,005) = -3,6701 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_{xy} = 2 \cdot (-3,6701 \cdot 10^{-6}) = -7,3402 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$



Obr. 8.35. Vaznice průřezu Z.

Úhel α_0 hlavních centrálních os setrvačnosti průřezu se potom bude rovnat

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2 \cdot (-7,3402 \cdot 10^{-6})}{2,91387 \cdot 10^{-5} - 3,218 \cdot 10^{-6}} = 0,5664$$

$$2\alpha_0 = 29,52^\circ$$

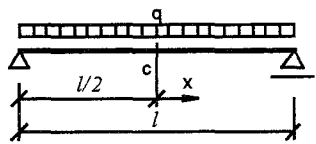
$$\alpha_0 = 14,76^\circ$$

Hlavní centrální osy setrvačnosti průřezu jsou tedy odkloněny o úhel $14,64^\circ$.

Aby byl průřez pře zatížení ve svislé rovině namáhán prostým ohybem, musí být od svislé pootočen právě o úhel $14,76^\circ$ a takovýto úhel musí mít také spád střechy. Pootočení profilu je ukázáno na obrázku 8.35.

Příklad 8.4.5.

Určete rozložení plastických oblastí v prostém nosníku obdélníkového průřezu s šířkou b a výškou h , který je zatížen plným rovnoměrným zatížením takové intenzity, že ve středu nosníku vzniká plastický kloub (viz obr. 8.36).



Obr. 8.36. Prostý nosník.

Řešení: Průběh ohybových momentů na prostém nosníku od plného rovnoměrného zatížení je pro souřadný systém

s počátkem ve středu nosníku roven

$$M = \frac{1}{2} \cdot q \cdot \left(\frac{\ell^2}{4} - x^2 \right)$$

a maximální ohybový moment se nachází ve středu rozpětí a je roven

$$M_c = \frac{1}{8} \cdot q \cdot \ell^2$$

Tento ohybový moment musí být roven ohybovému momentu M_t na mezi plastické únosnosti, takže podle (8.57) a (8.59) je

$$\frac{1}{8} \cdot q \cdot \ell^2 = \frac{1}{4} \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_t$$

a intenzita zatížení, při které v nosníku vzniká plastický kloub, je

$$q = \frac{2 \cdot b \cdot h^2}{\ell^2} \cdot \sigma_t$$

Po dosazení do rovnice ohybového momentu dostáváme

$$M = \frac{1}{4} \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_t \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot x^2}{\ell^2}\right)$$

Výška plastické oblasti v průřezu je dána vztahem (8.55), takže platí

$$M = \sigma_t \cdot \left(2 \cdot U_{III} + \frac{1}{\eta} \cdot I_{II}\right)$$

U obdélníka je statický moment části **III** a moment setrvačnosti části **II** (obr. 8.37) roven

$$U_{III} = b \cdot \left(\frac{h}{2} - \eta\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + \eta\right) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \left(\frac{h^2}{4} - \eta^2\right)$$

$$I_{II} = \frac{1}{12} \cdot b \cdot (2 \cdot \eta)^3$$

takže po dosazení do vztahu (8.55) dostáváme

$$M = \sigma_t \cdot \left[b \cdot \left(\frac{h^2}{4} - \eta^2\right) + \frac{2}{3} \cdot b \cdot \eta^2 \right] = b \cdot \sigma_t \cdot \left(\frac{h^2}{4} - \frac{\eta^2}{3}\right)$$

Po porovnání s výrazem pro ohybový moment na prostém nosníku dostáváme

$$\frac{1}{4} \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_t \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot x^2}{\ell^2}\right) = b \cdot \sigma_t \cdot \left(\frac{h^2}{4} - \frac{\eta^2}{3}\right)$$

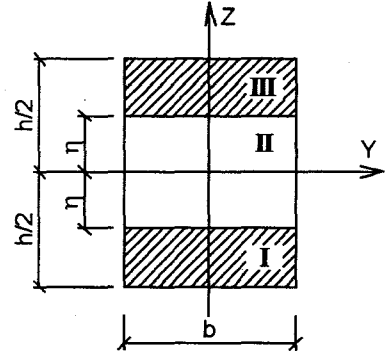
a odtud

$$\eta = \pm \sqrt{3} \cdot \frac{h}{\ell} \cdot x$$

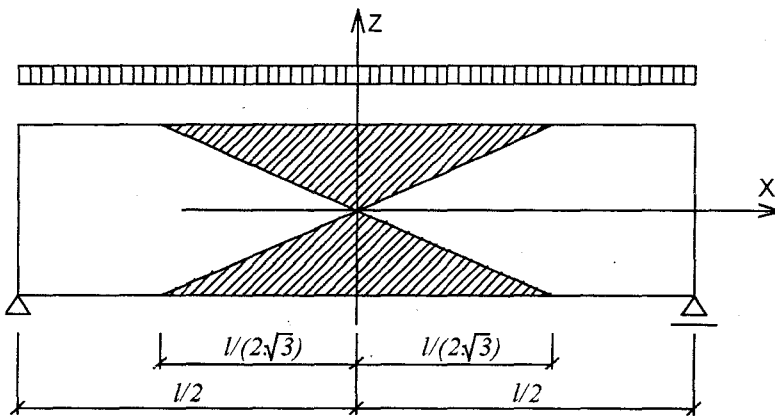
Plastická oblast zasahuje tak daleko, dokud je $\eta \leq h/2$, tedy

$$|x| \leq \frac{\ell}{2 \cdot \sqrt{3}}$$

Plastická oblast nosníku je vykreslena na obrázku 8.41.



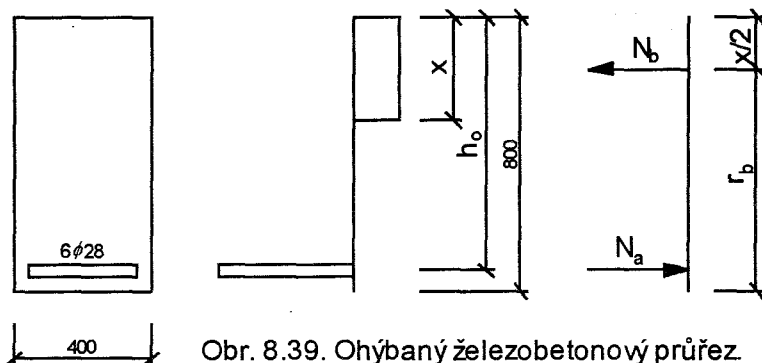
Obr. 8.37. Plastické oblasti obdélníka.



Obr. 8.38. Rozložení plastických oblastí na nosníku.

Příklad 8.4.6.

Vypočtete únosnost železobetonového nosníku obdélníkového průřezu o rozměrech 400 x 800 mm, vyztuženého šesti profily 28. Mezní napětí betonu v tlaku je 8 MPa, oceli 180 MPa. Výztuž je uložena v jedné vrstvě, krytí výztuže je 20 mm.



Obr. 8.39. Ohýbaný železobetonový průřez.

Řešení: Železobetonový obdélníkový průřez je vykreslen na obrázku 8.39. Účinná výška železobetonového průřezu (vzdálenost těžiště výztuže od tlačенého okraje betonu) je

$$h_0 = 800 - 20 - \frac{28}{2} = 766 \text{ mm}$$

Plocha výztuže, tj. 6 ↓ 28, se rovná

$$A_a = 6 \cdot \pi \cdot \frac{28^2}{4} = 3\,695 \text{ mm}^2$$

takže síla ve výztuži je

$$N_a = 3\,695 \cdot 180 = 665\,100 \text{ N} = 665,1 \text{ kN}$$

Ze vztahu (8.60) dostaneme výšku tlačенé oblasti betonu, která vychází

$$x = \frac{665\,100}{400 \cdot 8} = 207,85 \text{ mm}$$

a rameno vnitřních sil tedy je

$$r_b = 766 - \frac{207,85}{2} = 662,08 \text{ mm}$$

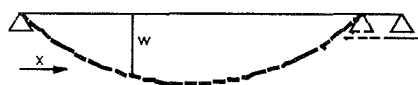
Ohybový moment na mezi únosnosti získáme je podle vztahu (8.61) roven součinu tahové síly ve výztuži a ramene vnitřních sil, takže dostáváme

$$M_R = 665,1 \cdot 662,08 = 440\,349,4 \text{ kNmm} \cong 440,35 \text{ kNm}$$

8.5. Ohybová čára za prostého ohybu

Podle přijaté hypotézy o deformaci prvku ohybem zůstávají rovinné průřezy i po deformaci rovinnými, avšak natáčejí se. Přímá vlákna k nim kolmá se zakřívují. Při prostém ohybu hlavní centrální osy setrvačnosti všech průřezů leží v rovině vnějších sil, která také obsahuje osu nosníku (spojnici těžišť všech průřezů). Druhá hlavní centrální osa setrvačnosti je v každém průřezu osou neutrální. Aby se neporušila rovnováha, musí rovina vnějších sil i po přetvoření obsahovat výslednici vnitřních sil, a tedy také osu nosníku. Přetvořené ose nosníku říkáme ohybová čára. Je to rovinná křivka. Určení deformace nosníku namáhaného na ohyb záleží ve výpočtu ohybové čáry. Známe-li ji, najdeme polohu kteréhokoliv bodu nosníku po přetvoření pomocí předpokladů, jež jsme zavedli o deformaci za ohybu. Tyto předpoklady se vcelku u pružných látek experimentálně potvrzují, pokud není poměr výšky průřezu k rozpětí nosníku větší než asi jedna ku pěti, což bývá v praxi splněno. Vlivu posouvajících sil na přetvoření obvykle nedbáme (předpokládáme čistý ohyb). Tento předpoklad se se skutečností rozchází hrubě jen u krátkých nosníků (poměr výšky nosníku k rozpětí je v rozmezí jedna ku pěti až jedna ku dvěma), dále u nosníků úzkých a vysokých nebo u těch, jejichž průřez se náhle mění. Jestliže výška nosníku je větší než přibližně polovina rozpětí, potom pro takovéto případy není teorie prostého ohybu vhodná, ale je třeba vyšetřovat je jako tzv. nosné stěny.

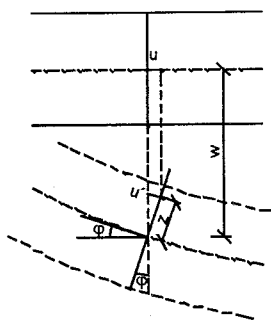
V teorii prostého ohybu nosníku také předpokládáme, že je zhotoven z pružného materiálu, jehož chování se řídí Hookeovým zákonem. Dalším předpokladem je, že kolmo k ose nepůsobí žádná normálová napětí; v opačném případě by bylo třeba aplikovat zobecněný Hookeův zákon. I tato přibližnost je dovolená a můžeme ji posoudit, představíme-li si, že např. na horním povrchu trávu nepatrné šířky jen 0,1 m vzniká od zatížení 10 kN/m² svislé normálové napětí $\sigma_z = -0,1$ MPa, což je i v tomto nepříznivém případě oproti normálovým napětím, která vznikají v podélných vláknech hospodárně navržených nosníků, u všech stavebních látek zanedbatelné. Nepřihlíží se ani k vlivu zkrácení osy. Neutrální osa při prostém ohybu protíná osu, délka ohybové čáry je tedy stejná jako délka nepřetvořené osy. Protože ale nejkratším spojením podporových bodů je přímá osa, nemohou podpory zůstat po přetvoření ve stejné poloze, ale posuvná podpora se musí přiblížit k pevnému kloubu (obr. 8.40).



Obr. 8.40. Pohyb posuvné podpory při ohybu nosníku.

Proto je pohyblivost jedné podpory nutná. Avšak při výpočtu ohybové čáry toho v klasické pružnosti nedbáme a počítáme jen pořadnice ohybové čáry jako odchylky těžišť z původní polohy v rovinách nepřetvořených řezů, určujeme tedy ohybovou čáru jako $w=w(x)$.

Označme posunutí obecného bodu nosníku ve směru podélné osy X jako u , posunutí ve směru deformované osy jako u' . Z předpokladu rovinnosti kolmých průřezů po deformaci



Obr. 8.41. Prostý ohyb nosníku.

vyplývá, že u' se po průřezu mění lineárně, a při prostém ohybu v rovině XZ je u na souřadnici y nezávislé. Označíme-li úhel mezi původní rovinou průřezu a rovinou průřezu po deformaci jako φ (obr.8.41), můžeme posunutí u' vyjádřit vztahem

$$u' = z \cdot \operatorname{tg} \varphi \cong z \cdot \varphi \quad (8.66)$$

Ale protože dále podle Navierovy hypotéza předpokládáme, že průřezy zůstanou po deformaci kolmé k deformované střednici (průhyb střednice jsme označili w), je úhel φ současně úhlem mezi

ohybovou čarou a osou X , tedy platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dw}{dx} \quad (8.67)$$

U stavebních konstrukcí jsou průhyby velmi malé, je tedy malé i pootočení φ . Můžeme proto předpokládat, že vodorovné posunutí u je přibližně rovno u'

$$u = u' \cdot \cos \varphi$$

$$u = u' (1 - \varphi^2 + \varphi^4 - \dots) \cong u'$$

Dosadíme-li vztah (8.67) do rovnice (8.66) a nahradíme-li posunutí u' přibližně posunutím u , dostáváme

$$u = z \cdot \frac{dw}{dx} \quad (8.68)$$

Pro relativní protažení platí při prostém ohybu vztah (8.44). Relativní protažení je definováno jako podíl prodloužení vláken a původní délky vláken, tj.

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta u}{dx} \cong \frac{du}{dx} \quad (8.69)$$

Po derivování vztahu (8.68) podle x , dosazení du/dx do vztahu (8.69) a za ε_x do vztahu (8.44) dostáváme diferenciální rovnici ohybové čáry

$$-\frac{M_y \cdot z}{E \cdot I_y} = \varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \left(z \cdot \frac{dw}{dx} \right) = z \cdot \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{E \cdot I_y} \quad (8.70)$$

Rovnice (8.70) představuje diferenciální rovnici druhého řádu pro výpočet ohybové čáry. Tuto diferenciální rovnici můžeme dvakrát integrovat a dostaneme postupně

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{E \cdot I_y}$$

$$\frac{dw}{dx} = -\int \frac{M_y}{E \cdot I_y} dx + C_1$$

$$w = -\iint \frac{M_y}{E \cdot I_y} dx^2 + C_1 \cdot x + C_2 \quad (8.71)$$

Rovnici (8.71) můžeme psát v úseku, v němž je možno zlomek $M_y/(E.I_y)$ vyjádřit jedinou funkcí. Je tedy třeba pro výpočet ohybové čáry rozdělit nosník na integrační intervaly. Intervaly musí být voleny tak, aby uvnitř žádného intervalu nebyl žádný bod, v němž se mění rovnice ohybového momentu, momentu setrvačnosti nebo modulu pružnosti. Nesmí být tedy uvnitř intervalů působíště osamělých břemen nebo osamělých momentů, začátek nebo konec rovnoměrného zatížení, začátek nebo konec náběhu, místa náhlé změny momentu setrvačnosti ...

Máme-li n integračních intervalů, dostaneme při vyjádření průhybů celkem $2n$ integračních konstant, v každém intervalu dvě. Integrační konstanty určíme pomocí okrajových podmínek, to je podmínek na koncích nosníku a podmínek spojitosti ohybové čáry, které jsou pro jednotlivé typy okrajů tyto:

- a) v místě kloubové nebo posuvné podpory je průhyb nulový, tj.

$$w = 0 \quad (8.72)$$

- b) v místě vetknutí je průhyb a pootočení nulové, tj.

$$w = 0 \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad (8.73)$$

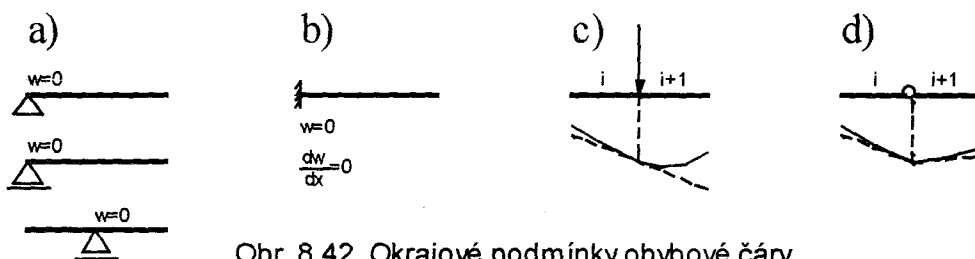
- c) na rozhraní mezi i -tým a $i+1$ intervalem je ohybová čára spojitá a spojitě jsou i první derivace ohybové čáry, tj.

$$w_i = w_{i+1} \quad \left(\frac{dw}{dx}\right)_i = \left(\frac{dw}{dx}\right)_{i+1} \quad (8.74)$$

- d) v místě vnitřního kloubu mezi i -tým a $i+1$ intervalem je ohybová čára spojitá, tj.

$$w_i = w_{i+1} \quad (8.75)$$

Typy okrajů a) až d) jsou vykresleny na obrázku 8.42.



Obr. 8.42. Okrajové podmínky ohybové čáry.

U nosníků symetrických a symetricky zatížených je i ohybová čára symetrická. Symetrie funkce znamená, že na ose symetrie jsou všechny liché derivace funkce nulové. Můžeme tedy u symetrických konstrukcí řešit pouze polovinu nosníku a na ose symetrie psát krajovou podmínku ve tvaru

$$\text{sym:} \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad (8.76)$$

Při řešení ohybové čáry konstrukcí staticky určitých dostáváme tolik okrajových podmínek, kolik je na konstrukci integračních konstant ohybové čáry. Tím je vyjádřeno, že konstrukce staticky určité jsou současně i tvarově určité. U konstrukcí staticky přeuročitých (tvarově neurčitých) dostáváme menší počet rovnic, než je počet integračních konstant - integrační konstanty nelze určit. U konstrukcí staticky neurčitých (tvarově přeuročitých) je počet rovnic větší než počet integračních podmínek, je větší o stupeň statické neurčitosti. Pro stanovení reakcí ze statických podmínek rovnováhy nám právě toto množství rovnic chybělo. Můžeme tedy pomocí diferenciální rovnice ohybové čáry řešit nejen ohybovou čáru konstrukcí staticky určitých a neurčitých, ale i reakce a průběhy vnitřních sil na konstrukcích staticky neurčitých.

Při výpočtu ohybové čáry není nutné zachovávat stejný souřadnicový systém pro všechny intervaly, dokonce je možno uvažovat v některých intervalech souřadnicový systém

$$x' = \ell - x$$

zprava. Je ovšem třeba dát pozor při dosazování souřadnic do okrajových podmínek, abychom v intervalu uvažovali souřadnice vztažené k použitému souřadnicovému systému, a dále na to, že platí

$$dx' = -dx \qquad \frac{dw}{dx'} = -\frac{dw}{dx} \qquad (8.77)$$

Počet integračních konstant je roven dvojnásobku počtu intervalů, což vždy nebývá malé číslo. Na příklad při výpočtu ohybové čáry na prostém nosníku zatíženém čtyřmi osamělými břemeny je pět integračních intervalů a musíme tedy řešit soustavu deseti lineárních rovnic o deseti neznámých. Této nepříjemné záležitosti se můžeme na nosníku konstantního průřezu vyhnout, využijeme-li Clebschovo řešení. Tento postup redukuje počet integračních konstant na dvě tím, že jednotlivé členy funkce ohybových momentů vyjadřuje různými, vhodně volenými parametry.

Jiná možnost, jak se vyhnout při stanovování průhybů řešení velké soustavy lineárních rovnic, je Mohrův způsob. Tento způsob určování ohybové čáry umožňuje řešit ji graficky, používá se ho však výhodně i pro početní řešení. Postup se zakládá na analogických vztazích mezi průhybem o ohybovým momentem na jedné straně a ohybovým momentem a zatížením na straně druhé. Závislosti ohybového momentu a posouvající síly na spojitěm zatížení byly odvozeny v odstavci 6.1, kde jsou uvedeny jako vztahy (6.3) až (6.5)

$$\frac{dT}{dx} = -p_i(x) \qquad \frac{dM}{dx} = T \qquad \frac{d^2M}{dx^2} = -p_i(x)$$

a vedle toho známe závislosti (8.67) a (8.70), které je možno psát ve tvaru

$$\frac{dw}{dx} = \varphi \qquad \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

Ze srovnání obou diferenciálních rovnic vidíme, že je možno získat ohybovou čáru w ze zatížení podílem M/EI stejným způsobem, jako umíme získat ohybové momenty M ze spojitěho

zatížení q - diferenciální rovnice jsou analogické. Pomocí Mohrovy metody tedy stanovíme ohybovou čáru jako momentovou (výslednicovou) čáru ke spojitému zatížení, jehož intenzita je dána pořadnicemi ohybového momentu redukovanými tuhostí nosníku EI . Avšak tím není ještě ohybová čára zcela určena, protože každá diferenciální rovnice má nekonečně mnoho řešení, lišících se hodnotami integračních konstant. Tyto integrační konstanty určujeme pomocí okrajových podmínek a je tedy třeba zajistit, aby okrajové podmínky pro výslednicovou čáru, která modeluje průhyb, byly stejné jako okrajové podmínky ohybové čáry.

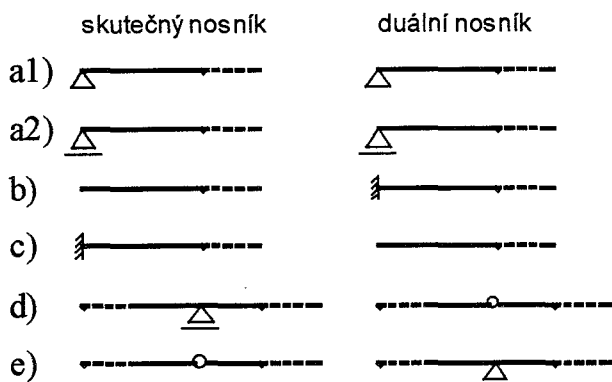
Veličiny, které si v analogii vzájemně odpovídají, vyplývají ze srovnání diferenciálních rovnic:

$$\begin{array}{ccc}
 w & \longleftrightarrow & M \\
 \frac{M}{EI} & \longleftrightarrow & q \\
 \varphi = \frac{dw}{dx} & \longleftrightarrow & T = \frac{dM}{dx}
 \end{array}$$

Jak z těchto srovnání vyplývá, prostý nosník bez převislých konců můžeme ponechat beze změny i pro řešení ohybové čáry jako výslednicové čáry, protože na obou koncích prostého nosníku jsou průhyby nulové a současně tam jsou i ohybové momenty nulové. Jiná je situace u konzoly. Tam požadujeme, aby ve vetknutí byly průhyb w a pootočení φ nulové, ale ohybový moment a posouvající síla ve vetknutí nulové nejsou (ve většině případů), zato jsou nulové na volném konci. Je tedy třeba při řešení ohybové čáry konzoly jako výslednicové čáry od zatížení redukovaným momentovým obrazcem zaměnit pro toto řešení volný konec za vetknutí a naopak vetknutí za volný konec. Řešíme-li ohybovou čáru nosníku s převislým koncem, potom obdobně jako u konzoly zaměňujeme volný konec vetknutím. V místě mezilehlé podpory potřebujeme, aby průhyb byl nulový a pootočení vlevo a vpravo od podpory bylo stejné. A podporou, která zajišťuje nulový ohybový moment a stejnou posouvající sílu zleva i zprava je vnitřní kloub. Naopak při řešení ohybové čáry v okolí vnitřního kloubu na nosníku je třeba, aby průhyb nalevo i napravo byl stejný, pootočení může být různé. Nahrazujeme tedy vnitřní kloub mezilehlou podporou, u níž je ohybový moment vlevo a vpravo stejný a posouvající síla se může lišit (o velikost reakce v podpoře).

Takovýto nosník, jímž nahrazujeme původní nosník při řešení ohybové čáry jako výslednicové čáry, nazýváme duální (sdružený) nosník. Duální nosník, jak bylo probráno výše, vytváříme tak, že

- kloubovou nebo posuvnou podporu na konci nosníku ponecháme beze změny
- volný konec nahradíme vetknutím
- vetknutí nahradíme volným koncem
- mezilehlou podporu nahradíme vnitřním kloubem
- vnitřní kloub nahradíme mezilehlou podporou



Obr. 8.43. Skutečný a duální nosník.

Podpory původního nosníku a jemu odpovídajícího duálního nosníku jsou uvedeny na obrázku 8.43.

Je-li původní nosník staticky určitý, je staticky určitý i duální nosník (vodorovné reakce jsou vesměs nulové a pro stanovení statické určitosti proto uvažujeme pouze jedinou vazbu přenášející vodorovnou sílu). Jestliže původní nosník je

staticky neurčitý, potom duální nosník je staticky přeuročitý, tedy tvarově neurčitý. Ale redukované ohybové momenty na původním nosníku, které tvoří zatížení duálního nosníku, jsou u staticky neurčitých konstrukcí vždy takové, že je na duálním nosníku zajištěna statická rovnováha; můžeme tedy duální nosník doplnit na staticky určitý dalšími podporami, ve kterých budou automaticky nulové reakce.

Metoda určování ohybové čáry z momentů redukovaných momentových ploch se zakládá na Mohrových větách:

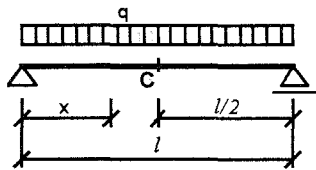
První věta Mohrova: Pootočení střednice skutečného nosníku je rovno posouvající síle na duálním nosníku od zatížení ohybovými momenty redukovanými tuhostí nosníku EI .

Druhá věta Mohrova: Průhyb skutečného nosníku je roven ohybovému momentu na duálním nosníku od zatížení ohybovými momenty redukovanými tuhostí nosníku EI .

Pomocí Mohrových vět je možno určit průhyby a pootočení nosníku buďto poččetně, ale též graficky řešením výslednicové čáry od zatížení redukovanými momenty. U složitějších momentových obrazců nahrazujeme skutečný průběh ohybových momentů lomenou čarou a nahrazujeme tak spojitě zatížení soustavou náhradních břemen.

Příklad 8.5.1.

Vypočtete průhyb uprostřed prostého nosníku délky l zatíženého po celé délce rovnoměrným zatížením intenzity q (obr. 8.44). Nosník má konstantní tuhost.



Obr. 8.44. Prostý nosník.

Řešení: Hodnota ohybového momentu v obecném průřezu vzdáleném x od podpory je rovna

$$M = \frac{1}{2} \cdot q \cdot x \cdot (\ell - x)$$

Po dosazení tohoto výrazu do vztahu (8.71) dostáváme rovnici ohybové čáry prostého nosníku ve tvaru

$$w = -\int dx \int \frac{1}{2} \cdot \frac{q \cdot x \cdot (\ell - x)}{EI} dx + C_1 \cdot x + C_2 = -\frac{q}{2EI} \cdot \left(\frac{\ell \cdot x^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + C_1 \cdot x + C_2$$

Hodnoty integračních konstant získáme z okrajových podmínek. Pro kloubovou i posuvnou podporu platí podmínky (8.72), tedy pro

$$x = 0 \quad \dots \quad w = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$x = \ell \quad \dots \quad w = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 \cdot \ell + C_2 = 0; \quad C_1 = \frac{1}{24} \cdot \frac{q \cdot \ell^3}{EI}$$

Po dosazení těchto hodnot integračních konstant nám vychází rovnice ohybové čáry

$$w = \frac{1}{24} \cdot \frac{q}{EI} \cdot x \cdot (\ell - x) \cdot (\ell^2 + \ell \cdot x - x^2)$$

a uprostřed rozpětí (pro $x = \ell/2$) je hodnota průhybu

$$w_c = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot \ell^4}{EI}$$

Příklad 8.5.2.

Určete průběh ohybových momentů a vypočítejte maximální průhyb přímého nosníku konstantní tuhosti, který je na jednom konci vetknutý a na druhém podepřen posuvně. Nosník je po celé délce zatížen rovnoměrným zatížením intenzity q .

Řešení: Nosník je jedenkrát staticky neurčitý, proto není možno určit reakce předem. Označme reakci v levé podpoře (posuvné) jako A (obr. 8.45). Potom v průřezu vzdáleném x od této podpory bude mít ohybový moment hodnotu

$$M = A \cdot x - \frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2$$

a po dosazení do vztahu (8.71) dostáváme

$$w = -\iint \frac{A \cdot x - \frac{1}{2} q \cdot x^2}{EI} dx^2 + C_1 \cdot x + C_2 = -\frac{A \cdot x^3}{6EI} + \frac{q \cdot x^4}{24EI} + C_1 \cdot x + C_2$$

V této rovnici pro průhyb máme tři neznámé - a to integrační konstanty C_1 a C_2 a reakci A . Tyto tři neznámé určíme z okrajových podmínek, jedna pro posuvnou podporu - (8.72), další dvě pro vetknutí - (8.73). Píšeme tedy

$$x = 0 \quad \dots \quad w = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$x = \ell \quad \dots \quad w = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{6} \cdot \frac{A \cdot \ell^3}{EI} + \frac{1}{24} \cdot \frac{q \cdot \ell^4}{EI} + C_1 \cdot \ell + C_2 = 0$$

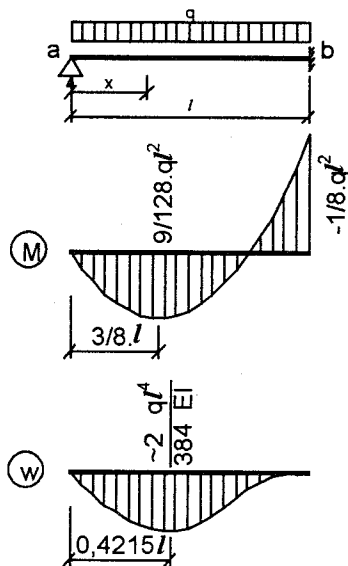
$$\frac{dw}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} \cdot \frac{A \cdot \ell^2}{EI} + \frac{1}{6} \cdot \frac{q \cdot \ell^3}{EI} + C_1 = 0$$

Tato soustava rovnic má řešení

$$C_1 = \frac{1}{48} \cdot \frac{q \cdot \ell^3}{EI} \qquad C_2 = 0 \qquad A = \frac{3}{8} \cdot q \cdot \ell$$

Rovnice ohybových momentů má tedy výsledný tvar

$$M = \frac{3}{8} \cdot q \cdot \ell \cdot x - \frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2$$



Obr. 8.45. Jednostranně vetknutý nosník.

Tato rovnice má extrém v místě $x_c=3/8 \cdot l$ a velikost tohoto extrému je

$$M_c = \frac{9}{128} \cdot q \cdot l^2 \cong \frac{1}{14} \cdot q \cdot l^2$$

Hodnota ohybového momentu ve vetknutí je

$$M_b = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l^2 - \frac{1}{2} \cdot q \cdot l^2 = -\frac{1}{8} \cdot q \cdot l^2$$

Velikost ohybového momentu ve vetknutí jednostranně vetknutého nosníku od plného rovnoměrného zatížení je tedy číselně rovna ohybovému momentu uprostřed stejně zatíženého prostého nosníku, ale má opačné znaménko.

Rovnici ohybové čáry získáme po dosazení konstant a po elementárních úpravách dostáváme

$$w = \frac{1}{48} \cdot \frac{q}{EI} \cdot x \cdot (l-x)^2 \cdot (l+2x)$$

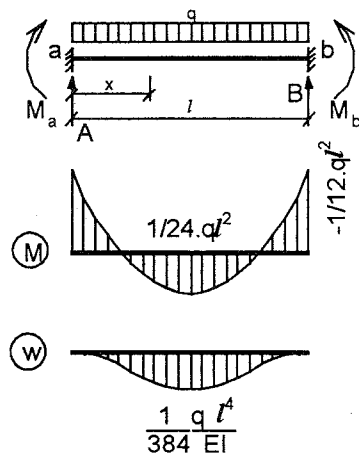
Místo, kde se nachází extrém průhybu, a jeho číselná velikost jsou

$$x = \frac{1 + \sqrt{33}}{16} \cdot l \cong 0,4215 \cdot l \qquad w_{\max} = 0,005416 \frac{q \cdot l^4}{EI} \cong \frac{2}{384} \frac{q \cdot l^4}{EI}$$

Vetkneme-li jeden konec nosníku, nezískáme tím žádnou úsporu na velikosti ohybových momentů, ale maximální průhyb se zmenší přibližně na 40 %.

Příklad 8.5.3.

Určete průběh ohybových momentů a vypočtete maximální průhyb přímého nosníku konstantní tuhosti, který je na obou koncích vetknut. Nosník je zatížen rovnoměrným zatížením po celé délce nosníku (obr. 8.46)



Obr. 8.46. Oboustranně vetknutý nosník.

Řešení: Protože vodorovné reakce neuvažujeme, je nosník dvakrát staticky neurčitý (místo druhého vetknutí uvažujeme posuvné vetknutí, tj. vazbu, která přenáší ohybové momenty a posouvající síly, ale nepřenáší normálové síly - odebírá tedy dva stupně volnosti). Je tedy nutno uvažovat na nosníku dvě nezávisle proměnné složky reakcí, např. sílu A a moment v levém vetknutí M_a . Ostatní reakce vyjádříme jako funkce těchto dvou neznámých. Ale protože tento nosník je symetrický a symetricky zatížený, musí být obě svislé složky reakcí A , B stejně veliké, rovné polovině zatížení nosníku $q/2$, a na nosníku zůstává jediná staticky neurčitá veličina M_a . Průběh

ohybových momentů bude potom vyjádřen funkcí

$$M = M_a + A \cdot x - \frac{1}{2} q \cdot x^2 = M_a + \frac{1}{2} q \cdot x \cdot (l-x)$$

Dosadíme-li nyní tento výraz pro ohybový moment do rovnice (8.71), dostáváme rovnici ohybové čáry

$$w = -\iint \frac{M_a + \frac{1}{2}q \cdot x \cdot (\ell - x)}{EI} dx^2 + C_1 \cdot x + C_2 =$$

$$= -\frac{M_a}{2EI} \cdot x^2 - \frac{q}{2EI} \cdot \left(\frac{\ell \cdot x^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + C_1 \cdot x + C_2$$

Neznámé C_1 , C_2 , M_a určíme z okrajových podmínek pro vetknutí (8.73) a můžeme též použít podmínky pro symetrii (8.76). Podmínky pro pravé vetknutí jsou podmínkami symetrie nahrazeny. Dostáváme

$$x = 0 \quad \dots \quad w = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\frac{dw}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$x = \frac{\ell}{2} \quad \dots \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{M_a}{EI} \cdot \frac{\ell}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\ell^2}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^3}{8} \right) + C_1 \cdot \frac{\ell}{2} + C_2 = 0$$

$$M_a = -\frac{1}{12}q \cdot \ell^2$$

Hodnota M_a představuje ohybový moment ve vetknutí oboustranně vetknutého nosníku, je o třetinu menší než u prostého nosníku i nosníku jednostranně vetknutého. Vzhledem k symetrii je maximální mezipodporový ohybový moment uprostřed rozpětí nosníku, jeho velikost je

$$M_c = -\frac{1}{12}q \cdot \ell^2 + \frac{1}{2}q \cdot \frac{\ell}{2} \left(\ell - \frac{\ell}{2} \right) = +\frac{1}{24}q \cdot \ell^2$$

Rovnici ohybové čáry dostaneme po dosazení vypočtených konstant. Dostáváme

$$w = \frac{1}{24} \cdot \frac{q}{EI} \cdot \ell^2 \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{EI} \cdot \left(\frac{\ell \cdot x^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) = \frac{1}{24} \cdot \frac{q}{EI} \cdot x^2 \cdot (\ell - x)^2$$

Rovnice má extrém, jak vyplývá ze symetrie, uprostřed rozpětí. Hodnota tohoto extrému je

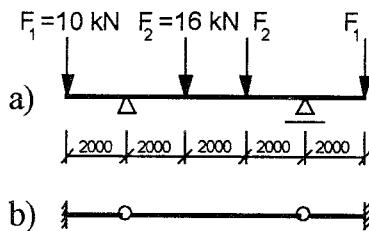
$$w = \frac{1}{24} \cdot \frac{q}{EI} \cdot \left(\frac{\ell}{2} \right)^4 = \frac{1}{384} \cdot \frac{q \cdot \ell^4}{EI}$$

Příklad 8.5.4.

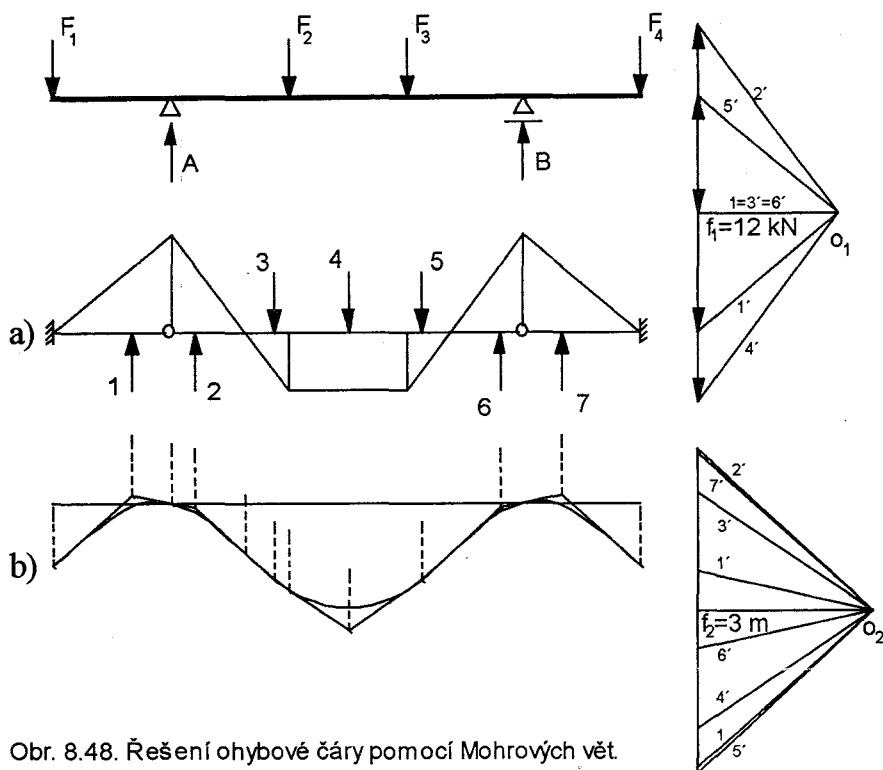
Stanovte ohybovou čáru na nosníku s převislými konci. Nosník je konstantní tuhosti a je zatížen čtyřmi osamělými břemeny (obr. 8.47a).

Grafické řešení: Ohybovou čáru graficky určíme pomocí Mohrových vět jako průběh ohybových momentů na duálním nosníku od zatížení redukovaným momentovým obrazcem. Duální nosník k nosníku s převislými konci je uveden na obrázku

8.47b. Volné konce jsou zaměněny vetknutími a mezilehlé podpory vnitřními klouby.



Obr. 8.47. Nosník s převislými konci a duální nosník.



Obr. 8.48. Řešení ohybové čáry pomocí Mohrových vět.

Vlastní řešení průběhu ohybových momentů na skutečném nosníku je uvedeno na obrázku 8.48a. Břemena včetně reakcí jsou srovnána do složkového obrazce v tom pořadí, v jakém na nosník působí, tedy $F_1, A, F_2, F_2', B, F_1'$. Protože nosník i zatížení jsou symetrické, budou i reakce symetrické, každá o velikosti 26 kN. Pól

volíme proti počátku první síly ve vzdálenosti f_1 . Označíme-li momentové pořadnice jako η , pak hodnoty ohybových momentů jsou $M_i = f_1 \cdot \eta_i$.

Zatížení dané momentovým obrazcem (obr. 8.48b) vynášíme ve druhém složkovém obrazci uvedením momentových ploch na společnou půdici e . Takto bereme úseky $\eta_i/e = M_i/(f_1 \cdot e)$ místo redukovaných $M_i/(EI)$, jsou tedy „síly“ ve druhém složkovém obrazci $f_1 \cdot e/(EI)$ násobkem správných hodnot. K tomuto složkovému obrazci pak rýsujeme druhou výslednicovou čáru s pólovou vzdáleností f_2 a získáme momentové pořadnice w' . Součin $f_2 \cdot w'$ pak dává ohybový moment k zatížení danému druhým složkovým obrazcem. Kdyby složkový obrazec zobrazoval zatížení $M_i/(EI)$, bylo by podle Mohrových vět $f_2 \cdot w' = w$. Popsanou konstrukcí tedy vyjde $w = w' \cdot (e \cdot f_1 \cdot f_2)/(EI)$, a číslem $(e \cdot f_1 \cdot f_2)/(EI)$ je třeba násobit pořadnice čáry průhybu měřené v měřítku délek, abychom dostali skutečný průhyb. Přitom pólovou vzdálenost f_1 měříme v měřítku sil, pólovou vzdálenost f_2 v měřítku délek.

Početní řešení: Použijeme opět Mohrových vět. Protože reakce jsou stejně veliké a jejich velikost je $A=B=26$ kN, jsou hodnoty ohybových momentů (obr. 8.49)

$$M_c = M_f = 0 \qquad M_a = M_b = -F_1 \cdot 2 = -20 \text{ kNm}$$

$$M_d = M_e = -F_1 \cdot 4 + A \cdot 2 = +12 \text{ kNm}$$

Od tohoto zatížení lomeného tuhostí nosníku vypočteme ohybové momenty na duálním nosníku. Protože i tento nosník je symetrický a symetricky zatížený, budou reakce v podporách vloženého pole stejně veliké a rovné polovině zatížení tohoto pole

$$A^* = B^* = \frac{1}{2} \cdot \left[2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{M_a}{EI} + \frac{M_d}{EI} \right) + 2 \cdot \frac{M_d}{EI} \right] = \frac{M_a}{EI} + 2 \cdot \frac{M_d}{EI} = \frac{4}{EI}$$

V poli **ad** má ohybový moment nulovou pořadnici v místě, které je od bodu **a** vzdáleno o

$$x = \frac{20}{20+12} \cdot 2 = 1,25 \text{ m}$$

Průhyb v bodě **g** nyní získáme jako ohybový moment na duálním nosníku od zatížení redukovaným momentovým obrazcem a ten je roven

$$\begin{aligned} w_g &= \frac{4}{EI} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot \frac{20}{EI} \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \cdot 1,25\right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot \frac{12}{EI} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot 0,75\right) - \frac{12}{EI} \cdot 1 \cdot 0,5 = \\ &= \frac{32,67}{EI} \end{aligned}$$

kde **E** je modul pružnosti v kPa a **I** moment setrvačnosti v m⁴.

Grafickým řešením jsme získali výsledek $w'=1,7$ m. Této hodnotě odpovídá průhyb o velikosti

$$w = w' \cdot \frac{e \cdot f_1 \cdot f_2}{EI} = 1,8 \cdot \frac{0,5 \cdot 12 \cdot 3}{EI} = \frac{32,4}{EI}$$

což je výsledek, který se s požadovanou přesností shoduje s početním řešením.

Příklad 8.5.5.

Určete průhyb volného konce konzoly proměnného průřezu, zatížené rovnoměrným zatížením (obr. 8.50). Konzola je zhotovena ze železového betonu s modulem pružnosti $E=20\,000$ MPa, šířka konzoly je 0,2 m.

Řešení: Průběh ohybových momentů na konzole zatížené rovnoměrným zatížením je

$$M = -\frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2$$

Rovnice výšky konzoly je

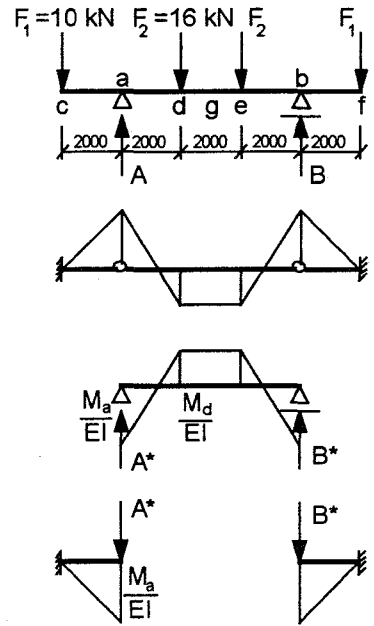
$$h = 0,4 + \frac{0,4}{2} \cdot x$$

a moment setrvačnosti se mění podle rovnice

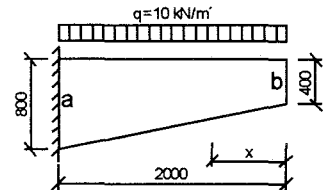
$$I = \frac{1}{12} b \cdot h^3 = \frac{b}{12} \cdot (0,4 + 0,2 \cdot x)^3$$

Diferenciální rovnice ohybové čáry je

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$



Obr. 8.49. Početní řešení průhybu pomocí Mohrových vět.



Obr. 8.50. Konzola proměnného průřezu.

což po dosazení dává

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{-\frac{1}{2}q \cdot x^2}{E \cdot \frac{b}{12} \cdot (0,4 + 0,2 \cdot x)^3} = \frac{750 \cdot q}{E \cdot b} \cdot \frac{x^2}{(x+2)^3}$$

Dvojit integrací postupně dostáváme

$$\frac{dw}{dx} = \int \frac{750q}{Eb} \cdot \frac{x^2}{(x+2)^3} dx + C_1 = \frac{750q}{Eb} \cdot \left[\ln(x+2) + \frac{4x+6}{(x+2)^2} \right] + C_1$$

$$\begin{aligned} w &= \int \frac{750q}{Eb} \cdot \left[\ln(x+2) + \frac{4x+6}{(x+2)^2} \right] dx + C_1 \cdot x + C_2 = \\ &= \frac{750q}{Eb} \cdot \left[(x+6) \cdot \ln(x+2) - \frac{x^2+4x+2}{x+2} \right] + C_1 \cdot x + C_2 \end{aligned}$$

Okrajové podmínky pro vetknutí jsou

$$\begin{aligned} x = 2 \quad \dots \quad w &= 0 \\ \frac{dw}{dx} &= 0 \end{aligned}$$

což dosazením do rovnice průhybu a první derivace průhybu podle x dává rovnice

$$0 = \frac{750q}{Eb} \cdot \left[8 \cdot \ln 4 - \frac{2^2 + 4 \cdot 2 + 2}{2+2} \right] + 2C_1 + C_2$$

$$0 = \frac{750q}{Eb} \cdot \left[\ln 4 + \frac{4 \cdot 2 + 6}{(2+2)^2} \right] + C_1$$

a odtud dostáváme hodnoty integračních konstant

$$C_1 = -\frac{750q}{Eb} \cdot (\ln 4 + 0,875)$$

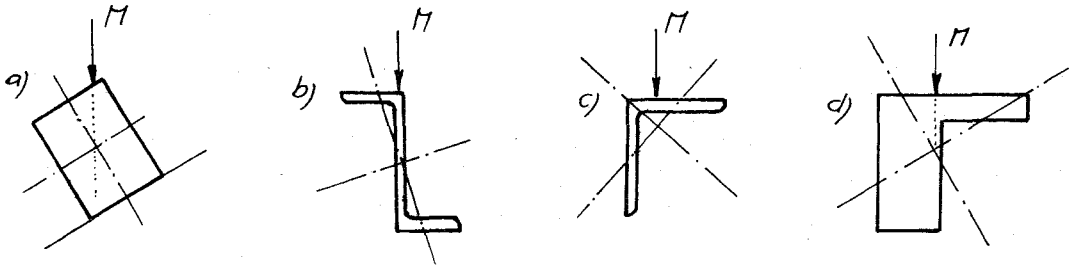
$$C_2 = -\frac{750q}{Eb} \cdot (8 \cdot \ln 4 - 3,5 - 2 \cdot \ln 4 - 1,75) = -\frac{750q}{Eb} \cdot (6 \cdot \ln 4 - 5,25)$$

Průhyb volného konce, tj. pro $x=0$, je po dosazení roven

$$\begin{aligned} w_b &= \frac{750q}{Eb} \cdot (6 \cdot \ln 2 - 1) + C_2 = \frac{750q}{Eb} \cdot (6 \cdot \ln 2 - 1 - 6 \cdot \ln 4 + 5,25) = \\ &= \frac{750q}{Eb} \cdot (4,25 - 6 \cdot \ln 2) = \frac{750 \cdot 0,01}{20\,000 \cdot 0,2} \cdot (4,25 - 6 \cdot \ln 2) = 1,708 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,1708 \text{ mm} \end{aligned}$$

8.6. Šikmý ohyb.

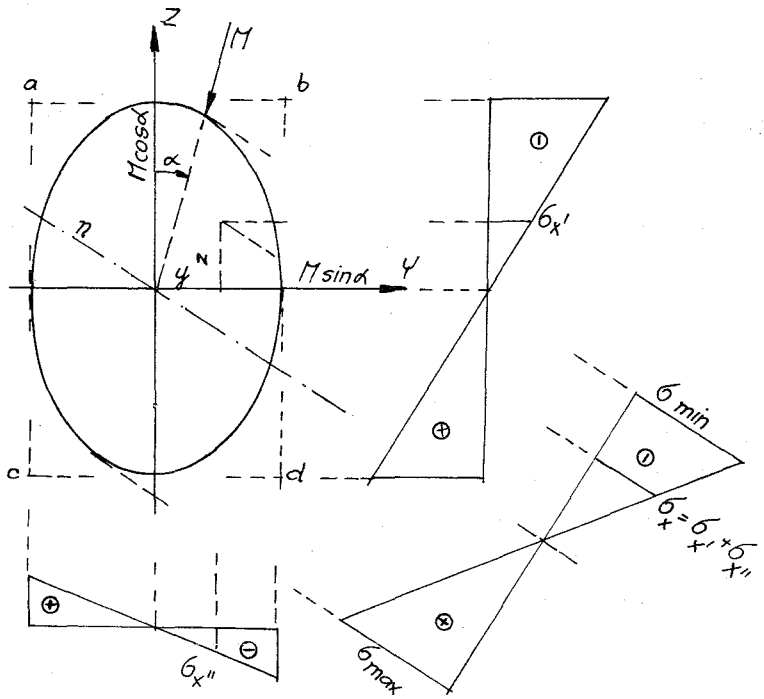
V předcházejících odstavcích byl vyšetřován prostý ohyb, za něhož rovina zatížení obsahuje jednu z hlavních centrálních os setrvačnosti průřezu. Tak je tomu např. u symetrických symetricky zatížených nosníků. Ve stavební praxi se však vyskytují také nosníky namáhané vnějšími silami, jejichž rovina procházející osou přímého trámu má vzhledem k ose nosníku obecný směr, je tedy k hlavním centrálním osám setrvačnosti skloněna. Tento případ, nazývaný šikmý ohyb, se vyskytuje např. u vaznic, které jsou uloženy na šikmé střešní rovině



Obr. 8.51. Případy šikmého ohybu.

(obr. 8.51a). Ale šikmý ohyb se může vyskytnout též u nosníků uložených na vodorovné rovině a zatížených svísele, pokud jsou hlavní centrální osy průřezu skloněny. Takovým případem jsou např. válcované průřezy (obr. 8.51b), úhelníky (obr. 8.51c), jednostranné průřezy (obr. 8.51d) apod.

Šikmý ohyb řešíme nejvýhodněji rozkladem na dva prosté ohyby. V rovinách hlavních centrálních os setrvačnosti vyvolává ohybový moment vnějších sil prostý ohyb. Ztotožníme hlavní centrální osy setrvačnosti se souřadnými osami Y, Z (obr. 8.52). Svírá-li rovina vnějších sil obecně s osou Z úhel α , rozložíme ohybový moment M (nebo jeho vektor) v průřezu do složek $M_y = M \cdot \cos \alpha$, který otáčí kolem osy Y , a $M_z = M \cdot \sin \alpha$, který otáčí kolem osy Z . Účinky obou složek vyšetříme zvlášť a superponujeme je.



Obr. 8.52. Šikmý ohyb, rozklad na dva prosté ohyby.

Složka, která otáčí kolem osy Y , dává ve vláknech vzdálených z od osy Y napětí

$$\sigma_{x'} = - \frac{M \cos \alpha}{I_y} \cdot z,$$

kde I_y značí moment setrvačnosti k ose Y . Druhá složka ohybového momentu vyvolává ve vláknech vzdálených y od osy Z napětí

$$\sigma_{x''} = - \frac{M \sin \alpha}{I_z} \cdot y,$$

kde I_z je moment setrvačnosti průřezu k ose Z . V bodě (y, z) průřezu působí současně obě normálová napětí, a protože obě mají stejný směr (kolmý k průřezu),

sčítají se a výsledné normálové napětí je

$$\sigma_x = \sigma_x' + \sigma_x'' = -\frac{M_y \cdot z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z} = -\frac{M \cos \alpha}{I_y} \cdot z - \frac{M \sin \alpha}{I_z} \cdot y \quad (8.78)$$

Rovnici neutrální osy získáme z podmínky, že je v ní normálové napětí nulové. Anulováním **rovnice (8.78)** dostáváme

$$\begin{aligned} -\frac{M \cos \alpha}{I_y} \cdot z - \frac{M \sin \alpha}{I_z} \cdot y &= 0 \\ z &= -\frac{I_y}{I_z} \operatorname{tg} \alpha \cdot y \end{aligned} \quad (8.79)$$

Z rovnice (8.79) je vidět, že neutrální osa je kolmá na rovinu zatěžovacího momentu jedině tehdy, když

- a) $\alpha = 0$,
- b) $\alpha = 90^\circ$,
- c) $I_y = I_z$.

První dva případy nastávají tehdy, když rovina zatížení obsahuje hlavní centrální osu setrvačnosti průřezu, jedná se tedy o prostý ohyb. A třetí případ znamená, že oba hlavní centrální momenty setrvačnosti jsou stejně veliké; hlavní centrální momenty setrvačnosti jsou maximem a minimem z momentů setrvačnosti k těžištvým osám, všechny momenty setrvačnosti jsou stejně veliké - elipsa setrvačnosti se redukuje na kružnici a kterákoliv těžištvová osa je hlavní centrální osou. Nemůže tedy v tomto případě vůbec nastat šikmý ohyb, při jakémkoliv zatížení momentem nastává prostý ohyb. Můžeme tedy souhrně říci, že

neutrální osa je kolmá na rovinu zatěžovacího momentu jen v případě prostého ohybu, při šikmém ohybu svírá neutrální osa se zatěžovací rovinou ostrý úhel.

Napětí při šikmém ohybu (a samozřejmě i prostém ohybu) je dáno **rovnici (8.78)** což je lineární závislost. Extrémní napětí tedy je v bodech průřezu nejvzdálenějších od neutrální osy. Největší napětí nesmí přestoupit **mezní napětí**, což je opět podmínka při posuzování průřezu.

Návrh průřezu spočívá ve stanovení rozměrů průřezu tak, aby napětí vypočtené podle rovnice (8.78) nepřestoupilo dané **mezní napětí**. Navrhujeme-li průřez, jemuž je opsán obrazec obdélník (průřez čtvercový, obdélníkový, I průřez), můžeme nahradit poměr momentu setrvačnosti ku vzdálenosti krajních vláken - oboje vztaženo ke stejné hlavní centrální ose setrvačnosti - průřezovým modulem jako ve vztahu (8.47). Je tedy

$$\frac{I_y}{e_z} = W_y, \quad \frac{I_z}{e_y} = W_z \quad (8.80)$$

Normálové napětí ve vrcholech opsaného obdélníka pak určíme vztahem

$$\sigma_{x, \max} = \pm \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_z}{W_z} \quad (8.81)$$

Pro jiné obrazce než s opsáným obdélníkem je použití **vztahu (8.81)** problematické, protože by mohlo dojít k tomu, že bychom počítali napětí v bodech mimo průřez a tedy toto napětí se vůbec nevyskytuje. Na př. u průřezu eliptického (obr. 8.52) bychom tak počítali napětí v bodech a, b, c, d, obdobně by tomu bylo u průřezu trojúhelníkového V těchto případech počítáme napětí podle vztahu (8.78), do něhož za y, z dosadíme souřadnice bodu nejvzdálenějšího od neutrální osy.

Vraťme se však k průřezům s opsáným obdélníkem. **Vztah (8.81)** můžeme pro ná-

vrh upravit vytknutím W_y a dostáváme

$$\sigma_{x, \max} = \frac{1}{W_y} \left(\pm M_y \pm \frac{W_y}{W_z} M_z \right) \leq R$$

a odtud

$$W_y \geq \frac{\pm M_y \pm \frac{W_y}{W_z} M_z}{R} \quad (8.82)$$

Tímto způsobem jsme dosáhli toho, že na pravé straně nerovnosti se z veličin závislých na rozměrech průřezu vyskytuje pouze poměr W_y/W_z , který se příliš nemění a můžeme ho odhadnout. Na př. u průřezu obdélníkového, označíme-li délku strany rovnoběžné s osou Y jako b a délku strany rovnoběžné s osou Z jako h (obr. 8.53) je podle (8.49) průřezový modul k ose Y roven

$$W_y = \frac{1}{6} b h^2$$

a záměnou b a h dostaneme průřezový modul k ose Z jako

$$W_z = \frac{1}{6} h b^2.$$

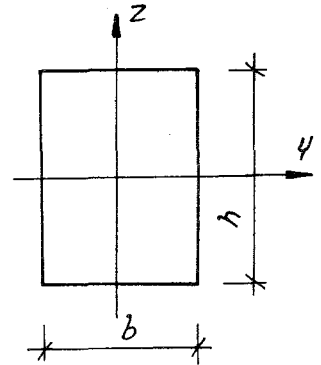
Poměr průřezových modulů W_y/W_z je potom roven

$$\frac{W_y}{W_z} = \frac{\frac{1}{6} b h^2}{\frac{1}{6} h b^2} = \frac{h}{b} \quad (8.83)$$

Dřevěné trámy navrhujeme obvykle s poměrem stran $b:h = 5:7$, pak je poměr průřezových modulů $W_y/W_z = 1,4$. Železobetonové trámy volíme poměrem stran $b/h = 1:2$ až $1:2,5$, takže poměr průřezových modulů je pak $W_y/W_z = 2 \div 2,5$.

U válcovaných profilů I se poměr průřezových modulů W_y/W_z (v tabulkách bývají obvykle průřezové moduly značeny W_x a W_y) pohybuje v rozmezích od sedmi pro menší profily do deseti pro větší profily; u válcovaných profilů C se poměr průřezových modulů W_y/W_z pohybuje v rozmezí od pěti do osmi.

Ohybová čára neleží za šikmého ohybu v rovině vnějších sil. Za obecného zatížení může to být i prostorová křivka. Její souřadnice $w = w(x)$ ve směru Z osy XZ vypočteme ze složek momentových v rovině XZ jako pro prostý ohyb a podobně vypočteme souřadnice ohybové čáry $v = v(x)$ ve směru osy Y z momentových složek v rovině XY . Tím je ohybová čára v prostoru analyticky určena. Působí-li všechny vnější síly v jediné rovině $Z = y \cot \alpha$ a je-li nosník v obou směrech Y i Z stejně podepřen, je ohybová čára rovinná křivka, ležící v rovině kolmé k neutrální ose.



Obr. 8.53. Obdélníkový průřez.

Příklad 8.6.1.

Navrhněte a posuďte dřevěnou obdélníkovou vaznici na rozpětí $l = 4\text{ m}$ (prostý nosník), zatíženou rovnoměrným zatížením $q = 7\text{ kN/m}$ ve svislé rovině. Odchylka hrany b od vodorovné je $\alpha = 15^\circ$, dovolené namáhání dřeva je 10 MPa . Jaká je rovina ohybové čáry vaznice.

Řešení: Ohybový moment uprostřed nosníku je roven (obr. 8.54)

$$M = \frac{1}{8} q l^2 = \frac{1}{8} 7 \cdot 4^2 = 14\text{ kNm}$$

a tento moment ve svíslé rovině se rozkládá do složky v rovině XZ

$$M_y = M \cos \alpha = 14 \cdot \cos 15^\circ = 13,523 \text{ kNm}$$

a složky v rovině XY

$$M_z = M \sin \alpha = 14 \sin 15^\circ = 3,623 \text{ kNm}$$

Vaznici navrhne s poměrem stran $b:h = 5:7$

Při návrhu vyjdeme ze vztahu (8.78), podle něhož vychází

$$W_y \geq \frac{13,523 + 14 \cdot 3,623}{10000} = 1,8595 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Průřezový modul obdélníka o poměru stran 5:7 je

$$W_y = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6} \frac{5}{7} h h^2 = \frac{5}{42} h^3$$

takže výška vaznice musí být minimálně

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{42 \cdot 1,8595 \cdot 10^{-3}}{5,0,326}} = 0,25 \text{ m}$$

Obr. 8.54. Dřevěná vaznice.

navrhne tedy 260 mm. Odpovídající šířka vaznice, aby průřez měl nutný modul, je

$$b = \frac{6 W}{h^2} = \frac{6 \cdot 1,8595 \cdot 10^{-3}}{0,26^2} = 0,165 \text{ m}$$

Navrhne dřevěnou vaznici o rozměrech $\# 180/260 \text{ mm}$, jejíž průřezové moduly jsou

$$W_y = \frac{1}{6} 0,18 \cdot 0,26^2 = 2,028 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3,$$

$$W_z = \frac{1}{6} 0,26 \cdot 0,18^2 = 1,404 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Napětí ve vrcholech vaznice tedy je

$$\sigma = \pm \frac{13,523}{2,028 \cdot 10^{-3}} \pm \frac{3,623}{1,404 \cdot 10^{-3}} = \pm 6668,1 \pm 2580,5 \text{ kPa}$$

$$\sigma_1 = 6668,1 + 2580,5 = 9248,6 \text{ kPa}, \quad \sigma_2 = 6668,1 - 2580,5 = 4087,7 \text{ kPa},$$

$$\sigma_3 = -6668,1 + 2580,5 = -4087,7 \text{ kPa}, \quad \sigma_4 = -6668,1 - 2580,5 = -9248,6 \text{ kPa}.$$

Napětí ve všech vrcholech vaznice je v absolutní hodnotě menší než dovolené namáhání $\sigma_{dov} = 10 \text{ MPa}$.

Ohybová čára je v tomto případě rovinná křivka, její rovina je vždy kolmá na směr neutrální osy. Rovnici neutrální osy udává vztah (8.79) a po dosazení číselných hodnot příkladu vychází

$$z = -\frac{I_y}{I_z} \operatorname{tg} \alpha \cdot y = -\frac{\frac{1}{12} b h^3}{\frac{1}{12} h b^3} \operatorname{tg} \alpha \cdot y = -\frac{0,26^2}{0,18^2} \operatorname{tg} 15^\circ \cdot y = -0,5591 \cdot y.$$

Tato přímka svírá s osou Y úhel β , pro nějž platí

$$\beta = \operatorname{arctg}(-0,5591) = -29,2^\circ$$

Příklad 8.6.2.

Určete průběh napětí v průřezu $L 100 \cdot 100 \cdot 10$, který je zatížen ve svíslé rovi-

ně ohybovým momentem $M = 3,5 \text{ kNm}$ (obr. 8.55).

Řešení: V tabulkách nalezneme těžišťovou vzdálenost úhelníka $100 \cdot 100 \cdot 10$, která je rovna

$$t = 28,7 \text{ mm}.$$

a hlavní centrální momenty setrvačnosti k hlavním osám Y, Z , odkloněným od stran o úhel 45° , které jsou rovny

$$I_Z = I_{\max} = 2,8658 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4,$$

$$I_Y = I_{\min} = 7,3425 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4.$$

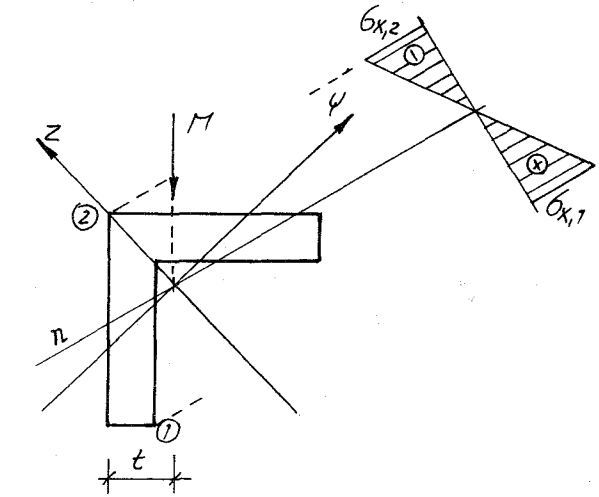
Úhel mezi rovinou zatížení a hlavní centrální osou Z je 45° , takže rovnice neutrální osy (8.79) je

$$z = -\frac{I_Y}{I_Z} \operatorname{tg} \alpha \cdot y = -\frac{7,3425 \cdot 10^{-7}}{2,8658 \cdot 10^{-6}} \operatorname{tg} 45^\circ y = -0,2562 y.$$

Od neutrální osy n jsou nejvíce vzdáleny body ① a ②. Jejich souřadnice vzhledem k hlavním centrálním osám Y, Z jsou

$$y_1 = -0,1 \cos 45^\circ + 0,01 \sin 45^\circ = -0,06364 \text{ m},$$

$$y_2 = 0$$



Obr. 8.55. Úhelník namáhaný šikmým ohybem.

$$z_1 = \frac{t}{\sin 45^\circ} \cdot 0,1 \cos 45^\circ - 0,01 \cos 45^\circ = -0,03719 \text{ m},$$

$$z_2 = \frac{t}{\sin 45^\circ} = 0,04059 \text{ m}$$

Napětí v těchto bodech, které je maximální a minimální v průřezu, vypočteme ze vztahu (8.78) a dostáváme

$$\sigma_{x,1} = -\frac{3,5 \cos 45^\circ (-0,03719)}{7,3425 \cdot 10^{-7}} - \frac{3,5 \sin 45^\circ (-0,06364)}{2,8658 \cdot 10^{-6}} = 180\,105 \text{ kPa} = 180,1 \text{ MPa}$$

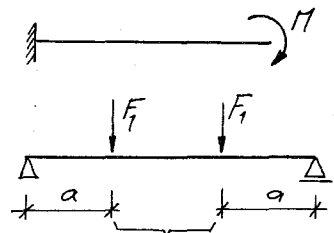
$$\sigma_{x,2} = -\frac{3,5 \cos 45^\circ \cdot 0,04059}{7,3425 \cdot 10^{-7}} - 0 = -136\,813 \text{ kPa} = -136,8 \text{ MPa}$$

8.7. Tangenciální napětí za ohybu.

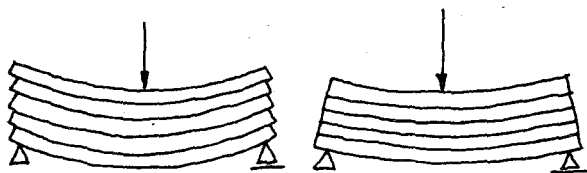
V předcházejících odstavcích jsme uvažovali při ohybu nosníku pouze vliv ohybových momentů. Takovéto případy, kdy na nosníku je jedinou vnitřní silou ohybový moment, jsou poměrně vzácné, na př. konzola zatížená osamělým momentem nebo část nosníku mezi osamělými břemeny u prostého nosníku zatíženého dvěma symetrickými břemeny (obr. 8.56). Tyto případy nazýváme čistý ohyb. Ve skutečnosti se spolu s ohybovými momenty obvykle na nosníku vyskytuje také posouvající síla.

Představme si, že vytvoříme nosník tím způsobem, že na sebe položíme pět prken tloušťky h mezi sebou vzájemně nespojených. Únosnost průřezu je úměrná průřezovému modulu, pět prken bude mít průřezový modul

$$W_5 = 5 \cdot \frac{1}{6} b h^2 = \frac{5}{6} b h^2.$$



Obr. 8.56. Čistý ohyb



Obr. 8.57. Zvětšení únosnosti slepením.

Nyní prkna vzájemně slepíme, takže vznikne jeden nosník o výšce $5h$. Průřezový modul tohoto nosníku bude

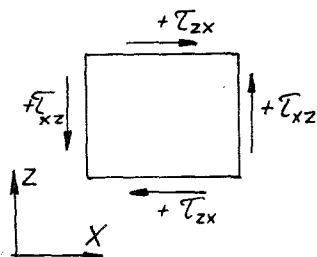
$$W_1 = \frac{1}{6} b (5h)^2 = \frac{25}{6} b h^2$$

Vidíme, že slepením prken se průřezový modul nosníku zvětšil pětikrát. Je to tím, že lepidlo brání posouvání prken vzájemně po sobě (obr. 8.57).

Z uvedeného příkladu je vidět, že při ohybu nosníku vznikají mimo normálových napětí také napětí tangenciální. Jejich velikost vypočteme na základě Grashofovy hypotézy, podle které předpokládáme, že u symetrického průřezu zatíženého v rovině souměrnosti je složka tangenciálního napětí τ_{xz} konstantní v celé vrstvě vláken rovnoběžných s neutrální osou.

Při označování tangenciálních napětí používáme dvojitého indexu. První index značí směr normály k rovině, v níž tangenciální napětí působí, a druhý index značí směr tohoto napětí. Napětí τ_{xz} tedy značí napětí působící v rovině YZ a mající směr osy Z. Oba indexy u tangenciálního napětí je možno zaměnit, neboť platí věta o vzájemnosti složek tangenciálního napětí, podle které

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (8.84)$$



Obr. 8.58. Kladné směrtangenciálních napětí.

Je tedy možné při výpočtu tangenciálních napětí za ohybu vyšetřit místo složky τ_{xz} složku τ_{zx} , která je stejně veliká a působí ve vodorovné rovině XY směrem podélné osy X nosníku. Tangenciální napětí považujeme za kladné, pokud na ploše, u níž vnější normála má směr kladné osy, má tangenciální napětí směr druhé osy, a na ploše, u níž vnější normála směřuje proti kladné ose, směřuje tangenciální napětí proti druhé ose. Kladné směry tangenciálních napětí τ_{xz} , τ_{zx} jsou uvedeny na obrázku 8.58

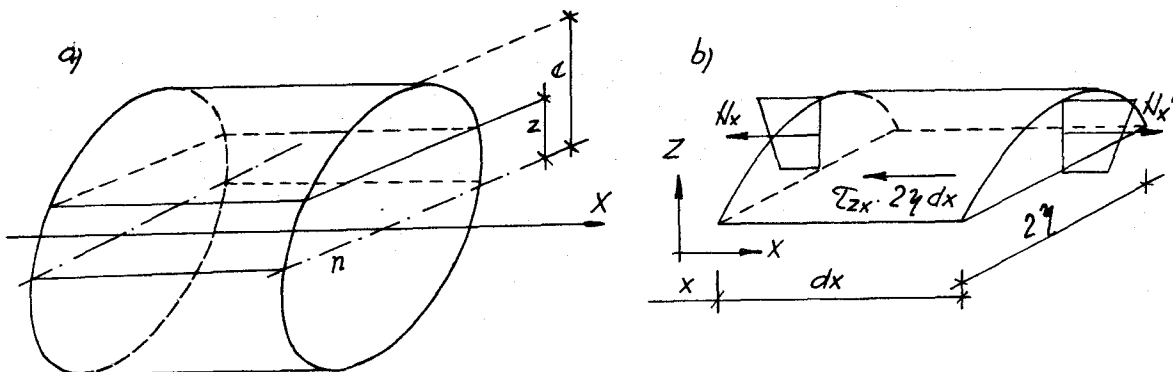
Oddělme z nosníku část omezenou dvěma sousedními průřezy x , $x+dx$ a z ní horní element až po vlákna vzdálená z od neutrální osy (obr. 8.59). Ve směru osy X působí na element v rovinách sousedních průřezů normálová napětí, která jsme vyšetřili z účinku ohybového momentu (kladná jako tahy), a na spodní plošku elementu konstantní tangenciální napětí τ_{zx} (kladné proti směru osy X). Je-li v rovině průřezu o souřadnici x ohybový moment M , vyvolává ve vzdálenosti z od neutrální osy napětí

$$\sigma_x = -\frac{Mz}{I_y}$$

a na základnu elementu v průřezu x působí ve směru záporné osy X kladná výslednice normálových napětí (obr. 8.59b/

$$N_x = \int_z^e \sigma_x dA = -\frac{M}{I_y} \int_z^e z dA = -\frac{M S_{ze}}{I_y} \quad (8.85)$$

Integrál označený S_{ze} je statický moment části průřezové plochy mezi zvoleným vláknem z a krajním vláknem e k neutrální ose průřezu. A vyloučíme-



Obr. 8.59 Výpočet tangenciálního napětí podle Grashofovy hypotézy.

li elementy, kde se plocha průřezu náhle mění nebo kde je působiště osamělého zatěžovacího momentu, mění se N_x mezi x a $x+dx$ spojitě. Na uvažovanou část sousedního průřezu o souřadnici $x+dx$ působí ve směru kladné osy X výslednice normálových napětí

$$N_x' = N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx = N_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M \cdot S_{z\epsilon}}{I_y} \right) dx \quad (8.86)$$

Tangenciální napětí τ_{zx} dávají na spodní plošku elementu výslednici, které má při kladném τ_{zx} směr záporné osy X , a protože na této plošce je τ_{zx} konstantní, je velikost výslednice tangenciálních napětí τ_{zx} rovna

$$\tau_{zx} \cdot 2\gamma dx.$$

Směrové podmínka rovnováhy ve směru osy X má tvar

$$N_x' - N_x - \tau_{zx} \cdot 2\gamma dx = 0,$$

odkud po dosazení za N_x' z (8.86) dostáváme po elementárních úpravách

$$\tau_{zx} = \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M \cdot S_{z\epsilon}}{I_y} \right). \quad (8.87)$$

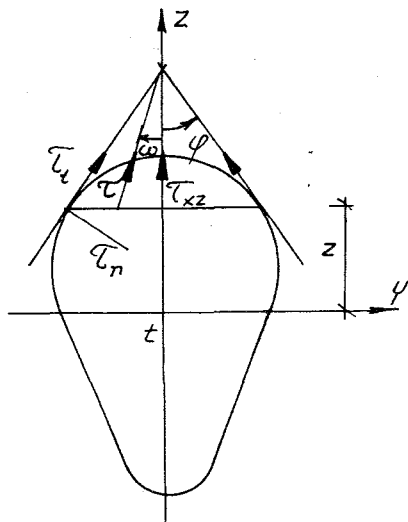
U prismatického nosníku (nosníku konstantního průřezu) je moment setrvačnosti průřezu I_y konstantní a ani se ve směru podélné osy nosníku nemění statický moment $S_{z\epsilon}$ pro libovolná vlákna z . Jsou tedy členy $S_{z\epsilon}$ a I_y vzhledem k souřadnici x konstanty a ve výrazu (8.87) je možno je vytknout před derivací. Dostáváme tak

$$\tau_{zx} = \frac{S_{z\epsilon}}{I_y \cdot 2\gamma} \frac{dM}{dx}$$

a protože podle Schwedlerovy věty je derivací ohybového momentu M posouvající síla T , dostáváme pro prismatický nosník následující výraz pro tangenciální napětí za ohybu

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = - \frac{T}{I_y} \cdot \frac{S_{z\epsilon}}{2\gamma}, \quad (8.88)$$

kde $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ je tangenciální napětí v průřezu x ve vláknech vzdálených z od těžiškové osy, T je posouvající síla v průřezu x , I_y je moment setrvačnosti celého průřezu v místě x , $S_{z\epsilon}$ je statický moment k těžiškové ose části průřezu nad vlákny z až po horní okraj průřezu a 2γ je šířka průřezu ve výšce z nad těžiškovou osou. Protože statický moment celého průřezu k těžiškové ose musí být nulový (tak je definováno těžiště), je možno tam, kde je to



Obr. 8.60. Výsledné tangenciální napětí.

výhodnější, počítat S_{ze} jako záporně vzatý statický moment k těžiškové ose části průřezu pod vlákny Z až po dolní okraj průřezu. Protože na horním i spodním okraji je statický moment S_{ze} nulový (statický moment nulové polohy), je na horním i spodním okraji průřezu tangenciální napětí nulové.

Na obvodě průřezu musí mít výsledné tangenciální napětí směr tečny k průřezu. Toto tvrzení vyplývá přímo ze zákona o vzájemnosti tangenciálních napětí. Pokud by se totiž vyskytovala nenulová složka τ_n ve směru normály k obrysu. (obr. 8.60), musila by dle tohoto zákona existovat i stejně veliká složka v kolmé rovině, tedy tangenciální napětí mezi nosníkem a vzduchem. A protože takové napětí na nezátíženém okraji nemůže existovat, musí být nulová i složka τ_n tangenciálního napětí na obvodě.

Jak bylo uvedeno na začátku tohoto odstavce, uvažujeme průřezy symetrické podle svíslé osy Z . Ze symetrie průřezu vyplývá, že na ose symetrie má tangenciální napětí směr osy symetrie. Nakreslíme-li vektory výsledného tangenciálního napětí v obou bodech na obrysu ve vláknech stejně vzdálených od osy Y , protnou se vzhledem k symetrii průřezu tyto vektory na ose symetrie. Do stejného bodu směřuje i vektor tangenciálního napětí v bodě na ose symetrie. Je tedy oprávněný předpoklad, že i v ostatních bodech těchto vláken bude vektor tangenciálního napětí směřovat do téhož bodu. Takže

vektory tangenciálního napětí ve všech bodech průřezu, stejně vzdálených od neutrální osy, se protínají v témže bodě na ose symetrie.

Označíme-li úhel mezi osou souměrnosti a spojnicí obecného bodu a průsečíku vektorů tangenciálních napětí jako ω , bude závislost výsledného napětí τ v obecném bodě a jeho svíslým průmětem τ_{xz}

$$\tau = \frac{\tau_{xz}}{\cos \omega} \quad (8.89)$$

Protože složka napětí τ_{xz} je ve vláknech se stejnou souřadnicí Z konstantní, bude největší výsledné napětí tam, kde je $\cos \omega$ nejmenší a tedy úhel ω největší, to je na obvodě průřezu. A označíme-li úhel mezi tečnou k obrysu a svíslou osou symetrie jako φ , bude výsledné tangenciální napětí τ_0 na obvodu průřezu po dosazení do vztahů (8.88) a (8.89) rovno

$$\tau_0 = \frac{\tau}{I_y} \frac{S_{ze}}{2y \cos \varphi} \quad (8.90)$$

Protože napětí na obvodu je ze všech napětí ve vláknech se stejnou souřadnicí Z největší, stačí pro posouzení průřezu na tangenciální napětí stanovit průběh obvodových napětí a z nich největší tangenciální napětí vůbec. Podíl $\frac{\tau}{I_y}$ je v celém průřezu konstantní, a proto největší tangenciální napětí v průřezu bude na jeho obvodu v místě, kde

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{S_{ze}}{2y \cos \varphi} \right) = 0 \quad (8.91)$$

Pro obdélník se šířkou b a výškou h (obr. 8.61) platí

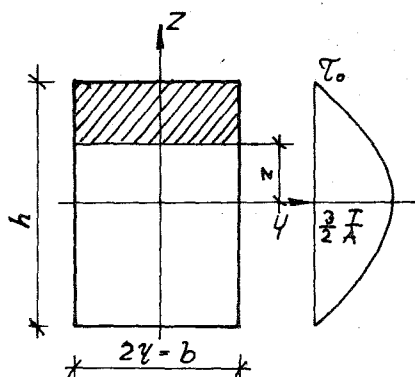
$$I_y = \frac{1}{12} bh^3, \quad 2\gamma = b, \quad \cos\varphi = 1$$

Statický moment S_{ze} představuje statický moment vyšrafované plochy k ose Y a je roven

$$S_{ze} = b \left(\frac{h}{2} - z \right) \frac{\frac{h}{2} + z}{2} = \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right]$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do vztahu (8.90), dostáváme

$$\tau_o = - \frac{T}{\frac{1}{12} bh^3} \frac{\frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right]}{b \cdot 1} = - \frac{3}{2} \frac{h^2 - 4z^2}{bh^3} T \quad (8.92)$$



Obr. 8.61. Obdélníkový průřez.

Tangenciální napětí na obvodu se u obdélníka mění podle kvadratické paraboly; protože na obou okrajích má nulovou hodnotu, musí mít maximum uprostřed výšky ($z = 0$) a jeho velikost je

$$\max \tau_o = - \frac{3}{2} \frac{T}{bh} = - \frac{3}{2} \frac{T}{A} \quad (8.93)$$

to je tři poloviny průměrného napětí (rovného posouvající síle dělené plochou).

Rovnoramenný trojúhelník se základnou b a výškou h (obr. 8.62) má

$$I_y = \frac{1}{36} bh^3, \quad 2\gamma = \frac{\frac{2}{3}h - z}{\frac{h}{3}} b, \quad \cos\varphi = \frac{h}{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2}}$$

$$S_{ze} = \frac{1}{2} 2\gamma \left(\frac{2}{3}h - z \right) \left(z + \frac{2h-z}{3} \right) = \frac{2\gamma}{27} (2h-3z)(h+3z)$$

Po dosazení do vztahu (8.90) dostáváme

$$\tau_o = - \frac{T}{\frac{1}{36} bh^3} \frac{\frac{2\gamma}{27} (2h-3z)(h+3z)}{2\gamma \cdot \cos\varphi} = - \frac{T}{\frac{1}{2} bh} \frac{2(2h-3z)(h+3z)}{3h^2 \cos\varphi} \quad (8.94)$$

Tangenciální napětí na obvodu se mění opět podle kvadratické paraboly, která má v obou krajních bodech nulovou hodnotu. Maximum je tedy uprostřed výšky trojúhelníka, to je pro $z = h/6$, a má hodnotu

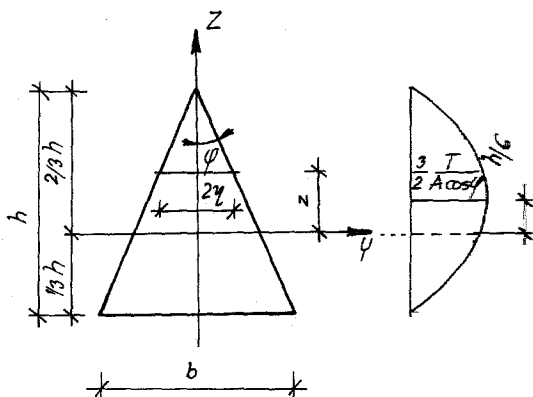
$$\max \tau_o = - \frac{3}{2} \frac{T}{\frac{1}{2} bh \cos\varphi} = - \frac{3}{2} \frac{T}{A \cos\varphi} \quad (8.95)$$

Maximální tangenciální napětí není u trojúhelníkového průřezu v těžišti průřezu (v neutrální ose), ale je v polovině výšky průřezu.

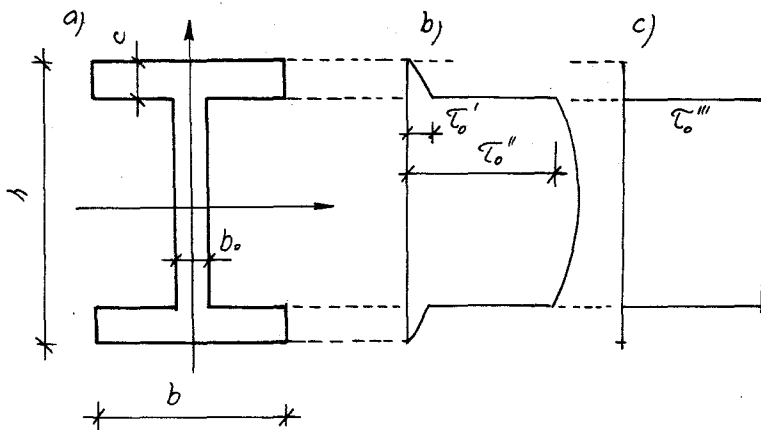
U nosníků I s šířkou příruby b , tloušťkou stěny b_0 , celkovou výškou h a tloušťkou příruby c (obr. 8.63) se mění šířka průřezu skokem a proto se podle Grashofovy teorie mění i tangenciální napětí v tomto místě skokem (obr. 8.63b). V místě přechodu příruby ve stojinu vyčnížejí tangenciální napětí

$$\tau_o' = - \frac{T}{2I} c(h-c)$$

$$\tau_o'' = \frac{b}{b_0} \tau_o' = - \frac{T}{2I b_0} bc(h-c)$$



Obr. 8.62. Rovnoramenný trojúhelník.



Obr. 8.63. Nosník I .

Z obrázku 8.63b je vidět, že příruby přenášejí poměrně malou část celkové posouvající síly působící na průřez, velkou většinu této síly přenáší stojina, ve které se tangenciální napětí příliš nemění. Proto se obvykle u nosníků I počítá s tím, že celou posouvající sílu přenáší pouze stojina a tangenciální napětí je po ní rozloženo rovnoměrně (obr. 8.63c). Velikost tohoto napětí je potom

$$\tau_o''' = - \frac{T}{b_o (h - 2c)} \quad (8.96)$$

Na př. u válcovaného nosníku I č. 24 je chyba takto vypočteného napětí přibližně 4% , a to je chyba ve prospěch bezpečnosti (skutečné napětí je menší).

Příklad 8.7.1.

Vypočtete průběh tangenciálního napětí na obvodu průřezu složeného z obdélníka a rovnoramenného trojúhelníka (obr. 8.64/ od zatížení posouvající silou $T = 26 \text{ kN}$.

Řešení: Nejprve je třeba určit polohu těžiště. Zavedeme pomocnou osu ψ' proloženou základnou obdélníka. Plocha průřezu je

$$A = 95 \cdot 0,3 + \frac{1}{2} 95 \cdot 0,4 = 9,25 \text{ m}^2,$$

statický moment průřezu k ose ψ' je

$$S_{y'} = 95 \cdot 0,3 \cdot 0,15 + \frac{1}{2} 95 \cdot 0,4 \left(0,3 + \frac{0,4}{3}\right) = 9,06583 \text{ m}^3$$

a vzdálenost těžiště od osy ψ' je

$$z_t' = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{9,06583}{9,25} = 9,2633 \text{ m}.$$

Moment setrvačnosti celého průřezu k ose ψ' vypočteme pomocí Steinerovy věty a je roven

$$I_y = \frac{1}{12} 95 \cdot 0,3^3 + 95 \cdot 0,3 \cdot 0,1133^2 + \frac{1}{36} 95 \cdot 0,4^3 + \frac{1}{2} 95 \cdot 0,4 \cdot 0,17^2 = 6,8306 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4.$$

Výpočet tangenciálního napětí na obvodu trojúhelníka

$$2\eta = \frac{95}{0,4} (0,4367 - z), \quad S_{z_c} = \frac{1}{2} 2\eta (0,4367 - z) \left(z + \frac{0,4367 - z}{3}\right), \quad \cos\phi = \frac{0,4}{\sqrt{0,4^2 + 0,3^2}} = 0,848,$$

$$\tau_o = - \frac{26}{6,8306 \cdot 10^{-3}} \frac{\frac{1}{2} 2\eta (0,4367 - z) (2z + 0,4367)}{0,848 \cdot 2\eta} = -748,11 (0,4367 - z) (2z + 0,4367).$$

Extrém funkce se nachází v místě, kde je první derivace nulová, tedy

$$\frac{d\tau_o}{dz} = -748,11 [-(2z + 0,4367) + 2(0,4367 - z)] = 0 \dots \dots z = \frac{0,4367}{4} = 0,1092 \text{ m}$$

a jeho hodnota je

$$\max \tau_{0a} = -748,11(0,4367 - 0,1092)(2 \cdot 0,1092 + 0,4367) = -160,5 \text{ kPa.}$$

Rovnice pro τ_0 na trojúhelníku platí v intervalu $z \in \langle 0,0367; 0,4367 \rangle$
Na spodním okraji intervalu je tangenciální napětí rovno

$$\tau_{0a}' = -748,11(0,4367 - 0,0367)(2 \cdot 0,0367 + 0,4367) = -152,6 \text{ kPa.}$$

Výpočet tangenciálního napětí na obvodu obdélníka:

$$2\eta = 0,511, \quad \cos \varphi = 1$$

Pro výpočet statického momentu části průřezu využijeme toho, že statický moment horní části je roven záporně vzatému statickému momentu spodní části, který se vypočte jednodušším způsobem. Vychází

$$S_{zc} = -0,5(0,2633+z) \frac{z - 0,2633}{2} =$$

$$= 0,25(0,06934 - z^2),$$

takže rovnice tangenciálního napětí na obvodu obdélníka je

$$\tau_{0a} = -\frac{26}{6,8306 \cdot 10^{-3}} \frac{0,25(0,06934 - z^2)}{0,511} =$$

$$= -1903,2(0,06934 - z^2).$$

Tato funkce má extrém pro $z = 0$ a je roven

$$\max \tau_{0a} = -1903,2 \cdot 0,06934 = -132,0 \text{ kPa.}$$

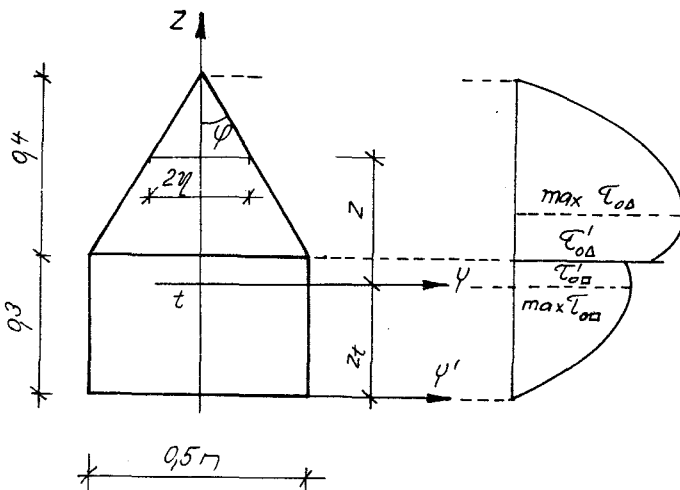
V místě, kde obdélníkový průřez přechází v trojúhelníkový, to je pro $z = 0,0367$, je

$$\tau_{0a}' = -1903,2(0,06934 - 0,0367^2) = -129,4 \text{ kPa.}$$

Průběh tangenciálních napětí je vykreslen na obr. 8.64.

8.8. Hlavní normálová napětí.

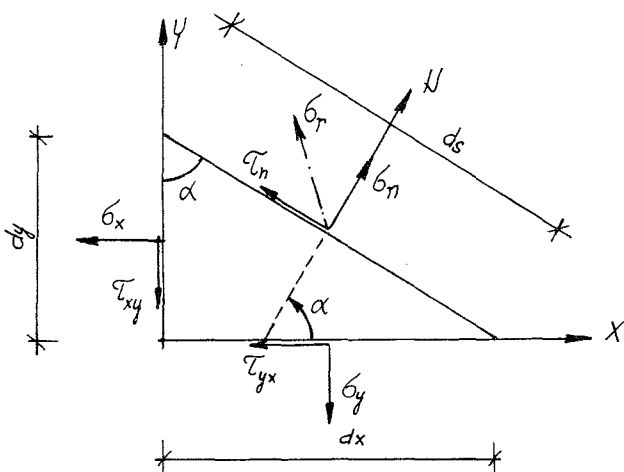
Deformací vznikají v pružných tělesech vnitřní napětí. Jsou různá podle polohy bodu v tělese a směru normály plošek, k nimž působí. Napětí i jejich složky se mění bod od bodu v tělese spojitě. Pro fyzikální vztahy je výhodný rozklad napětí do tří složek, normálové (ve směru normály k plošce) a dvou navzájem kolmých tangenciálních složek napětí, a to pro tři plošky kolmé k souřadným osám. Normálové složky napětí (normálová napětí) značíme σ_i , kde i značí souřadnou osu, která má stejný směr jako normála k plošce. Máme tedy tři složky normálových napětí $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Tangenciální složky napětí (tangenciální napětí) značíme



Obr. 8.64. Tangenciální napětí složeného průřezu.

τ_{ij} , kde ve zdvojeném indexu i značí souřadnou osu, která má stejný směr jako normála k plošce, a j značí souřadnou osu, která má směr jako vektor tangenciálního napětí. Podle toho máme celkem šest složek tangenciálních napětí τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{zy} , ale těchto šest složek nepředstavuje šest nezávislých veličin. Z momentových podmínek rovnováhy na objemovém elementu je možno dokázat, že platí zákon o vzájemnosti tangenciálních napětí (8.84), takže v bodu máme kromě tří normálových složek napětí pouze tři různé tangenciální složky $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

Rovinná napjatost vzniká tehdy, jestliže vymizí všechny složky napětí kolmé k jedné rovině. Uvažujme rovinnou napjatost v rovině XY, potom jsou nulové složky napětí σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} a vyskytují se pouze tři různé složky napětí - σ_x , σ_y , $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Rovinná napjatost charakterizuje téměř přesně stav napětí u konstrukcí velmi malé tloušťky, které jsou zatíženy ve své střednicové rovině. Nazýváme je nosné stěny. S rovinnou napjatostí se též setkáváme v případě prostého ohybu, kdy v nosníku vznikají pouze napětí v rovině XZ: od ohybového momentu normálové napětí σ_x a vlivem posouvající síly tangenciální napětí za ohybu τ_{xz} . U nosníků zatížených spojitým zatížením vyvozuje toto spojitě zatížení i tlak ve směru kolmém na osu nosníku - σ_z , ovšem toto napětí je oproti normálovému napětí σ_x velmi malé.



Obr. 8.65. Rovnováha na elementárním trojúhelníku.

Známe-li napětí σ_x , σ_y , τ_{xy} (nebo σ_x , σ_z , τ_{xz}), odvodíme hodnotu napětí σ_n ve směru normály N k obecné plošce, jež svírá s osou X úhel α (obr. 8.65), a napětí τ_n v kolmém směru z rovnováhy vnitřních sil, působících na elementární trojboký hranol. Tloušťku hranolu předpokládáme jednotkovou. Základnou je pravouhlý trojúhelník s odvěsnami dx , dy a přeponou ds , která svírá s odvěsnou dy úhel α (úhel mezi vnější normálou N a souřadnou osou X , měřený proti směru pohybu ručiček na hodinách). Mezi délkami stran trojúhelníka platí závislosti

$$\begin{aligned} dx &= ds \sin \alpha \\ dy &= ds \cos \alpha \end{aligned} \quad (8.97)$$

Na jednotlivé stěny hranolu působí síly, jež jsou výslednicemi napětí na stěny hranolu: na stěnu o délce dy síly $\sigma_x dy$, $\tau_{xy} dy$; na stěnu o délce dx síly $\sigma_y dx$, $\tau_{yx} dx$; na stěnu o délce ds síly $\sigma_n ds$, $\tau_n ds$, kde σ_n , τ_n jsou normálová a tangenciální složka obecného napětí σ_r působícího na tuto stěnu. Kladný smysl složek σ_n , τ_n byl zvolen tak, aby pro úhel $\alpha = 0$ byly v rovnováze se složkami σ_x , τ_{xy} .

Napišme nyní podmínky rovnováhy ve směru normály N a směru kolmého k této normále. Ze směrové podmínky rovnováhy sil ve směru normály N k přeponě dostáváme

$$\sigma_n ds - \sigma_x dy \cos \alpha - \tau_{xy} dy \sin \alpha - \sigma_y dx \sin \alpha - \tau_{yx} dx \cos \alpha = 0$$

a po dosazení ze vztahů (8.97) a dělení rovnice délkou přepony ds

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha. \quad (8.98)$$

Obdobně směrová výminka rovnováhy ve směru kolmém k normále dává

$$\tau_n ds + \sigma_x dy \sin \alpha - \tau_{xy} dy \cos \alpha - \sigma_y dx \cos \alpha + \tau_{yx} dx \sin \alpha = 0$$

a po stejných úpravách jako u předešlé podmínky

$$\tau_n = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (8.99)$$

Podmínku extrému normálových napětí získáme derivováním rovnice (8.98) a položením první derivace σ_n podle α rovné nule. Dostáváme tak

$$\frac{d\sigma_n}{d\alpha} = 2\sigma_x \cos \alpha (-\sin \alpha) + 2\sigma_y \sin \alpha \cos \alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

Srovnáním s rovnicí (8.99) vidíme, že podmínka extrému normálového napětí je totožná s podmínkou nulového tangenciálního napětí. Nastává tedy hlavní normálové napětí pro tu orientaci plošky, pro níž je příslušné tangenciální napětí nulové. Anulováním podmínky (8.99) a dělením $\cos 2\alpha$ dostáváme pro úhel α_0 hlavních napětí podmínku

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (8.100)$$

Protože tangens je funkce periodická s periodou π , dostáváme jako řešení

$$\begin{aligned} 2\alpha_{1,2} &= \operatorname{arctg} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} + k\pi, \\ \alpha_{1,2} &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (8.101)$$

kde k je celé číslo. Hlavní napětí jsou tedy dvě a svírají úhel 90° . Jejich velikosti pak získáme zpětným dosazením úhlů α_1, α_2 do rovnice (8.98).

Výhodnějších vztahů pro velikost a směry hlavních napětí lze dosáhnout jiným způsobem. Napišme podmínky rovnováhy ve směrech os X, Y . Dostáváme

$$\begin{aligned} -\tilde{\sigma}_x dy - \tau_{yx} dx + \tilde{\sigma}_n ds \cos \alpha - \tau_n ds \sin \alpha &= 0 \\ -\tilde{\sigma}_y dx - \tau_{xy} dy + \tilde{\sigma}_n ds \sin \alpha + \tau_n ds \cos \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Je-li $\alpha = \alpha_0$ úhel hlavních napětí, je normálové napětí hlavním napětím $\tilde{\sigma}_n = \tilde{\sigma}_e$ a tangenciální napětí $\tau_n = 0$. Po dosazení z (8.97) a dělení ds získáme

$$\begin{aligned} (\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_e) \cos \alpha_0 + \tau_{yx} \sin \alpha_0 &= 0 \\ \tau_{xy} \cos \alpha_0 + (\tilde{\sigma}_y - \tilde{\sigma}_e) \sin \alpha_0 &= 0 \end{aligned} \quad (8.102)$$

Uvažujeme-li soustavu rovnic (8.102) jako soustavu pro neznámé $\cos \alpha_0, \sin \alpha_0$, jedná se o soustavu s nulovými pravými stranami. Triviální řešení $\cos \alpha_0 = \sin \alpha_0 = 0$ není možné, a aby existovalo netriviální řešení, musí pro determinant platit

$$\begin{vmatrix} \tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_e & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \tilde{\sigma}_y - \tilde{\sigma}_e \end{vmatrix} = 0 \quad (8.103)$$

Rozvinutím determinantu dostáváme podmínku pro hlavní napětí

$$\tilde{\sigma}_e^2 - (\tilde{\sigma}_x + \tilde{\sigma}_y) \tilde{\sigma}_e + (\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y - \tau_{xy}^2) = 0,$$

která má dvě řešení

$$\tilde{\sigma}_1 = \frac{\tilde{\sigma}_x + \tilde{\sigma}_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad \tilde{\sigma}_2 = \frac{\tilde{\sigma}_x + \tilde{\sigma}_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\tilde{\sigma}_x - \tilde{\sigma}_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (8.104)$$

Hlavní napětí σ_1 je algebraicky větší napětí, proto má druhá odmocnina ve výrazu pro σ_1 kladné znaménko a ve výrazu pro σ_2 záporné znaménko. Směry hlavních napětí získáme z **podmínek (8.102)**.

Pokud je τ_{xy} různé od nuly, jsou obě rovnice identické a po dělení první rovnice $\cos \alpha_0$ dostáváme

$$\tau_{xy} \neq 0 \quad : \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\tau_{xy}} \quad (8.105)$$

Je-li tangenciální napětí nulové, rovnice (8.102) se redukují na tvar

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_y) \cos \alpha_0 &= 0, \\ (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha_0 &= 0. \end{aligned}$$

Splnění těchto dvou podmínek v případě, že σ_x je větší než σ_y a tedy $\sigma_1 = \sigma_x$, vyžaduje úhel $\alpha_1 = 0$ a v případě, že σ_x je menší než σ_y a tedy $\sigma_1 = \sigma_y$, vyžaduje úhel $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, tedy

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_x > \sigma_y \quad : \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \\ \sigma_x < \sigma_y \quad : \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_2 = 0. \end{aligned} \quad (8.106)$$

Můžeme tedy při výpočtu směrů a velikostí hlavních napětí za rovinné napjatosti použít dvou různých postupů.

- Pomocí podmínky (8.100) resp. (8.101) určíme úhly hlavních napětí a jejich dosazením do rovnice (8.98) získáváme velikosti hlavních napětí. Přitom za napětí σ_1 považujeme napětí algebraicky větší.
- Pomocí podmínek (8.104) určíme velikosti hlavních napětí σ_1 a σ_2 a jejich dosazením do vztahu (8.105) resp. (8.106), dostáváme úhly α_1 , α_2 hlavních napětí.

Oba postupy vedou samozřejmě ke stejným výsledkům, avšak postup b) je možno označit za výhodnější. Pomocí postupu a) dostáváme přímo úhly hlavních napětí a zprostředkovaně velikosti těchto napětí, pomocí postupu b) pak získáváme přímo velikosti hlavních napětí a zprostředkovaně jejich úhly. Postupem b) tedy získáme **přesněji velikosti** a méně přesně směry hlavních napětí, v postupu a) pak obráceně. A nás zajímá zejména přesná hodnota velikostí hlavních napětí, směry nám stačí určit přibližně (na př. pro optimální směr tahové výstuže v železobetonu). Mimo to pomocí vztahu (8.105) určujeme úhel α_1 pro směr σ_1 a úhel α_2 pro směr σ_2 , víme tedy spolehlivě, který směr je hlavní tah a který je hlavní tlak. Prokázaná kolmost obou směrů je pak velmi přesnou kontrolou výpočtu.

Pro přibližné určení velikostí a směrů hlavních napětí, případně i pro napjatost na plošce obecného směru, je možno s výhodou využít grafického řešení pomocí Mohrovy kružnice. Nejprve si upravíme vztah (8.98) na tvar

$$\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha,$$

tuto rovnici umocníme a sečteme s druhou mocninou rovnice (8.99). Dostaneme tak rovnici

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2. \quad (8.107)$$

Rovnice (8.107) představuje v souřadném systému σ_n, τ_n kružnici se středem v bodě $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$ a s poloměrem $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$ (obr. 8.66). Na této kružnici musí ležet všechny body se souřadnicemi (σ_n, τ_n) , tedy i body se souřadnicemi (σ_x, τ_{xy}) a $(\sigma_y, -\tau_{xy})$. Kružnici proto konstruujeme tak, že v souřadném

systému σ, τ vyneseme zmíněné body A (σ_x, τ_{xy}) a B ($\sigma_y, -\tau_{xy}$) - podle obr. 8.65 se pro $\alpha = -90^\circ$ ztotožní kladný směr τ_n se záporným τ_{xy} . Oba body A, B spojíme a v průsečíku této spojnice s osou σ leží střed S Mohrovy kružnice, který má souřadnice $(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0)$. Jsečka \overline{AS} má pak délku $\sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$, což je poloměr Mohrovy kružnice. Průsečíky C, D Mohrovy kružnice s osou σ představují body, kde je normálové napětí maximální a minimální a současně tangenciální napětí nulové, což charakterizuje hlavní napětí. Bod C má tedy souřadnice $(\sigma_1, 0)$ a představuje hlavní tah, bod D se souřadnicemi $(\sigma_2, 0)$ představuje hlavní tlak. Body E, E' ležící v průsečíku Mohrovy kružnice s kolmicí k ose σ vedenou ve středu kružnice představují směry maximálního tangenciálního napětí v rovině XY , které má hodnotu

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (8.108)$$

Je však třeba připomenout, že třetí hlavní napětí má v rovinné napjatosti nulovou hodnotu a tak τ_{max} je sice největší tangenciální napětí v rovině XY , ale nemusí být největší tangenciální napětí v bodě. Je jím jen v případě, že hlavní napětí σ_1 a σ_2 jsou opačného znaménka, jinak je největší tangenciální napětí v bodě rovno

$$\max \tau = \frac{\sigma_1}{2} \quad \text{nebo} \quad \max \tau = -\frac{\sigma_2}{2}$$

podle toho, zda je v absolutní hodnotě větší napětí σ_1 nebo σ_2 .

Tangenta úhlu $\sphericalangle CSA$ je rovna poměru τ_{xy} a $\sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$. Je tedy tento úhel

$$\sphericalangle CSA = 2\alpha_0.$$

A protože středový úhel je dvojnásobkem obvodového úhlu, je

$$\sphericalangle CDA = \alpha_0.$$

Orientujeme-li tedy souřadný systém σ, τ tak,

že osa σ je rovnoběžná s osou X , má přímka

AD směr hlavního napětí, a ze srovnání se vztahem (8.105) vidíme, že je to směr hlavního napětí

$$\sigma_1.$$

Při prostém tahu a tlaku je $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$

a pouze napětí σ_x je od nuly různé. Stejný případ nastává i při tzv. čistém ohybu, charakterizovaném nulovou posouvající silou, a při prostém

ohybu v krajních vlákních, kde je tangenciální napětí za ohybu nulové. Mohrova kružnice se dotýká souřadnicové osy τ (obr. 8.67), a jedno

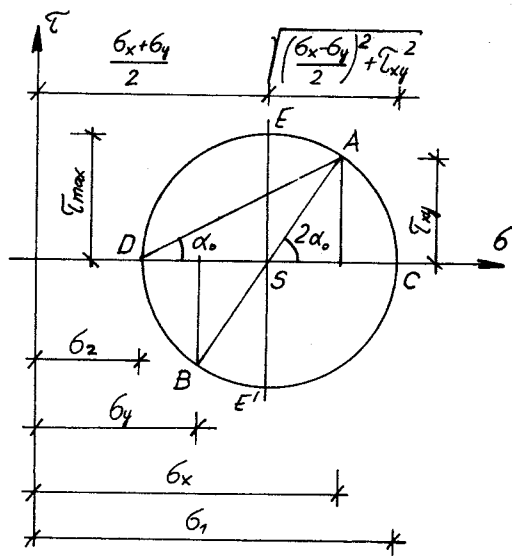
hlavní napětí je rovno σ_x , druhé je nulové (při

ohybu v krajních vlákních, kde je tangenciální napětí za ohybu nulové. Mohrova kružnice se dotýká souřadnicové osy τ (obr. 8.67), a jedno

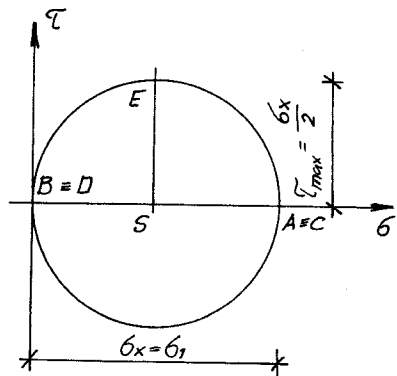
hlavní napětí je rovno σ_x , druhé je nulové (při

ohybu v krajních vlákních, kde je tangenciální napětí za ohybu nulové. Mohrova kružnice se dotýká souřadnicové osy τ (obr. 8.67), a jedno

hlavní napětí je rovno σ_x , druhé je nulové (při



Obr. 8.66. Mohrova kružnice.



Obr. 8.67. Mohrova kružnice při prostém tahu.

prostém tahu je $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = 0$, při prostém tlaku $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_x$.
Maximální tangenciální napětí má velikost

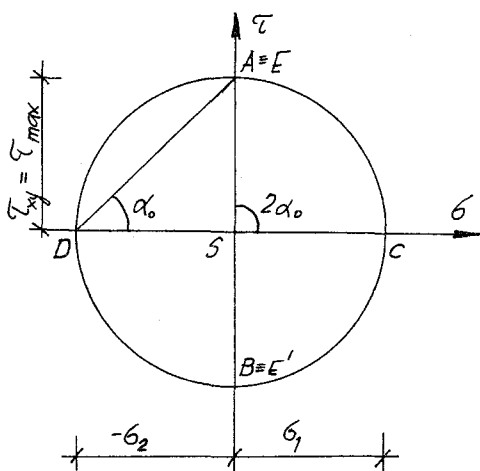
$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_x|}{2}$$

a působí v rovinách odkloněných o 45° od podélné osy X .

Případ, kdy je $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $\tau_{xy} \neq 0$, nazýváme čistý smyk. Nastává např. při prostém ohybu v neutrální ose, kde je normálové napětí nulové a působí pouze tangenciální napětí za ohybu, vyvozené posouvající silou. Mohrova kružnice má v tomto případě, zobrazeném na obrázku 8.68, střed v počátku souřadného systému σ , τ , hlavní napětí jsou rovna

$$\sigma_1 = +\tau_{xy} \quad \sigma_2 = -\tau_{xy}$$

Hlavní osy napjatosti jsou od souřadných os X , Y odkloněny o úhel 45° , a to při kladném τ_{xy} je směr hlavního tahu pod úhlem $\alpha_1 = +45^\circ$ a hlavního tlaku pod úhlem $\alpha_2 = -45^\circ$, při záporném τ_{xy} je tomu naopak.



Obr. 8.68. Mohrova kružnice při čistém smyku

Zvláštní případ rovinné napjatosti nastává tehdy, je-li $\sigma_x = \sigma_y$, $\tau_{xy} = 0$. Potom se Mohrova kružnice redukuje na bod, obě hlavní napětí jsou stejná $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_x$ a tangenty směrových úhlů hlavních napětí dané vztahem (8.105) nebo (8.100) jsou neurčitě výrazy $\frac{0}{0}$ - napětí ve všech směrech v rovině XY je stejné a tangenciální napětí k libovolné plošce kolmé k rovině XY je nulové. Ovšem protože σ_3 je rovno nule, vzniká v rovinách svírajících s osou Z úhel 45° tangenciální napětí

$$\max \tau = \frac{16x}{2}$$

Nakreslíme-li na plošné konstrukci ve stavu rovinné napjatosti ve všech bodech směry hlavních napětí, dostaneme tak dvě soustavy křivek sledujících po celé konstrukci směry hlavních napětí. Tyto křivky nazýváme isostatické křivky nebo též trajektorie hlavních napětí.

Jsou to dvě soustavy, hlavního tahu a hlavního tlaku. Bývá zvykem kreslit trajektorie hlavního tahu čárkovaně.

Příklad 8.8.1.

Určete velikost a směry hlavních napětí, je-li $\sigma_x = 14 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -8 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 16 \text{ MPa}$. Nakreslete též Mohrovu kružnici.

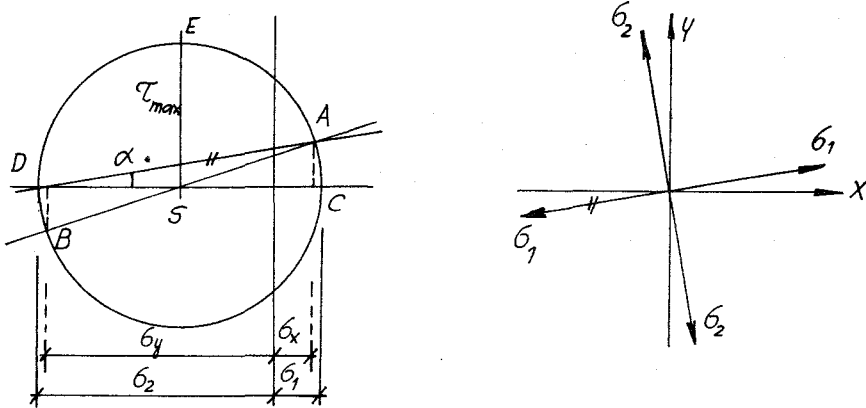
Řešení: Velikost hlavních napětí určují vztahy (8.104). Po dosazení vychází

$$\sigma_1 = \frac{14-8}{2} + \sqrt{\left(\frac{14+8}{2}\right)^2 + 16^2} = -3,3 + 4,9649 = 1,6649 \text{ MPa},$$

$$\sigma_2 = \frac{14-8}{2} - \sqrt{\left(\frac{14+8}{2}\right)^2 + 16^2} = -3,3 - 4,9649 = -8,2649 \text{ MPa}.$$

Směry hlavních napětí jsou dány vztahem (8.105), ze kterého dostáváme

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1,6649 - 14}{16} = 0,1655, \quad \alpha_1 = 9^\circ 24'$$



Obr. 8.69. Mohrova kružnice a směry hlavních napětí v příkladu 8.8.1.

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{-8,2649 - 1,4}{1,6} = -6,0405, \quad \alpha_2 = 99^\circ 24'$$

Největší tangenciální napětí v rovině XY má podle (8.108) hodnotu

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{1,4+8}{2}\right)^2 + 1,6^2} = 4,9649 \text{ MPa}$$

a působí v rovinách odkloněných o 45° od hlavních os napjatosti, tedy pod úhly

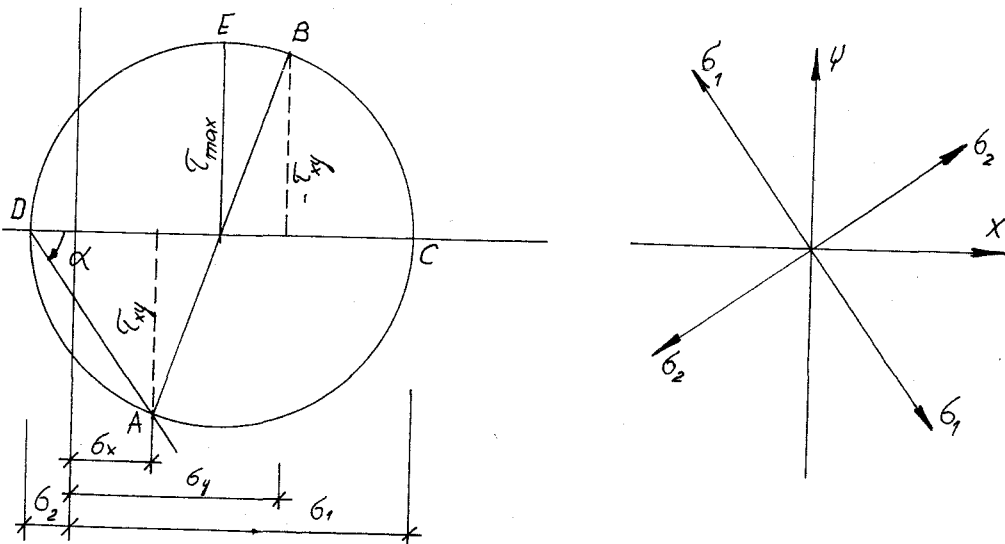
$$\alpha_3 = \alpha_1 + 45^\circ = 54^\circ 24', \quad \alpha_4 = \alpha_1 + 135^\circ = 144^\circ 24'$$

Protože obě hlavní napětí mají různá znaménka, je τ_{\max} současně největším tangenciálním napětím v bodě. Mohrova kružnice pro tento příklad je uvedena na obr. 8.69.

Příklad 8.8.2.

Určete velikosti a směry hlavních napětí, je-li $\sigma_x = 1,4 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 3,7 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = -3,2 \text{ MPa}$.

Řešení: Pomocí vztahů (8.104) určíme velikosti hlavních napětí



Obr. 8.70. Mohrova kružnice a směry hlavních napětí v příkladu 8.8.2.

$$\sigma_1 = \frac{14 + 3,7}{2} + \sqrt{\left(\frac{14 - 3,7}{2}\right)^2 + (-3,2)^2} = 2,55 + 3,4004 = 5,9504 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{14 + 3,7}{2} - \sqrt{\left(\frac{14 - 3,7}{2}\right)^2 + (-3,2)^2} = 2,55 - 3,4004 = -0,8504 \text{ MPa}$$

Směry hlavních napětí určíme ze vztahu (8.105) a dostáváme

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{5,9504 - 1,4}{-3,2} = -1,4220, \quad \alpha_1 = 125^\circ 07'$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{-0,8504 - 1,4}{-3,2} = +0,7032, \quad \alpha_2 = 35^\circ 07'$$

Velikost největšího tangenciálního napětí v rovině XY získáme ze vztahu (8.108) a je

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{14 - 3,7}{2}\right)^2 + (-3,2)^2} = 3,4004 \text{ MPa}$$

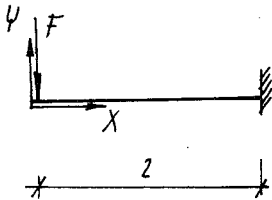
což je současně největší tangenciální napětí v bodě. Mohrova kružnice je pro tento příklad narysována na obrázku 8.70.

Příklad 8.8.3.

Nakreslete isostatické křivky na konzole délky $l = 2 \text{ m}$ a průřezu $0,3 \times 0,6 \text{ m}$, zatížená na konci osamělým břemenem $F = 27 \text{ kN}$.

Řešení: Ohybový moment na konzole zatížená osamělým břemenem (obr. 8.71) se mění lineárně podle rovnice

$$M = -F \cdot x,$$



Obr. 8.71. Konzola zatížená osamělým břemenem.

a protože pro normálové napětí za prostého ohybu platí závislost (8.45), je

$$\sigma_x = \frac{(-F \cdot x) \cdot y}{\frac{1}{12} b h^3} = + \frac{12 \cdot 27 \cdot x \cdot y}{0,3 \cdot 0,6^3} = + 5000 \cdot x y$$

Pro tangenciální napětí za ohybu platí vztah (8.88) resp. v úpravě pro obdélníkový průřez (8.92), podle kterého je

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{h^2 - 4y^2}{b h^3} \cdot T = - \frac{3}{2} \frac{0,6^2 - 4y^2}{0,3 \cdot 0,6^3} (-27) = + 2500(0,09 - y^2)$$

Na horním okraji nosníku, to je pro $y = +0,3 \text{ m}$, je tangenciální napětí nulové a normálové napětí σ_x kladné. Body na tomto okraji jsou proto namáhány prostým tahem, směr hlavního napětí σ_1 (hlavní tah) je vodorovný a hlavní tlak je svislý (hlavní napětí σ_2 nazýváme hlavním tlakem, i když má nulovou hodnotu). Na dolním okraji nosníku, to je pro $y = -0,3 \text{ m}$, je též tangenciální napětí nulové, normálové napětí σ_x je záporné. Body na tomto okraji jsou proto namáhány prostým tlakem, hlavní tah je svislý a hlavní tlak vodorovný. Ve středních vlákněch - pro $y = 0$ - je normálové napětí σ_x nulové a tangenciální napětí τ_{xy} je kladné. Body na podélné ose nosníku jsou tedy namáhány čistým smykem a hlavní napětí mají hodnotu $\sigma_1 = |\tau_{xy}| = \tau_{xy}$, $\sigma_2 = -|\tau_{xy}| = -\tau_{xy}$. Podle vztahu (8.105) je tedy hlavní tah odkloněn o úhel $\alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{\sigma_1 - 0}{\tau_{xy}} = 45^\circ$, hlavní tlak odkloněn o úhel $\alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{\sigma_2 - 0}{\tau_{xy}} = 135^\circ$.

Abychom mohli vykreslit isostatické křivky, vypočteme ještě úhly hlavních napětí ve čtvrtině a ve třech čtvrtinách výšky nosníku. Pro $y = +h/4$ je

$$\tau_{xy} = 2500 \left[0,09 - \left(\frac{0,6}{4}\right)^2 \right] = 168,75 \text{ kPa}$$

a normálové napětí σ_x se řídí rovnicí

$$\sigma_x = 5000 \cdot x \cdot \frac{0,5}{4} = 750 x.$$

Typočtème úhly hlavního tahu ve čtvrtinách délky konzoly.

$$x=0: \quad \sigma_x=0 \quad \sigma_y = + |\tau_{xy}| = 168,75, \quad \alpha_1 = \arctg \frac{168,75-0}{168,75} = 45^\circ;$$

$$x = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ m}: \quad \sigma_x = 750 \cdot 0,25 = 375 \text{ kPa} \quad \sigma_y = \frac{375+0}{2} + \sqrt{\left(\frac{375-0}{2}\right)^2 + 168,75^2} = 439,76 \text{ kPa},$$

$$\alpha_1 = \arctg \frac{439,76-375}{168,75} = 21^\circ 00';$$

$$x = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ m}: \quad \sigma_x = 750 \cdot 0,5 = 750 \text{ kPa} \quad \sigma_y = \frac{750+0}{2} + \sqrt{\left(\frac{750-0}{2}\right)^2 + 168,75^2} = 786,22 \text{ kPa}$$

$$\alpha_1 = \arctg \frac{786,22-750}{168,75} = 12^\circ 07';$$

$$x = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ m}: \quad \sigma_x = 750 \cdot 0,75 = 1125 \text{ kPa} \quad \sigma_y = \frac{1125+0}{2} + \sqrt{\left(\frac{1125-0}{2}\right)^2 + 168,75^2} = 1149,77 \text{ kPa},$$

$$\alpha_1 = \arctg \frac{1149,77-1125}{168,75} = 8^\circ 21';$$

$$x = 1 = 1,0 \text{ m}: \quad \sigma_x = 750 \cdot 1 = 1500 \text{ kPa} \quad \sigma_y = \frac{1500+0}{2} + \sqrt{\left(\frac{1500-0}{2}\right)^2 + 168,75^2} = 1518,75 \text{ kPa}$$

$$\alpha_1 = \arctg \frac{1518,75-1500}{168,75} = 6^\circ 20'.$$

Pro $y = -\frac{h}{4}$ je tangenciální napětí stejné jako pro $y = +\frac{h}{4}$ a normálové napětí má obrácené znaménko. Ve čtvrtinách délky konzoly budou tedy úhly hlavního tahu

$$x=0: \quad \sigma_x=0 \quad \sigma_y = 168,75 \quad \alpha_1 = 45^\circ;$$

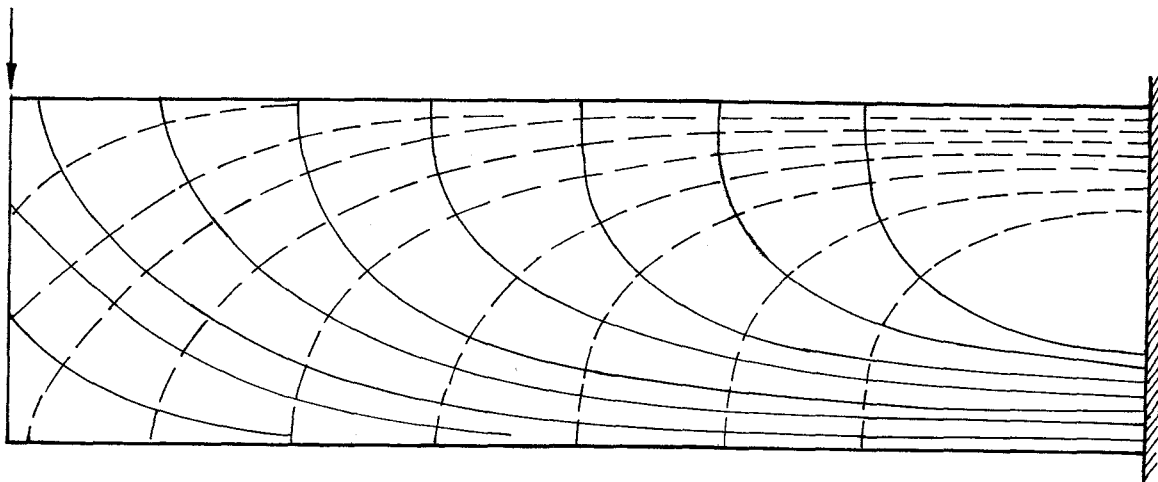
$$x=0,25 \text{ m}: \quad \sigma_x = -375 \text{ kPa}, \quad \sigma_y = \frac{-375+0}{2} + \sqrt{\left(\frac{-375-0}{2}\right)^2 + 168,75^2} = 64,76 \text{ kPa}, \quad \alpha_1 = \arctg \frac{64,76+375}{168,75} = 69^\circ;$$

$$x=0,5 \text{ m}: \quad \sigma_x = -750 \text{ kPa}, \quad \sigma_y = \frac{-750+0}{2} + \sqrt{\left(\frac{-750-0}{2}\right)^2 + 168,75^2} = 36,22 \text{ kPa}, \quad \alpha_1 = \arctg \frac{36,22+750}{168,75} = 77^\circ 53';$$

$$x=0,75 \text{ m}: \quad \sigma_x = -1125 \text{ kPa}, \quad \sigma_y = \frac{-1125+0}{2} + \sqrt{\left(\frac{-1125-0}{2}\right)^2 + 168,75^2} = 24,77 \text{ kPa}, \quad \alpha_1 = \arctg \frac{24,77+1125}{168,75} = 81^\circ 39';$$

$$x=1,0 \text{ m}: \quad \sigma_x = -1500 \text{ kPa}, \quad \sigma_y = \frac{-1500+0}{2} + \sqrt{\left(\frac{-1500-0}{2}\right)^2 + 168,75^2} = 18,75 \text{ kPa}, \quad \alpha_1 = \arctg \frac{18,75+1500}{168,75} = 83^\circ 40'.$$

Isostatické křivky nyní vykreslíme tak, že si v jednotlivých určených bodech vyneseme vypočtené úhly hlavních napětí a do této osnovy pak vykreslíme spojitě čáry. Isostatické křivky jsou vyneseny na obrázku 8.72.



Obr. . Isostatické křivky (trajektorie hlavních napětí) na konzole zatížené osamělým břemenem.

Příklad 8.8.4.

Vypočtete velikost napětí $\tilde{\sigma}_x$, $\tilde{\sigma}_y$, $\tilde{\tau}_{xy}$, mají-li hlavní napětí velikost $\tilde{\sigma}_1 = 280$ MPa, $\tilde{\sigma}_2 = 0$; úhel hlavního napětí $\tilde{\sigma}_1$ od osy X je $\alpha_1 = 60^\circ$.

Výsledek: $\tilde{\sigma}_x = 70$ MPa, $\tilde{\sigma}_y = 210$ MPa, $\tilde{\tau}_{xy} = 121,24$ MPa

Příklad 8.8.5.

Vypočtete velikost napětí $\tilde{\sigma}_x$, $\tilde{\sigma}_y$, $\tilde{\tau}_{xy}$, mají-li hlavní napětí velikost $\tilde{\sigma}_1 = 280$ MPa, $\tilde{\sigma}_2 = -280$ MPa; úhel hlavního napětí $\tilde{\sigma}_1$ od osy X je $\alpha_1 = 60^\circ$.

Výsledek: $\tilde{\sigma}_x = -140$ MPa, $\tilde{\sigma}_y = 140$ MPa, $\tilde{\tau}_{xy} = 242,48$ MPa

9. V Z P Ě R N Á P E V N O S T

9.1. Stabilita pružných soustav.

Doposud jsme se zabývali pouze takovými případy, kdy je napětí v průřezu přímo úměrné zatížení. Zvětšujeme-li zatížení, vzrůstá úměrně tomu i napětí v tělese, až při jistém zatížení dojde k porušení tělesa přetržením, rozdrčením nebo usmyknutím. Ale můžeme se setkat i s jiným způsobem porušení konstrukce. Na obrázku 9.1 je uveden jednoduchý případ trojkloubového oblouku, který se skládá ze dvou přímých prutů délky l a je zatížen

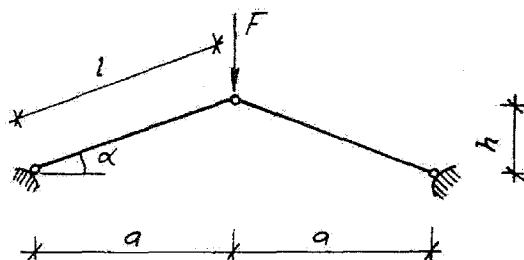
ve středním kloubu osamělým břemenem F . Pokud je vzepětí oblouku h oproti rozpětí $2a$ dostatečně velké, můžeme osové síly v prutech vypočítat z podmínek rovnováhy na nepřetvořené konstrukci

$$S = \frac{F}{2 \sin \alpha}$$

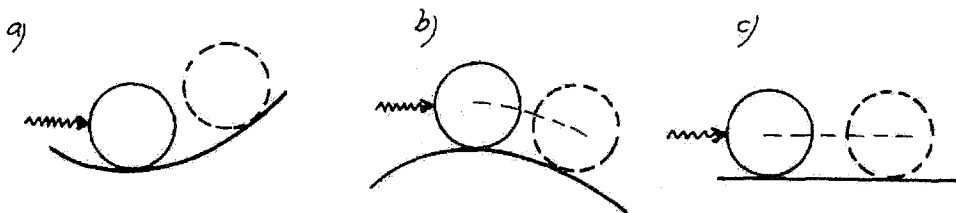
Prvším když je vzepětí oblouku malé, vyvolá zkrácení prutů vlivem osových sil značnou změnu úhlu α a je třeba

zvažovat rovnováhu na přetvořené konstrukci. Při malé hodnotě úhlu α může dojít k tomu, že účinkem břemene F vznikne v prutech napětí značně menší než přípustná mez, ale stlačení prutů bude takové, že střední kloub poklesne na úroveň obou krajních kloubů. V této poloze se ovšem nemůže udržet, dochází k propadnutí konstrukce. A ačkoliv v tomto případě nebyla pevnost materiálu ještě zdaleka vyčerpána, je konstrukce nepoužitelná. Říkáme, že ztratila stabilitu, a břemeno, při němž ke ztrátě stability dochází, nazýváme kritickým břemenem.

Konstrukce se může nalézat v rovnováze stabilní, labilní nebo indiferentní. Rozdíl mezi těmito třemi druhy rovnováhy můžeme ukázat na příkladu z mechaniky tuhých těles (obr. 9.2). Jestliže umístíme kuličku do duté misky (obr. 9.2a), potom při vychýlení se její těžiště zvedá, čímž se zvětšuje její potenciální energie. Proto v okamžiku, kdy vnější síla přestane působit, vrací se kulička zpět do původní polohy. Říkáme, že kulička v duté misce je v rovnováze stabilní. Umístíme-li kuličku na vrchol vypuklé misky (obr. 9.2b), potom při jejím posunutí těžiště klesá. I když vnější síla přestane působit, kulička pokračuje dále v pohybu. Říkáme, že kulička na vrcholu vypuklé plochy je v rovnováze labilní. Rozhraní mezi uvedenými dvěma rovnováhami tvoří případ, kdy kuličku umístíme na rovnou plochu (obr. 9.2c). Při jejím posunutí zůstává těžiště ve stejné výšce, kulička



Obr. 9.1. Trojkloubový oblouk.



Obr. 9.2. Rovnováha a) stabilní, b) labilní, c) indiferentní

může být v klidu v jakékoliv poloze. Kulička na rovině je v rovnováze indiferentní.

Obdobně mohou nastat tyto případy rovnováhy u tlačeného štíhlého prutu (obr. 9.3). Uvažujme prut zatížený osovou silou F a vychylme jej ze svislé polohy dočasně působící silou F_2 . Pokud je síla F malá, potom se po ukončení působení síly F_2 prut vrací zpět do svislé polohy - je v rovnováze stabilní. Vyrůstá-li síla F , pak při její určité velikosti je možno prut nepatrně vychýlit do libovolné polohy. V této vychýlené poloze zůstane - je v rovnováze indiferentní.



Obr. 9.3. Tlačený prut.

9.2. Eulerovo řešení vzpěrné pevnosti.

Pojmem vzpěra označujeme v technické praxi štíhlé tlačené pruty a jejich únosnost (pevnost) označujeme jako vzpěrná pevnost. Určení vzpěrné pevnosti spočívá ve výpočtu kritického břemene F_k , to je takové centricky působící tlakové síly, při níž se prut nachází v indiferentní rovnováze (při vychýlení se nevrací do původní přímé polohy, ale zůstává v nové poloze).

Uvažujme vzpěru konstantního průřezu upevněnou na jednom konci kloubově a na druhém posuvně, zatíženou tlakovou silou F (obr. 9.4). Tato vzpěra byla dočasně působícím zatížením vychýlena ze svislé polohy. Průhyb v obecném průřezu vzdáleném od spodní podpory o x označme w . Ze tří statických výminek rovnováhy vyplývá, že jedinou reakcí je svislá složka v kloubu, která má velikost F . Ohybový moment v místě x bude tedy roven

$$M = F \cdot w$$

Ohybový moment na nosníku můžeme ovšem určit též pomocí diferenciální rovnice ohybové čáry (8.70), podle které je

$$M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$$

Ze srovnání obou výrazů pro ohybový moment dostáváme pak diferenciální rovnici ohybové čáry při vzpěru

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} + F \cdot w = 0, \quad (9.1)$$

která má řešení

$$w = C_1 \sin \sqrt{\frac{F}{EI}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{F}{EI}} x. \quad (9.2)$$

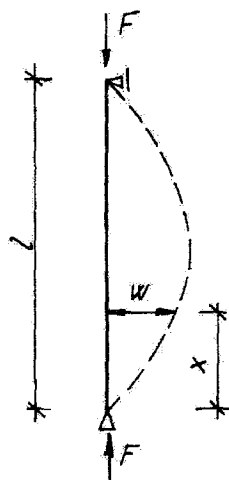
V kloubu musí být průhyb nulový, tedy pro

$$x = 0 \dots w = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

Druhá okrajová podmínka vyplývá z toho, že i v posuvné podpoře musí být průhyb nulový, t.j.

$$x = l \dots w = 0 \Rightarrow C_1 \sin \sqrt{\frac{F}{EI}} l = 0$$

Tato podmínka má jednak triviální řešení $C_1 = 0$, které odpovídá stabilní rovnováze, jednak řešení pro kritické břemeno



Obr. 9.4. Vzpěra podepřená kloubem a posuvem.

$$\sin \sqrt{\frac{F_k}{EI}} l = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{F_k}{EI}} l = k\pi, \quad F_k = k^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

kde k je celé číslo. Jako řešení dostáváme tak soustavu kritických břemen

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \quad \frac{4\pi^2 EI}{l^2}, \quad \frac{9\pi^2 EI}{l^2}, \dots$$

Položíme-li $F = F_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ do rovnice ohybové čáry (9.2) a současně dosadíme $C_2 = 0$, dostává ohybová čára při vzpěru rovnici

$$W = C_1 \sin \frac{\pi x}{l},$$

ohybová čára je tedy jedna půlvlna sinusoidy, body s nulovou pořadnicí a současně i inflexní body ohybové čáry jsou na obou koncích nosníku. Položíme-li za tlakovou sílu F druhý kořen rovnice $F = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$, dostáváme jako ohybovou čáru dvě půlvlny sinusoidy Indiferentní rovnováha nastává ovšem již při první velikosti kritického břemene, další kritická břemena odpovídají podepření kromě na koncích ještě v dalších uzlových bodech. Kritické břemeno pro $k=1$ nazýváme též Eulerovo břemeno

$$F_k = F_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (9.3)$$

Nejmenší kritické břemeno nastává pro nejmenší moment setrvačnosti, proto prut při vzpěru vybočuje vždy ve směru nejmenšího momentu setrvačnosti. Zavádíme tedy do **vzorce** (9.3) minimální moment setrvačnosti.

Je-li prut na obou koncích vetknut (obr. 9.5), působí na horním vetknutém konci kromě osové síly F ještě moment ve vetknutí M_0 a případně i posouvající síla T . Bude se tedy ohybový moment v průřezu x rovnat

$$M = F \cdot w + T(l-x) + M_0$$

a ze srovnání s diferenciální rovnicí ohybové čáry (8.70) vyplývá

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} + F \cdot w = -T(l-x) - M_0 \quad (9.4)$$

Rovnice (9.4) představuje diferenciální rovnici oboustranně vetknuté vzpěry. Je to nehomogenní diferenciální rovnice druhého řádu. Její řešení je rovno součtu řešení w_1 homogenní diferenciální rovnice (9.1) a partikulárního řešení w_2 rovnice (9.4), které má na př. tvar

$$w_2 = -\frac{T(l-x) + M_0}{F}$$

Obecné řešení rovnice (9.4) tedy je

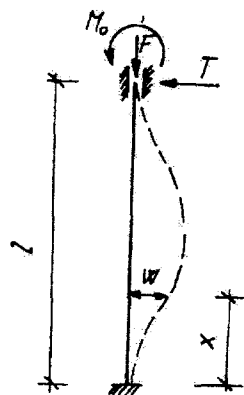
$$W = C_1 \sin \sqrt{\frac{F}{EI}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{F}{EI}} x - \frac{T(l-x) + M_0}{F}$$

Reakce i ohybová čára vzpěry po obou stranách vetknutí jsou symetrické, musí tedy vodorovná složka reakce v horním i v dolním vetknutí být stejně veliká a mít i stejný smysl. Současně ale musí platit směrová výminka rovnováhy ve vodorovném směru. A obojí současně splňuje pouze nulová posouvající složka reakce,

$$T = 0.$$

Rovnice ohybové čáry se tak zjednodušuje na

$$W = C_1 \sin \sqrt{\frac{F}{EI}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{F}{EI}} x - \frac{M_0}{F} \quad (9.5)$$



Obr. 9.5. Vzpěra vetknutá oboustranně.

Ve vetknutí musí být průhyb i pootočení /první derivace ohybové čáry/ nulové, takže musí být splněny podmínky

$$\begin{aligned} x=0 \dots w=0 & \Rightarrow C_2 - \frac{M_0}{F} = 0, \\ x=0 \dots \frac{dw}{dx} = 0 & \Rightarrow C_1 \sqrt{\frac{F}{EI}} = 0, \\ x=l \dots w=0 & \Rightarrow C_1 \sin \sqrt{\frac{F}{EI}} l + C_2 \cos \sqrt{\frac{F}{EI}} l - \frac{M_0}{F} = 0, \\ x=l \dots \frac{dw}{dx} = 0 & \Rightarrow C_1 \sqrt{\frac{F}{EI}} \cos \sqrt{\frac{F}{EI}} l - C_2 \sqrt{\frac{F}{EI}} \sin \sqrt{\frac{F}{EI}} l = 0 \end{aligned}$$

Z první podmínky získáváme $C_2 = \frac{M_0}{F}$ a z druhé $C_1 = 0$. Po dosazení těchto konstant do třetí a čtvrté rovnice vychází

$$\begin{aligned} \frac{M_0}{F} (\cos \sqrt{\frac{F}{EI}} l - 1) &= 0, \\ \frac{M_0}{F} \sqrt{\frac{F}{EI}} \sin \sqrt{\frac{F}{EI}} l &= 0 \end{aligned}$$

Tyto podmínky mají jednak triviální řešení $M_0 = 0$, které odpovídá stabilní rovnováze, jednak řešení

$$\sqrt{\frac{F_k}{EI}} l = k \cdot 2\pi \Rightarrow F_k = k^2 \frac{\pi^2 EI}{(\frac{l}{2})^2}$$

Nejmenší hodnota kritického břemene je pro $k=1$

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{(\frac{l}{2})^2} \quad (9.6)$$

Vidíme, že na oboustranně vetknutém nosníku je kritické břemeno čtyřikrát větší než na prostém nosníku, nosník oboustranně vetknutý má čtyřnásobnou únosnost. Dosadíme-li za tlakovou sílu F kritické břemeno podle (9.6) do rovnice ohybové čáry (9.5), dostaneme

$$w = \frac{M_0}{F} \left(\cos \frac{2Fx}{l} - 1 \right).$$

Ohybová čára nosníku oboustranně vetknutého má inflexní body (místa, kde je druhá derivace nulová) $x = \frac{l}{4}$ a $x = \frac{3}{4} l$; vzdálenost inflexních bodů je $\frac{l}{2}$.

Uvažujme nyní konzolu centricky tlačenu (obr. 9.6). Označíme-li průhyb volného konce konzoly jako w_0 , budou ohybové momenty v místě x

$$M = -F(w_0 - w),$$

a protože je současně $M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$, platí pro ohybovou čáru tlačené konzoly diferenciální rovnice

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} + F \cdot w = F \cdot w_0 \quad (9.7)$$

Řešení se opět sestává z obecného řešení (9.2) homogenní diferenciální rovnice (9.1) a partikulárního integrálu, který je $w = w_0$. Ohybová čára konzoly má tedy rovnici

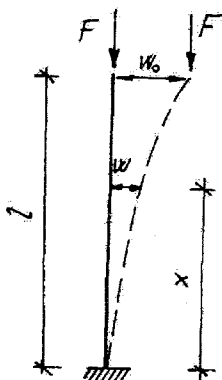
$$w = C_1 \sin \sqrt{\frac{F}{EI}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{F}{EI}} x + w_0 \quad (9.8)$$

Pro neznámé C_1, C_2, w_0 máme tři geometrické okrajové podmínky

$$x=0 \dots w=0 \Rightarrow C_2 + w_0 = 0,$$

$$x=0 \dots \frac{dw}{dx} = 0 \Rightarrow C_1 \sqrt{\frac{F}{EI}} = 0,$$

$$x=l \dots w=w_0 \Rightarrow C_1 \sin \sqrt{\frac{F}{EI}} l + C_2 \cos \sqrt{\frac{F}{EI}} l = 0.$$



Obr. 9.6. Konzola.

Z prvních dvou rovnic vyplývá

$$C_2 = -w_0, \quad C_1 = 0,$$

takže třetí rovnice má po dosazení tvar

$$-w_0 \cos \sqrt{\frac{F}{EI}} l = 0,$$

a netriviální řešení má jen v případě, kdy

$$\sqrt{\frac{F_k}{EI}} l = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi.$$

Pro $k=0$ dostáváme první kritické břemeno

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} \quad (9.9)$$

Kritické břemeno je tedy na konzole čtyřikrát menší než na prostém nosníku. Ohybová čára má rovnici

$$w = w_0 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right),$$

vzdálenost inflexních bodů na ohybové čáře je $2l$.

Máme-li prut, který je na jednom konci vetknutý a na druhém podepřený posuvně (obr.9.7), vzniká v posuvné podpoře vodorovná složka reakce T . Ohybový moment v průřezu vzdáleném x od spodní podpory se bude rovnat

$$M = T \cdot (l-x) + F \cdot w.$$

Po dosazení za ohybový moment $M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$ dostáváme diferenciální rovnici ve tvaru

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} + F \cdot w = -T(l-x) \quad (9.10)$$

Tato rovnice má partikulární řešení $w_2 = -\frac{T(l-x)}{F}$ a po sečtení s obecným řešením (9.2) homogenní diferenciální rovnice dostáváme rovnici ohybové čáry

$$w = C_1 \sin \sqrt{\frac{F}{EI}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{F}{EI}} x - T(l-x) \quad (9.11)$$

Rovnice (9.11) musí splňovat geometrické okrajové podmínky

$$x=0 \dots w=0 \Rightarrow C_2 - T \cdot l = 0$$

$$x=0 \dots \frac{dw}{dx} = 0 \Rightarrow C_1 \sqrt{\frac{F}{EI}} + T = 0,$$

$$x=l \dots w=0 \Rightarrow C_1 \sin \sqrt{\frac{F}{EI}} l + C_2 \cos \sqrt{\frac{F}{EI}} l - 0.$$

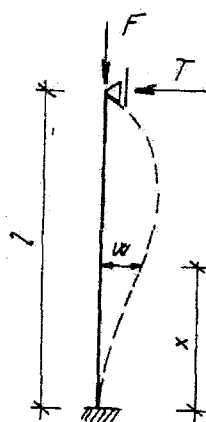
Jedná se o soustavu tří lineárních rovnic pro neznámé C_1, C_2, T . Soustava má nulové pravé strany, takže netriviální řešení existuje pouze tehdy, když determinant soustavy je nulový, tedy

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -l \\ \sqrt{\frac{F}{EI}} & 0 & 1 \\ \sin \sqrt{\frac{F}{EI}} l & \cos \sqrt{\frac{F}{EI}} l & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Rozepsáním determinantu dostáváme podmínku

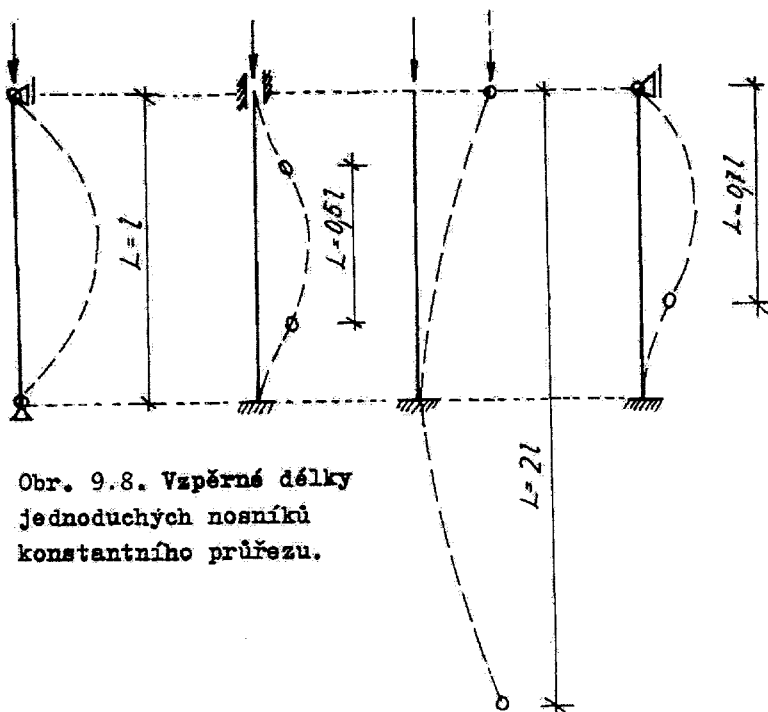
$$\sin \sqrt{\frac{F}{EI}} l - \sqrt{\frac{F}{EI}} l \cos \sqrt{\frac{F}{EI}} l = 0$$

Dělíme-li tuto rovnici $\cos \sqrt{\frac{F}{EI}} l$, dostáváme transcendentní rovnici



Obr. 9.7. Jednostranně vetknutý nosník.





Obr. 9.8. Vzpěrné délky jednoduchých nosníků konstantního průřezu.

$$\operatorname{tg} \sqrt{\frac{F_k}{E I}} l = \sqrt{\frac{F_k}{E I}} l$$

která má řešení

$$\sqrt{\frac{F_k}{E I}} l = 1,4303 \pi$$

$$F_k = \frac{2,0457 \pi^2 E I}{l^2}$$

$$= \frac{\pi^2 E I}{(0,71)^2} \quad (9.12)$$

Hodnotu kritického břemene můžeme ve všech případech vyjádřit společným vzorcem

$$F_k = \frac{\pi^2 E I}{L^2} \quad (9.13)$$

kde L nazýváme vzpěrnou délkou. Tato vzpěrná délka, která je rovna vzdálenosti inflexních bodů na ohybové čáře, je v případě prostého nosníku rovna rozpětí nos-

níku, u nosníku oboustranně vetknutého polovině délky, u konzoly dvojnásobku délky a u nosníku na jedné straně vetknutého a na druhé prostě podepřeného je rovna sedmi desetinám délky (obr. 9.8).

9.3. Součinitel vzpěrnosti.

Aby konstrukce neztratila stabilitu, nesmí tlaková síla přestoupit kritické břemeno F_k dané vzorcem (9.13). Je-li prut namáhán tlakovou silou F_k , vzniká v něm podle (8.14) normálové napětí

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A}$$

Po dosazení za kritické břemeno F_k podle (9.13) a s uvážením, že $I = A \cdot i^2$, dostáváme pro napětí při kritickém zatížení

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{i}\right)^2}$$

Vidíme, že normálové napětí, které v nosníku nesmí být překročeno, aby prut neztratil stabilitu, je mimo modulu pružnosti E závislé na poměru vzpěrné délky L a (minimálního) poloměru setrvačnosti i . Tento poměr nazýváme štíhlostní poměr a označujeme λ , tedy

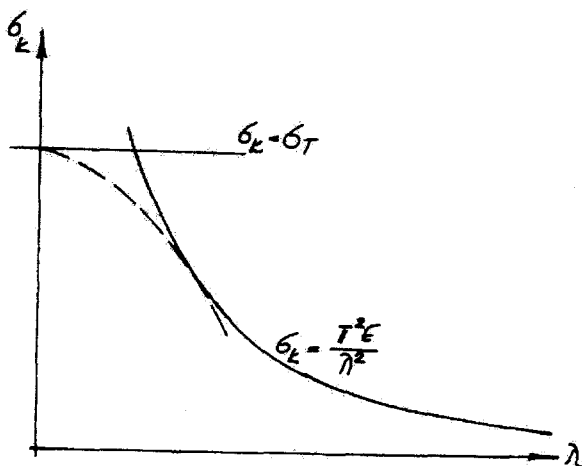
$$\lambda = \frac{L}{i} \quad (9.14)$$

Při zavedení štíhlostního poměru podle (9.14) dostáváme pro kritické napětí

$$\sigma_k = \frac{2 E}{\lambda^2} \quad (9.15)$$

Vynesme závislost mezi kritickým napětím a štíhlostním poměrem. Je to hyperbola druhého stupně. Současně však nesmí normálové napětí v prutu přestoupit mez prů-

tažnosti σ_T , kdy deformace v prutu značně vzrůstají. Je tedy maximálně přípustné normálové napětí dáno čarou, která je pro hodnoty $\lambda \geq \sqrt{\frac{E}{\sigma_T}}$ hyperbola druhého stupně a pro menší hodnoty přímka (obr. 9.9). Omezující křivka bývá v místě zlomu nahrazována parabolou, která má s hyperbolou i přímkou společné tečny. Na obrázku 9.9 je tato parabola nakreslena čárkovaně.



Obr. 9.9. Závislost maximálního normálového napětí a štíhlostního poměru.

Ovšem zrovna tak jako při prostém tlaku nemůžeme v konstrukci ani její části připustit vznik napětí na mezi průtažnosti, ale pouze dané mezní napětí, nemůžeme ani při vzpěrném tlaku připustit kritické napětí. Konstrukce musí mít ještě předem stanovenou bezpečnost proti ztrátě stability. Označíme-li tuto míru bezpečnosti písmenem k , nesmí napětí při vzpěru překročit hodnotu

$$\sigma \leq \frac{\pi^2 E}{k \lambda^2} \quad (9.16)$$

Toto maximální napětí vyjadřujeme zlomkem mezního napětí

$$\frac{\pi^2 E}{k \lambda^2} = R \cdot \varphi$$

kde φ se nazývá součinitel vzpěrnosti a v pružném oboru, kde $\sigma < \sigma_T$, je roven

$$\varphi = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 k R} \quad (9.17)$$

Součinitel vzpěrnosti φ , který je vždy menší než 1 (při prostém tlaku $\varphi = 1$) obvykle neurčujeme pomocí vztahu (9.17), ale normy pro různý materiál jej udávají v závislosti na štíhlostním poměru λ ve formě tabulek.

Posouzení prutu namáhaného na vzpěrný tlak pak vypadá tak, že

- 1) určíme minimální poloměr setrvačnosti i_{min} a vzpěrnou délku L
- 2) vypočteme štíhlostní poměr $\lambda = \frac{L}{i_{min}}$
- 3) v tabulkách pro daný materiál nalezneme v závislosti na štíhlostním poměru λ vzpěrnostní součinitel φ
- 4) posoudíme, zda tlakové normálové napětí nepřestoupí dané mezní napětí redukované vzpěrnostním součinitelem

$$|\sigma| = \frac{F}{A} \leq R \cdot \varphi \quad (9.18)$$

Při návrhu prutu postupujeme iteračním způsobem. Nejprve odhadneme vzpěrnostní součinitel φ_1 , např. $\varphi_1 = 0,6$. Pomocí tohoto vzpěrnostního součinitele zjistíme nutnou plochu, která podle vztahu (9.18) musí být

$$A_{nut} \geq \frac{F}{R \cdot \varphi} \quad (9.19)$$

a navrhujeme průřez. Při tom v případě, že můžeme navrhnout více průřezů se stejnou plochou, volíme ten, který má největší minimální poloměr setrvačnosti. Potom

pomocí vztahu (9.14) určíme štíhlostní poměr λ a v tabulkách nalezneme vzpěrnostní součinitel φ_2 . Pro tento nový vzpěrnostní součinitel φ_2 pak opakujeme celý postup znovu. Iteraci ukončíme tehdy, když se dva po sobě následující vzpěrnostní součinitel už od sebe příliš neliší. Na závěr je bezpodmínečně nutné prut posoudit.

Příklad 9.3.1.

Jaké je kritické břemeno u sloupu délky 6 m provedeného ze dvou po délce svařených válcovaných profilů $\text{I } \text{Č.18}$. Sloup je podepřen jako prostý nosník (obr. 9.10). S jakou bezpečností se počítá, je-li mezní napětí oceli $R = 210 \text{ MPa}$ (210 N/mm^2).

Řešení: Ve statických tabulkách zjistíme, že momenty setrvačnosti jednoho I průřezu k vlastním těžišťovým osám jsou

$$I_{y_1} = 1,35 \cdot 10^7 \text{ mm}^4, \quad I_{z'} = 1,14 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$

Osa Y je současně těžišťovou osou celého průřezu, takže moment setrvačnosti celého průřezu k této ose bude roven prostému součtu momentů setrvačnosti obou profilů

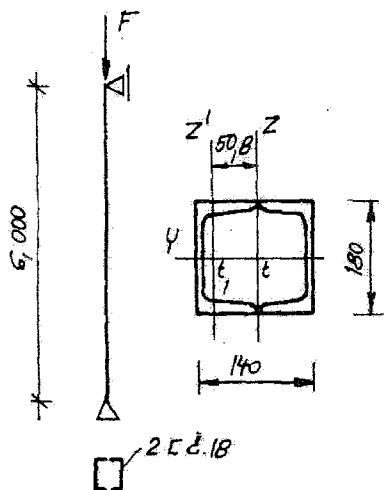
$$I_y = 2 I_{y_1} = 2,7 \cdot 10^7 \text{ mm}^4.$$

Moment setrvačnosti k těžišťové ose Z celého průřezu získáme pomocí Steinerovy věty. Plocha jednoho profilu je $A_1 = 2800 \text{ mm}^2$ a vzdálenost os Z a Z' je $y_1 = 50,8 \text{ mm}$, takže moment setrvačnosti k ose Z je

$$I_z = 2(1,14 \cdot 10^6 + 2800 \cdot 50,8^2) = 1,673 \cdot 10^7 \text{ mm}^4.$$

Osy Y, Z jsou osami symetrie, jsou to tedy centrální osy setrvačnosti, takže minimální moment setrvačnosti průřezu je

$$I_{\min} = I_z = 1,673 \cdot 10^7 \text{ mm}^4.$$



Obr. 9.10. Vzpěra jako prostý nosník.

Vzpěrná délka prostého nosníku je rovna délce nosníku, takže kritické břemeno podle (9.13) je

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 \cdot 21 \cdot 10^5 \cdot 1,673 \cdot 10^7}{6000^2} = 963,19 \cdot 10^3 \text{ N} = 963,19 \text{ kN}.$$

Při výpočtu dovoleného zatížení sloupu je třeba určit vzpěrnostní součinitel φ . Minimální poloměr setrvačnosti je

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{1,673 \cdot 10^7}{2 \cdot 2800}} = 54,658 \text{ mm},$$

takže štíhlostní poměr prutu je

$$\lambda = \frac{L}{i_{\min}} = \frac{6000}{54,658} = 109,8.$$

V tabulkách pak najdeme vzpěrnostní součinitel, odpovídající štíhlostnímu poměru λ . Pro $\lambda = 109,8$ je vzpěrnostní součinitel $\varphi = 0,48$. Podle vztahu (9.18) určíme mezní břemeno na sloupu

$$F_m = \varphi \cdot A \cdot R = 0,48 \cdot 5600 \cdot 210 = 564\,480 \text{ N} = 564,48 \text{ kN}$$

Toto mezní břemeno je tedy počítáno s bezpečností

$$k = \frac{F_k}{F_m} = \frac{963,19}{564,48} = 1,706$$

Příklad 9.3.2.

Navrhněte vzpěru délky $2H$, oboustranně vetknutou, na tlakovou sílu $F = 160 \text{ kN}$. Vzpěru navrhněte jako válcovaný rovnoramenný úhelník z oceli řady 37, mezní napětí je $R = 210 \text{ MPa}$.

Řešení: Vzpěrná délka oboustranně vetknutého nosníku je (obr. 9.11)

$$L = 957 = 954 = 2,0 \text{ m}$$

Vzpěrnostní součinitel odhadneme na $\varphi_1 = 0,7$ a při tomto vzpěrnostním součiniteli je podle (9.19) nutná plocha

$$A_{\text{nut}} = \frac{F}{R \cdot \varphi} = \frac{160\,000}{210 \cdot 0,7} = 1088 \text{ mm}^2$$

Této ploše nejbližší odpovídá $L\ 90 \cdot 90 \cdot 6$, který má plochu $A = 1063 \text{ mm}^2$ a minimální poloměr setrvačnosti $i_{\text{min}} = 17,7 \text{ mm}$. Štíhlostní poměr tedy je

$$\eta = \frac{L}{i_{\text{min}}} = \frac{2000}{17,7} = 113$$

a tomuto štíhlostnímu poměru odpovídá v tabulkách vzpěrnostní součinitel $\varphi_2 = 0,46$. Protože tento součinitel se značně liší od předpokládaného, je třeba návrh opravit. Pro vzpěrnostní součinitel φ vychází nutná plocha

$$A_{\text{nut}} = \frac{160\,000}{210 \cdot 0,46} = 1656 \text{ mm}^2$$

a plochu nejbližší potřebné má úhelník $L\ 110 \cdot 110 \cdot 8$, a to $A = 1723 \text{ mm}^2$. Tento úhelník má minimální poloměr setrvačnosti $i_{\text{min}} = 21,6 \text{ mm}$, takže štíhlostní poměr

$$\eta = \frac{2000}{21,6} = 92,6$$

Štíhlostnímu poměru η odpovídá vzpěrnostní součinitel $\varphi = 0,6$. Ukazuje se, že optimální návrh bude asi uprostřed, proto navrhne úhelník $L\ 100 \cdot 100 \cdot 8$. Tento úhelník posoudíme. Úhelník $L\ 100 \cdot 100 \cdot 8$ má nejmenší poloměr setrvačnosti $i_{\text{min}} = 19,6 \text{ mm}$ takže prut má pak štíhlostní poměr

$$\eta = \frac{2000}{19,6} = 102$$

Tomuto štíhlostnímu poměru odpovídá vzpěrnostní součinitel $\varphi = 0,53$. Plocha úhelníka je $A = 1563 \text{ mm}^2$, v úhelníku vzniká napětí

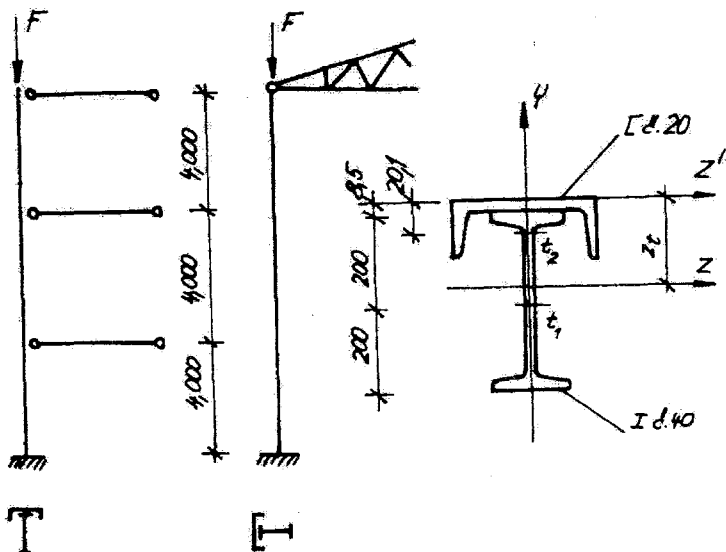
$$|\sigma| = \frac{F}{A} = \frac{160\,000}{1563} = 102,4 \text{ MPa} < R \cdot \varphi = 210 \cdot 0,53 = 111,3 \text{ MPa}$$

Navržený úhelník $L\ 100 \cdot 100 \cdot 8$ tedy vyhovuje.

Příklad 9.3.3.

Jakou silou můžeme zatížit sloup hrázdné stěny, zakreslený na obr. 9.12. Sloup se skládá z válcovaného profilu $I\ d\ 40$ a profilu $I\ d\ 20$. V příčném směru Y je podepřen ve vrcholu střešním vazníkem, v podélném směru Z je podepřen ve třetinách výšky vodorovnými ztuženými. Dole je sloup vetknut do základové patky.

Řešení: Nejprve určíme polohu těžiště a velikost hlavních centrálních poloměrů setrvačnosti průřezu. Vzdálenost těžiště od pomocné osy Z' je



Obr. 9.12. Sloup hrázděné stěny.

$$z_1 = \frac{208,5 \cdot 11800 + 201 \cdot 3220}{11800 + 3220} = 168,11 \text{ mm}$$

Protože osa Y je osou souměrnosti, je současně i hlavní centrální osou setrvačnosti. Momenty setrvačnosti k osám Y a Z jsou

$$I_y = 1,91 \cdot 10^7 + 416 \cdot 10^7 = 3,07 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$I_z = 2,921 \cdot 10^8 + 11800 \cdot (208,5 - 168,11)^2 + 148 \cdot 10^6 + 3220 \cdot (168,11 - 201)^2 = 3,8337 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

a příslušné poloměry setrvačnosti

$$i_y = \sqrt{\frac{3,07 \cdot 10^7}{15020}} = 45,21 \text{ mm}$$

$$i_z = \sqrt{\frac{3,8337 \cdot 10^8}{15020}} = 159,76 \text{ mm}$$

Při vybočení ve směru kolmém k ose Z vzdoruje poloměr setrvačnosti i_z , vzpěrná délka je jako u nosníku na jedné straně vetknutého a na druhém konci prostě podepřeného rovna $0,7$ rozpětí, tedy

$$L_z = 0,7 \cdot 12,0 = 8,4 \text{ m}$$

ve směru kolmém k Z je štíhlostní poměr

$$\eta_z = \frac{L_z}{i_z} = \frac{8400}{159,76} = 52,58$$

Při vybočení ve směru kolmém k ose Y může prut vybočit na výšku $l_y = 4 \text{ m}$. Vzpěrná délka se rovná vzdálenosti podpor

$$L_y = 4,0 \text{ m}$$

Štíhlostní poměr ve směru Y je

$$\eta_y = \frac{L_y}{i_y} = \frac{4000}{45,21} = 88,48$$

Rozhodující je větší štíhlostní poměr, to je η_y . Tomuto štíhlostnímu poměru odpovídá pro ocel řady 37 vzpěrnostní součinitel $\varphi = 0,64$. Dovolené zatížení sloupu je tedy

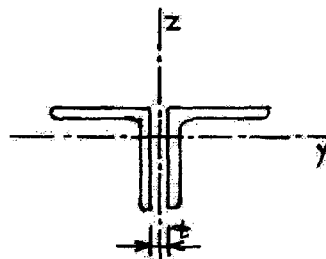
$$F_m = A \cdot R \cdot \varphi = 15020 \cdot 210 \cdot 0,64 = 2,019 \cdot 10^6 \text{ N}$$

Příklad 9.3.4.

Navrhněte a posuďte tlačенý prut příhradové soustavy. Prut je dlouhý 3,4 m a je zatížen silou $F = 420 \text{ kN}$. Prut navrhněte ze dvou úhelníků z oceli řady 37, mezní napětí 210 MPa. Úhelníky jsou navzájem spojeny ve třetinách délky, tloušťka styčnickového plechu $t = 12 \text{ mm}$.

Řešení: Jedná se o tzv. členěný prut (obr. 9.13),

který může vybočit dvojím způsobem : kolmo k ose Y (nazývané hmotná osa) a kolmo k ose Z (nehmotná osa). Na obě tato vybočení posuzujeme prut odděleně. Při vybočení k hmotné ose se prut chová jako celistvý a posuzujeme jej obvyklým způsobem; vzhledem k částečnému vetknutí prutu do styčnicků v rovině příhradoviny lze vzpěrnou délku uvažovat rovnou 0,9 násobku délky. Při vybočení k nehmotné



Obr. 9.13. Členěný prut.

ose se jedná o složené vybočení - jednak prut může vybočit jako celistvý na celou délku prutu (při vybočení kolmém k rovině příhradoviny je styčnickový plech měkký a vzpěrnou délku proto zkrátit nelze), jednak mohou jednotlivé úhelníky vybočit na vzdálenost jejich spojení, tj. třetinu délky prutu (obr. 9.14). Z obou takto získaných vzpěrnostních součinitelů uvažujeme jejich součin. Pro vybočení pak rozhoduje menší hodnota - buďto vzpěrnostní součinitel φ_y nebo součin $\varphi_z \cdot \varphi_1$.

Při návrhu nejprve odhadneme vzpěrnostní součinitel, např. hodnotou $\varphi = 0,6$ a podle vztahu (9.19) dostáváme



Obr. 9.14. Vybočení členěného prutu k nehmotné ose.

$$A_{\text{nut}} = \frac{420\,000}{210 \cdot 0,6} = 3333 \text{ mm}^2$$

Navrhne dva úhelníky 110.110.8, které mají plochu 3446 mm^2 (úhelníky 90.90.10, které mají téměř stejnou plochu, mají vzhledem k značně menšímu poloměru setrvačnosti podstatně menší únosnost). Tyto úhelníky nyní posoudíme.

a) vzpěrnostní součinitel k hmotné ose

vzpěrná délka

$$L_y = 0,9 \cdot 3400 = 3060 \text{ mm}$$

poloměr setrvačnosti

$$i_y = 34,0 \text{ mm}$$

štíhlostní poměr

$$\lambda_y = \frac{3060}{34} = 90,0$$

vzpěrnostní součinitel (z tabulek)

$$\varphi_y = 0,63$$

b) vzpěrnostní součinitel k nehmotné ose

b1) prut jako celek

vzpěrná délka

$$L_z = l = 3400 \text{ mm}$$

moment setrvačnosti

$$I_z = 1\,992\,900 + 1723 \cdot (30,5 + 12/2)^2 = 4\,288\,370 \text{ mm}^4$$

poloměr setrvačnosti

$$i_z = \sqrt{\frac{4\,288\,370}{1723}} = 49,89 \text{ mm}$$

štíhlostní poměr

$$\lambda_z = \frac{3400}{49,89} = 68,2$$

vzpěrnostní součinitel

$$\varphi_z = 0,80$$

b2) jediný úhelník

vzpěrná délka

$$L_1 = l/3 = 1133 \text{ mm}$$

poloměr setrvačnosti

$$i_1 = 21,6 \text{ mm}$$

štíhlostní poměr

$$\lambda_1 = \frac{1133}{21,6} = 52,5$$

vzpěrnostní součinitel

$$\varphi_1 = 0,90$$

vzpěrnostní součinitel k nehmotné ose $\varphi_z \cdot \varphi_1 = 0,80 \cdot 0,90 = 0,72$

Protože je $\varphi_y < \varphi_z \cdot \varphi_1$, rozhoduje vybočení k hmotné ose a vzpěrnostní součinitel prutu tedy budeme uvažovat $\varphi = 0,63$.

Posouzení prutu :

$$|\sigma| = \frac{F}{A} = \frac{420\,000}{3446} = 121,88 \text{ MPa} < R \cdot \varphi = 210 \cdot 0,63 = 132,3 \text{ MPa}$$

Prut vyhovuje pro danou sílu.

Pro srovnání si vypočteme také kritické břemeno, při kterém prut ztrácí stabilitu. Protože při posouzení rozhoduje vybočení k hmotné ose, budeme při dosazování do vztahu (9.13) uvažovat moment setrvačnosti a vzpěrnou délku vzhledem k hmotné ose. Dostáváme pro jeden úhelník

$$F_k = \frac{\pi^2 \cdot 210\,000 \cdot 1\,992\,900}{3060^2} = 441\,125 \text{ N} = 441,125 \text{ kN}$$

Při návrhu prutu bylo řečeno, že úhelníky 90.90.10, které mají téměř stejnou plochu, mají podstatně menší únosnost. A skutečně, dosadíme-li do vztahu (9.13) moment setrvačnosti tohoto úhelníku, dostaneme

$$F_k' = \frac{\pi^2 \cdot 210\,000 \cdot 1\,291\,800}{3060^2} = 285\,938 \text{ N} = 285,938 \text{ kN}$$

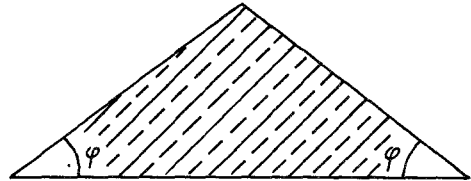
tedy pouze 0,65 násobek únosnosti úhelníku 110.110.8 (při stejné ploše a tedy i stejné spotřebě materiálu).

10. OPĚRNÉ ZDI

10.1. Tlak zeminy.

Nasypeme-li zeminu, udrží se trvale pod určitým úhlem φ k vodorovné (obr. 10.1./). Úhel φ se nazývá třecí úhel a rovina skloněná o úhel φ se nazývá příro-
zeným sklonem zeminy. Úhel φ se u suchých
zemín pohybuje mezi 30° až 45° , u vlh-
kých 20° až 35° , u vody je $\varphi = 0^\circ$.

Zmenšením třecího úhlu se zvětšuje
tlak zeminy. Je proto třeba uchovávat ze-
minu za opěrnou zdí pokud možno suchou,
neboli musíme ji náležitě odvodňovat. Tře-
cí úhly nejdůležitějších zemín jsou spolu
s měrnými hmotnostmi uvedeny v tabulce 10.1.



Obr. 10.1. Třecí úhel zeminy.

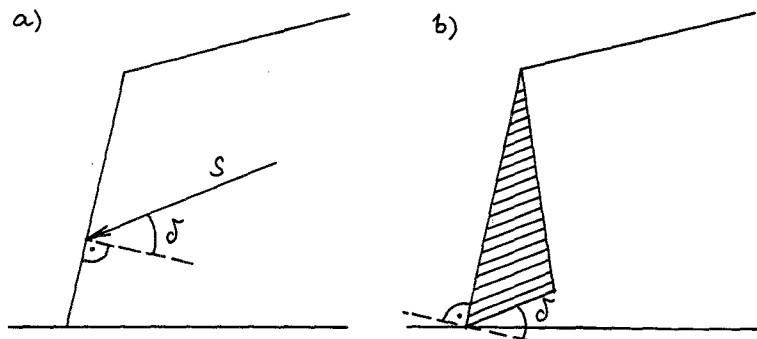
Jestliže je třeba udržet zeminu v pří-
křejším sklonu než je přirozený, je nutno použít opěrné zdi. Na tuto zeď potom
působí zemina tlakem, který se nazývá aktivní tlak zeminy. Mimo tohoto aktivního

Zemina	Zcela vyschlá		Zavlhlá (10 % vody)		Vlhká		Trvale pod hladinou spodní vody	
	$\varphi [^\circ]$	$\rho [t/m^3]$	$\varphi [^\circ]$	$\rho [t/m^3]$	$\varphi [^\circ]$	$\rho [t/m^3]$	$\varphi [^\circ]$	$\rho [t/m^3]$
hlinitý písek	30	1,80	25	1,85	25	2,05	25	1,05
písek	30	1,80	30	1,95	30	2,10	30	1,10
písek se štěrskem	45	2,00	35	2,10	35	2,10	35	1,25
hlína	40	1,70	25	1,80	20	2,00	20	2,00
jíl	40	1,65	20	1,75	15	2,00	15 ÷ 0	2,00

Tabulka 10.1. Třecí úhly a měrné hmotnosti zemín.

tlaku zeminy mluvíme ještě o pasivním tlaku, což je odpor, který klade zemina
proti zatlačení. Tento tlak se uplatňuje na příklad jako reakce proti působení
klenby apod. Pasivní tlak
je mnohonásobně vyšší než
tlak aktivní.

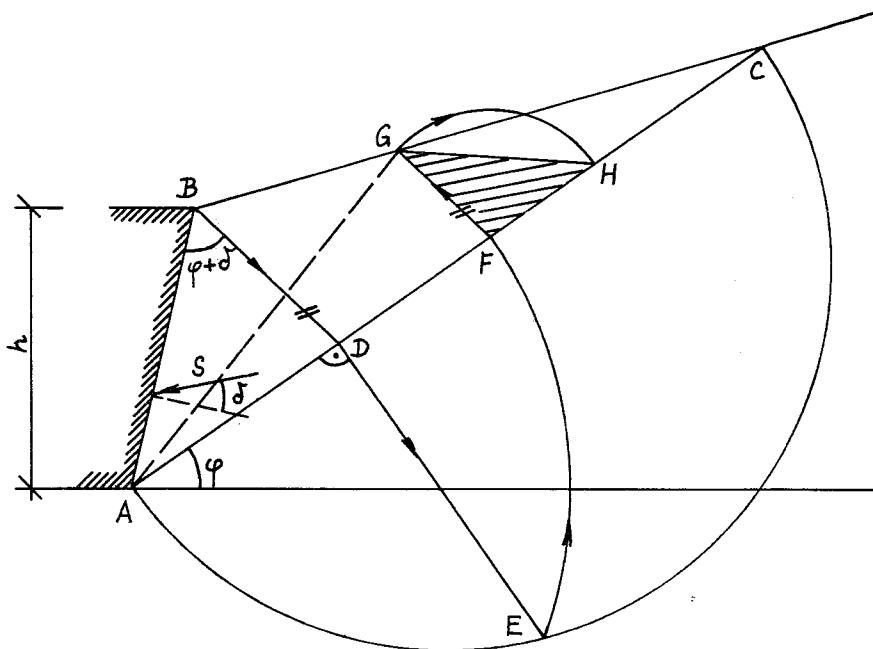
Směr tlaku závisí na
velikosti tření mezi opěr-
nou zdí a zeminou. Nejne-
příznivější je případ,
kdy se tření zcela vylou-
čí. Tlak zeminy má potom
směr kolmý ke stěně. Ozna-
číme-li úhel mezi kolmicí
ke stěně a paprskem tlaku
jako δ /obr.10.2a/, po-
tom v tomto limitním pří-



Obr. 10.2. Směr tlaku zeminy.

padě zanedbání tření je $\delta = 0$. Druhý krajní případ je ten, kdy počítáme s plným třením mezi opěrnou zdí a zeminou; paprsek tlaku je pak odchýlen od kolmice o třecí úhel φ , takže potom platí $\delta = \varphi$. Tento předpoklad je ovšem na místě pouze při velmi drsném povrchu stěny a při suché zemině. Obvykle se tlakový úhel δ předpokládá v hodnotách $\delta = 1/2 \varphi \div 2/3 \varphi$, při zemině vodou nasáklé (pobřežní zdi) se klade $\delta = 0$. Tlak zeminy vzrůstá podobně jako vodní tlak úměrně s hloubkou /obr.10.2b/, takže působí tlakové síly leží ve třetině výšky stěny.

Pro určení velikosti tlakové síly používáme grafického způsobu. Konstrukce je uvedena na obrázku 10.3. Úsečka AB je líc opěrné zdi, přímka BC je horní



Obr.10.3. Velikost aktivního tlaku zeminy.

omezení zeminy. Od paty zdi A vyneseme přímku AC skloněnou pod třecím úhlem φ . Nad průměrem AC opišeme kružnicí k. Dále vedeme od vrcholu B zdi přímku BD, která svírá s lícem zdi úhel $(\varphi + \delta)$. V bodě D vztyčíme kolmici k přímce AC, bod E je průsečík této kolmice a kružnice k. Dále opišeme ze středu A kružnicí o poloměru AE, ta protne přímku AC v bo-

dě F. Úsečka FG je rovnoběžná s přímkou BD. Plocha rovnoramenného trojúhelníka GFH udává po vynásobení měrnou tíhou zeminy velikost tlakové síly, která působí ve spodní třetině stěny AB odkloněna o úhel δ od kolmice ke stěně AB. Označíme-li měrnou tíhu zeminy γ , je velikost síly S rovna

$$S = \gamma \cdot \Delta GFH.$$

Bod G, který jsme získali konstrukcí na obrázku 10.3, má kromě toho, že určuje velikost tlakové síly, ještě další význam. Přímka AG udává totiž tzv. rovinu smyku, to je rovinu, ve které by se porušila rovnováha zeminy nejdříve, kdybychom odstranili opěrnou zeď.

V případě, že líc opěrné zdi je svislý, horní omezení zeminy vodorovné a směr tlaku předpokládáme vodorovný, je velikost tlakové síly zeminy

$$S_a = \frac{1}{2} \gamma h^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right). \quad /10.1/$$

Velikost pasivního tlaku zeminy, který se určuje podobnou konstrukcí jako

na obrázku 10.3 s tím rozdílem, že třecí úhel φ vynášíme záporný (od vodorovné dolů), je u svíslého líce opěrné zdi, vodorovného horního omezení zeminy a vodorovného směru tlaku dána vzorcem

$$S_p = \frac{1}{2} \gamma h^2 \operatorname{tg}^2(45^\circ + \frac{\varphi}{2}) \quad /10.2/$$

Jestliže je třecí úhel φ roven 30° , potom je pasivní tlak při výše uvedených podmínkách devětkrát větší než aktivní tlak.

Příklad 10.1.1.

Jakou vodorovnou silou je možno zatížit 1 běžný metr základu výšky 1,2 m, umístěného v hloubce 2 m pod terénem. Zeminou je vlhký hlinitý písek.

Řešení: Označme H_1 pasivní tlak na blok hloubky 3,2 m a H_2 pasivní tlak na blok hloubky 2 m. Sílu H na základ získáme jako rozdíl $H_1 - H_2$. Po dosazení do vztahu /10.2/ dostáváme

$$H_1 = \frac{1}{2} (2,05 \cdot 10^3 \cdot 9,81) \cdot 3,2^2 \operatorname{tg}^2(45 + \frac{25}{2})^\circ = 253,7 \cdot 10^3 \text{ N/m'}$$

$$H_2 = \frac{1}{2} (2,05 \cdot 10^3 \cdot 9,81) \cdot 2^2 \operatorname{tg}^2(45 + \frac{25}{2})^\circ = 99,1 \cdot 10^3 \text{ N/m'}$$

$$H = H_1 - H_2 = 253,7 \cdot 10^3 - 99,1 \cdot 10^3 = 154,6 \cdot 10^3 \text{ N/m'}$$

Každý běžný metr základu můžeme zatížit vodorovnou silou 154,6 kN.

10.2. Kombinace tlaku nebo tahu s ohybem.

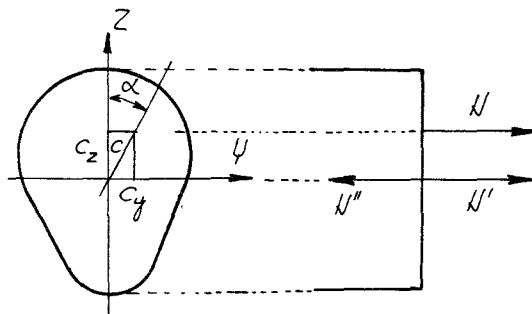
Kombinace tlaku s ohybem (někdy také tahu s ohybem) je ve stavební praxi velmi častá. Výsledný účinek vnějších sil působících z jedné strany průřezu nahrazuje ekvivalentně síla N , jejíž paprsek je kolmý k průřezu, avšak neprochází těžištěm. Síla N je kladná, je-li tahem. Rovnováhu nezměníme, připojíme-li v těžišti průřezu dvě síly N' , N'' , rovnoběžné a stejné velikosti jako síla N , navzájem opačného smyslu /obr.10.4/. Je-li c excentricita (vzdálenost od těžiště) působí síly N , působí dvojice sil N , N'' na rameni c momentem

$$M = - N c \quad /10.3/$$

Znaménko (-) je ve vztah /10.3/ proto, že tahová síla N otáčí v kladném směru na rameni ve směru záporného ohybového momentu (vytahuje horní vlákna). Je tedy účinek mimostředné síly N ekvivalentní současnému namáhání normálovou silou N' (působící v těžišti), stejné velikosti a smyslu s N , a ohybovým momentem $M = - N c$. Jde o kombinaci

tahu (tlaku) s ohybem. Ohybový moment působí v rovině určené paprskem síly N a těžištěm průřezu. Obsahuje-li tato rovina hlavní centrální osu setrvačnosti, jde o kombinaci tahu (tlaku) s prostým ohybem, jinak v obecném případě o kombinaci tahu (tlaku) s šikmým ohybem.

Označme Y , Z hlavní centrální osy setrvačnosti průřezu, I_y , I_z momenty setrvačnosti a i_y , i_z poloměry setrvačnosti k těmto osám. Souřadnice působí síly N jsou c_y , c_z (obr. 7.4), úhel průvodiče s kladnou osou Z je α ,



Obr. 10.4. Excentricita síly.

je měřen ve smyslu pohybu hodinových ručiček. Plocha průřezu je A .

Prostý tah (tlak) dává v celém průřezu konstantní napětí podle /8.14/

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

šikmý ohyb podle /8.78/ dává napětí

$$\sigma_x = -\frac{M \cos \alpha}{I_y} z - \frac{M \sin \alpha}{I_z} y$$

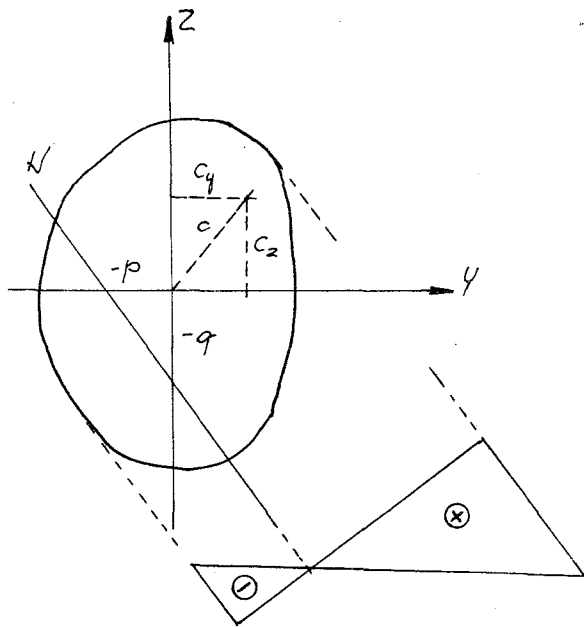
Výsledné napětí za mimostředného tahu (tlaku) je dáno součtem obou výrazů

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M \cos \alpha}{I_y} z - \frac{M \sin \alpha}{I_z} y \quad /10.4/$$

Protože je $M = -N \cdot c$, $I = A \cdot i^2$, $c \cdot \cos \alpha = c_z$, $c \cdot \sin \alpha = c_y$, můžeme normálové napětí σ_x z rovnice /10.4/ vyjádřit vztahem

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{z c_z}{i_y^2} + \frac{y c_y}{i_z^2} \right) \quad /10.5/$$

V daném průřezu jsou za určitého zatížení hodnoty N , A , c_y , c_z , i_y , i_z konstantní, a proto se normálové napětí σ_x mění v průřezu lineárně.



Obr.10.5. Napjatost při kombinaci tahu s ohybem.

Geometrické místo bodů, v nichž je normálové napětí nulové, určíme z podmínky $\sigma_x = 0$:

$$\frac{y c_y}{i_z^2} + \frac{z c_z}{i_y^2} + 1 = 0 \quad /10.6/$$

Je to jako u ohybu přímka zvaná neutrální osa, která má obecný směr, šikmý k osám; neprochází těžištěm, ale protíná osy Y , Z v bodech $(p, 0)$, $(0, q)$ - viz obrázek 10.5. Souřadnice p , q určíme postupným dosazením do rovnice /10.6/

$$\frac{p c_y}{i_z^2} + 0 + 1 = 0$$

$$p = -\frac{i_z^2}{c_y} \quad /10.7/$$

$$0 + \frac{q c_z}{i_y^2} + 1 = 0$$

$$q = -\frac{i_y^2}{c_z} \quad /10.8/$$

Neutrální osa dělí průřez na část taženou a tlačенou. Ze znamének úseků

p , q je patrné, že neutrální osa protíná každou souřadnou osu na opačné straně těžiště, než je působíště síly N (zvané centrum tahu nebo tlaku). Část neutrální osy mezi průsečíky se souřadnými osami se nachází v kvadrantu, který je protější ke kvadrantu centra. Z toho vyplývá, že celý kvadrant, v němž leží působíště síly, je vždy namáhán napětím téhož znaménka jako normálová síla.

V těžišti průřezu vzniká napětí $\sigma_{x,t}$, které vypočteme ze vzorce /10.4/ nebo /10.5/ po dosazení $y = z = 0$. Vychází

$$\sigma_{x,t} = \frac{N}{A} \quad /10.9/$$

V těžišti vzniká napětí stejné s napětím za prostého tahu (tlaku).

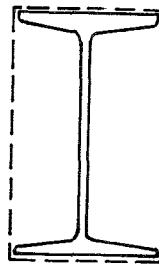
Největší tah a tlak vzniká v krajních bodech průřezu, nejvíce vzdálených od neutrální osy. Označíme-li souřadnice těchto bodů (y_1, z_1) , (y_2, z_2) , bude největší tahové a tlakové napětí

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N}{A} \left(1 + \frac{y_1 c_y}{i_z^2} + \frac{z_1 c_z}{i_y^2} \right) \\ \sigma_2 &= \frac{N}{A} \left(1 + \frac{y_2 c_y}{i_z^2} + \frac{z_2 c_z}{i_y^2} \right) \end{aligned} \quad /10.10/$$

Tato napětí nesmějí přestoupit mezní napětí v tahu a tlaku.

Mnohé stavební látky vzdorují tlaku, ale nesnesou prakticky téměř tah (např. beton, zdivo, zemina pod základy). U těchto látek žádáme, aby celý průřez byl tlačěn. Část průřezu, v níž musí ležet působíště vnější síly, aby byla celá plocha průřezu pouze tlačena (případně tažena), se nazývá jádro průřezu. Jádro obsahuje vždy těžiště, neboť při dostředném působení síly je průřez namáhán prostým tahem nebo tlakem a ve všech bodech vznikají napětí stejné velikosti i stejného znaménka.

Obrys jádra je geometrickým místem tlakových center, jimž přísluší neutrální osa, která je tečnou obrysu průřezu (samozřejmě musí být vyloučeny tečny, které obrys na jiném místě protínají). Tvar jádra určujeme tedy tak, že hledáme podle rovnice /10.6/ polohy tlakového centra, jemuž odpovídá různá poloha tečen k průřezu. Při pozorném pohledu na rovnici neutrální osy /10.6/ zjistíme, že v této rovnici je možno souřadnice bodu neutrální osy (y, z) vzájemně zaměnit souřadnicemi tlakového centra (c_y, c_z) a rovnice se nezmění. Této vzájemné závislosti obrysu a jádra průřezu (antipolární vztah vzhledem k centrální elipse setrvačnosti - dualita) můžeme využít k obrácené konstrukci jádra - že totiž pokládáme tlakové centrum do bodů obrysu průřezu a příslušné neutrální osy vymezují jádro průřezu. Obrysem průřezu při tom nemusí být vždy skutečný obrys, ale čára, jejíž tečny průřez těsně omezují, ale neprotínají jej. Na příklad v případě válcovaného I průřezu /obr.10.6/ je to obdélník vyznačený šárkováně.

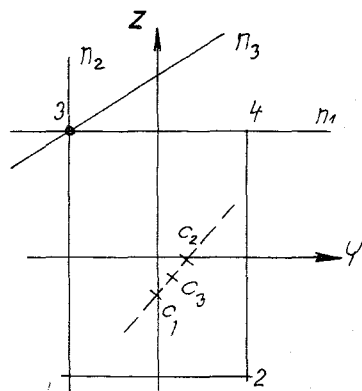


Obr.10.6. "Obrys" válcovaného I průřezu.

Důsledkem duality mezi obrysem průřezu a jádrem jsou některé zákonitosti :

a) vrcholu průřezu odpovídá úsečka jádra, která prochází kvadrantem protějším k vrcholu. Na obrázku 10.7 odpovídají neutrálním osám n_1, n_2, n_3 , protínajícím se ve vrcholu 3 průřezu, tlaková centra c_1, c_2, c_3 , ležící na úsečce $\overline{c_1 c_2}$. Úsečka $\overline{c_1 c_2}$ je stranou jádra odpovídající vrcholu 3 průřezu. Přímka $c_1 c_2$ je současně neutrální osou odpovídající tlakovému centru umístěnému ve vrcholu 3 průřezu.

b) úsečce na obrysu průřezu odpovídá vrchol jádra. Pokud je úsečka obrysu kolmá k hlavní centrální ose setrvačnosti, leží odpovídající vrchol jádra na této hlavní ose, a to na opačné straně

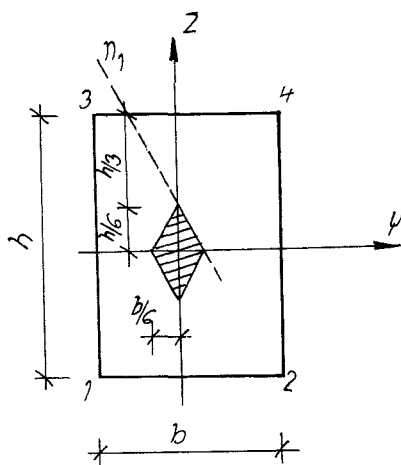


Obr.10.7. Konstrukce jádra.

vzhledem k těžišti průřezu. Na obrázku 10.7 odpovídá úsečce obrysu $\overline{34}$ (neutrální osa n_1) vrchol jádra c_1 .

- c) z předchozího výkladu vyplývá, že jádrem n-úhelníkového průřezu je rovněž n-úhelník, i když může mít jiný tvar a může být jinak orientován vzhledem k hlavním centrálním osám. Na příklad jádrem obdélníka je kosočtverec (obr. 10.8/).
- d) je-li obrazec omezen hladkou křivkou, přísluší k ní v jádře opět hladká křivka.

Nejčastějším tvarem průřezu ve stavební praxi je obdélník /obr.10.8/. Délka strany rovnoběžné s osou Y nechť je b , délka strany rovnoběžné s osou Z je h . Jádro nalezneme nejnázne tak, že umístíme tlakové centrum postupně do vrcholů 1 - 4 obdélníka a nalezneme odpovídající neutrální osy. Tlakové centrum ve vrcholu 1 má souřadnice



$$c_y = -\frac{b}{2} \qquad c_z = -\frac{h}{2}$$

a po dosazení ro rovnic /10.7/ a /10.8/ dostaneme úseky, které vytíná neutrální osa n_1 na osách Y, Z :

$$p = -\frac{i_z^2}{c_y} = -\frac{\frac{b^2}{12}}{-\frac{b}{2}} = +\frac{b}{6}$$

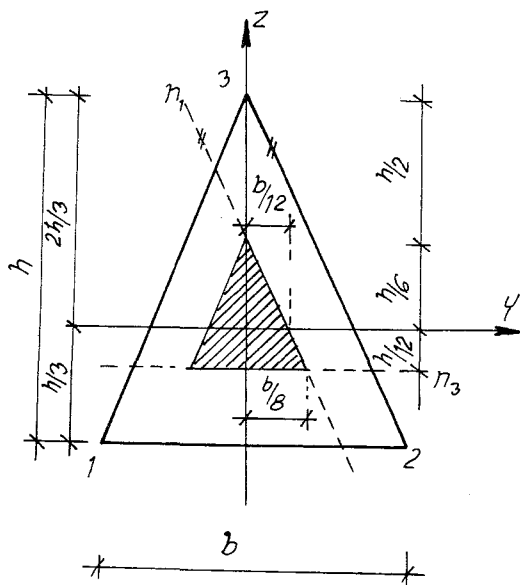
/10.11/

$$q = -\frac{i_y^2}{c_z} = -\frac{\frac{h^2}{12}}{-\frac{h}{2}} = +\frac{h}{6}$$

Obr.10.8. Jádro obdélníka.

Tato neutrální osa je jednou ze stran jádra. Ostatní strany již získáme ze symetrie obdélníka k osám Y, Z, takže jádrem obdélníka je kosočtverec s vrcholy na osách souměrnosti, vzdálenými od těžiště o šestinu délky rovnoběžných stran.

Rovnoramenný trojúhelník /obr.10.9/) nechť má základnu délky b rovnoběžnou s osou Y a výšku h . Jádro nalezneme opět tak, že do vrcholů trojúhelníka postupně umístíme tlaková centra a zjistíme polohy odpovídajících neutrálních os. Tyto neutrální osy nám omezí jádro průřezu. Tlakové centrum ve vrcholu 1 má souřadnice



$$c_y = -\frac{b}{2} \qquad c_z = -\frac{h}{3}$$

a po dosazení do vztahů /10.7/ a /10.8/ dostáváme úseky na osách

$$p = -\frac{i_z^2}{c_y} = -\frac{\frac{b^2}{24}}{-\frac{b}{2}} = +\frac{b}{12}$$

/10.12/

$$q = -\frac{i_y^2}{c_z} = -\frac{\frac{h^2}{18}}{-\frac{h}{3}} = +\frac{h}{6}$$

Obr.10.9. Jádro rovnoramenného trojúhelníka.

Tato neutrální osa n_1 , která je současně jednou stranou jádra, je přímka, která je rovnoběžná se stranou 23. Neutrální osa odpovídající tlakovému centru umístěnému do vrcholu 2 je s neutrální osou n_1 symetrická podle osy Z , takže průsečík těchto os, který má souřadnice $(0, h/6)$, je jedním vrcholem jádra (vrcholem odpovídajícím straně 12 obrysu). Tlakové centrum ve vrcholu 3 má souřadnice

$$c_y = 0 \qquad c_z = \frac{2}{3} h$$

a jemu odpovídající neutrální osa vytíná na souřadných osách Y , Z podle /10.7/ a /10.8/ úseky

$$p = -\frac{i_z^2}{c_y} = -\frac{\frac{b^2}{24}}{0} = \infty \qquad q = -\frac{i_y^2}{c_z} = -\frac{\frac{h^2}{18}}{\frac{2}{3}h} = -\frac{h}{12} \qquad /10.13/$$

Neutrální osa n_3 je tedy přímka rovnoběžná s osou Y ve vzdálenosti $h/12$ směrem záporných souřadnic z . Průsečík přímek n_1 , n_3 má z -ovou souřadnici stejnou jako celá přímka n_3 a y -ovou souřadnici získáme z úměry /obr. 10.9/

$$y_j : \frac{b}{12} = \left(\frac{h}{6} + \frac{h}{12}\right) : \frac{h}{6} \qquad y_j = \frac{b}{8} \qquad /10.14/$$

Jádrem rovnoramenného trojúhelníka je tedy podobný trojúhelník s vrcholy o souřadnicích $(-b/8, -h/12)$, $(b/8, h/12)$, $(0, h/6)$.

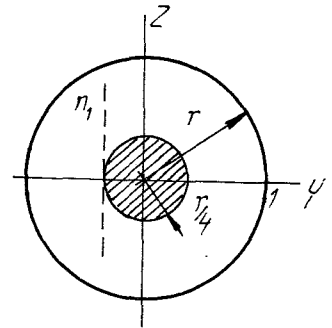
Z rotační symetrie kruhu vyplývá, že jádrem kruhového průřezu o poloměru r je soustředný kruh (obr. 10.10/), jehož poloměr získáme po umístění tlakového centra do libovolného bodu obrysu, na příklad do bodu 1 se souřadnicemi

$$c_y = r \qquad c_z = 0$$

takže neutrální osa vytíná na souřadných osách úseky

$$p = -\frac{i_z^2}{c_y} = -\frac{\frac{r^2}{4}}{r} = -\frac{r}{4} \qquad /10.15/$$

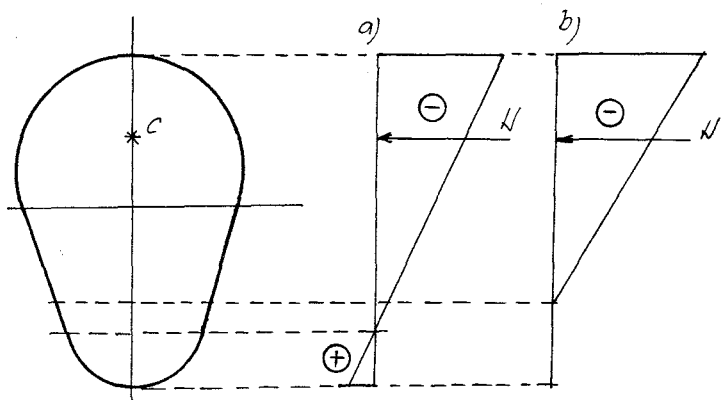
$$q = \infty$$



Obr.10.10. Jádro kruhového průřezu.

Jádrem kruhu je soustředný kruh o čtvrtinovém poloměru.

Je-li působiště tlaku mimo jádro, je část průřezu tlačena a současně část průřezu tažena. Některý stavební materiál však nesnese větší tah (zdivo, zemina pod základy), a proto předpokládáme, že se spára v tažené části na okraji rozevívá tak, až se napětí na zbytku průřezu rozdělí jen pouhým tlakem. Předpokládáme tedy napjatost za vyloučeného tahu. Tlačená část je menší než původní průřez a předpokládáme, že se deformuje lineárně a tudíž průběh napětí je lineární /obr.10.11/. Stále musí platit podmínky rovnováhy mezi vnitřními silami a silou vnější.



Obr.10.11. Kombinace tlaku s ohybem

a) část průřezu tažená, b) vyloučený tah.

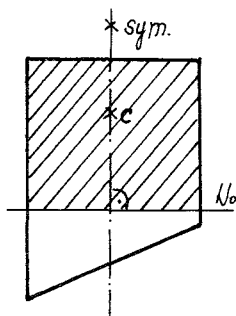
Neutrální osa se za vyloučeného tahu posunuje blíže k tlakovému centru,

nazývá se nulová osa. Část průřezu je z působnosti vyloučena a ve zbytku je napětí rozděleno tak, že v nulové ose je napětí nulové. Tato nulová osa je tečnou vzdorujícího průřezu, takže tlakové centrum leží na okraji jádra vzdorujícího průřezu.

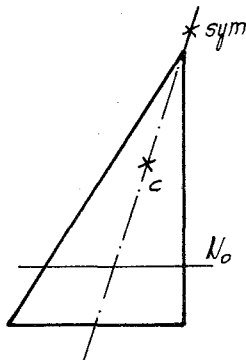
Z této podmínky také určujeme polohu nulové osy za vyloučeného tahu. Nulová osa odděluje část průřezu tak, aby tlakové centrum bylo na okraji jádra vzdorujícího průřezu.

Je-li obrazec souměrný a tlakové centrum leží na ose symetrie, bude i vzdorující průřez po rozevření spáry souměrný, nulová osa N_0 bude kolmá na osu symetrie. Je třeba podotknout, že symetrie průřezu se vztahuje pouze na jeho vzdorující část, v části průřezu na druhé straně nulové osy není symetrie nutná /obr.10.12/.

Obdobné závěry platí i pro průřez s osou šikmé souměrnosti. Je-li tlakové centrum na ose šikmé souměrnosti /obr.10.13/, má nulová osa směr šikmé souměrnosti (šikmá souměrnost se opět vztahuje pouze na vzdorující část průřezu).



Obr.10.12. Průřez se symetrickou vzdorující částí.



Obr.10.13. Šikmá symetrie.

U obdélníkového průřezu, leží-li tlakové centrum na ose symetrie mimo jádro, je řešení napjatosti za vyloučeného tahu jednoduché. Stačí si uvědomit, že vrchol jádra obdélníka (obr.

10.8/ se nachází ve třetině výšky, je tedy třeba najít takovou polohu nulové osy, aby se vrchol jádra nalézal právě ve třetině výšky. Označíme-li vzdálenost tlakového centra od bližšího okraje obdélníka $e' = h/2 - c_z$, bude výška vzdorující části h' rovna trojnásobku vzdálenosti e' /obr. 10.14/, tedy

$$h' = 3 e' = \frac{3}{2} h - 3 c_z \quad /10.16/$$

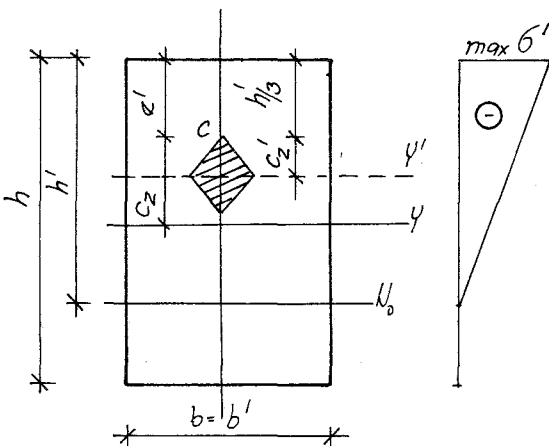
Vzdálenost tlakového centra od těžišťové osy Y' vzdorujícího průřezu je

$$\begin{aligned} c_z' &= \frac{1}{2} h' - e' = \frac{1}{2} e' = \\ &= c_z - \frac{h - h'}{2} \end{aligned}$$

takže největší napětí za vyloučeného tahu $\max \sigma'$ získáme ze vztahu /10.10/ pro vzdorující průřez

$$\begin{aligned} \max \sigma' &= \frac{N}{A} \left[1 + \frac{z_1' c_z'}{(i_y')^2} \right] = \\ &= \frac{N}{b h'} \left[1 + \frac{\frac{1}{2} h' c_z'}{\frac{(h')^2}{12}} \right] = \\ &= 2 \frac{N}{b h'} = \frac{2}{3} \frac{N}{b e'} \end{aligned}$$

/10.17/



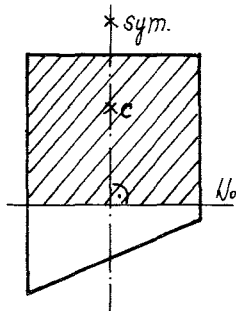
Obr.10.14. Obdélníkový průřez za vyloučeného tahu, tlakové centrum na ose symetrie.

Rovnoramenný trojúhelník má vrchol jádra ve vzdálenosti poloviny výšky od vrcholu trojúhelníka.

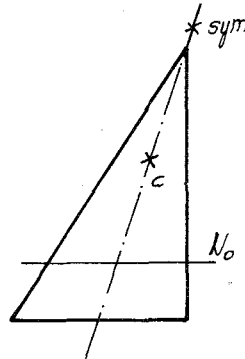
nazývá se nulová osa. Část průřezu je z působnosti vyloučena a ve zbytku je napětí rozděleno tak, že v nulové ose je napětí nulové. Tato nulová osa je tečnou vzdorujícího průřezu, takže tlakové centrum leží na okraji jádra vzdorujícího průřezu.

Z této podmínky také určujeme polohu nulové osy za vyloučeného tahu. Nulová osa odděluje část průřezu tak, aby tlakové centrum bylo na okraji jádra vzdorujícího průřezu.

Je-li obrazec souměrný a tlakové centrum leží na ose symetrie, bude i vzdorující průřez po rozevření spáry souměrný, nulová osa N_0 bude kolmá na osu symetrie. Je třeba podotknout, že symetrie průřezu se vztahuje pouze na jeho vzdorující část, v části průřezu na druhé straně nulové osy není symetrie nutná /obr.10.12/. Obdobné závěry platí i pro průřez s osou šikmé souměrnosti /obr.10.13/,, má nulová osa směr šikmé souměrnosti (šikmá souměrnost se opět vztahuje pouze na vzdorující část průřezu.



Obr.10.12. Průřez se symetrickou vzdorující částí.



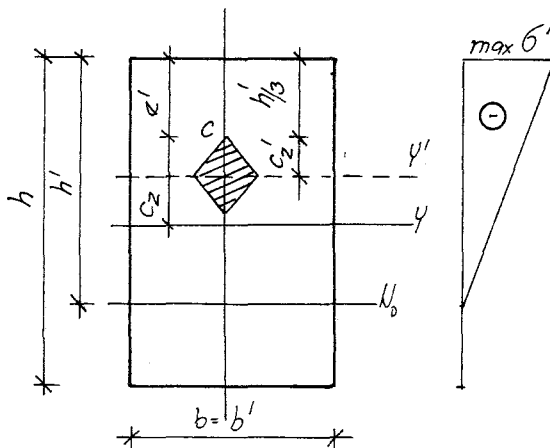
Obr.10.13. Šikmá symetrie.

10.8/ se nachází ve třetině výšky, je tedy třeba najít takovou polohu nulové osy, aby se vrchol jádra nalézal právě ve třetině výšky. Označíme-li vzdálenost tlakového centra od bližšího okraje obdélníka $e' = h/2 - c_z$, bude výška vzdorující části h' rovna trojnásobku vzdálenosti e' /obr. 10.14/, tedy

$$h' = 3 e' = \frac{3}{2} h - 3 c_z \quad /10.16/$$

Vzdálenost tlakového centra od těžiškové osy Y' vzdorujícího průřezu je

$$\begin{aligned} c_z' &= \frac{1}{2} h' - e' = \frac{1}{2} e' = \\ &= c_z - \frac{h - h'}{2} \end{aligned}$$



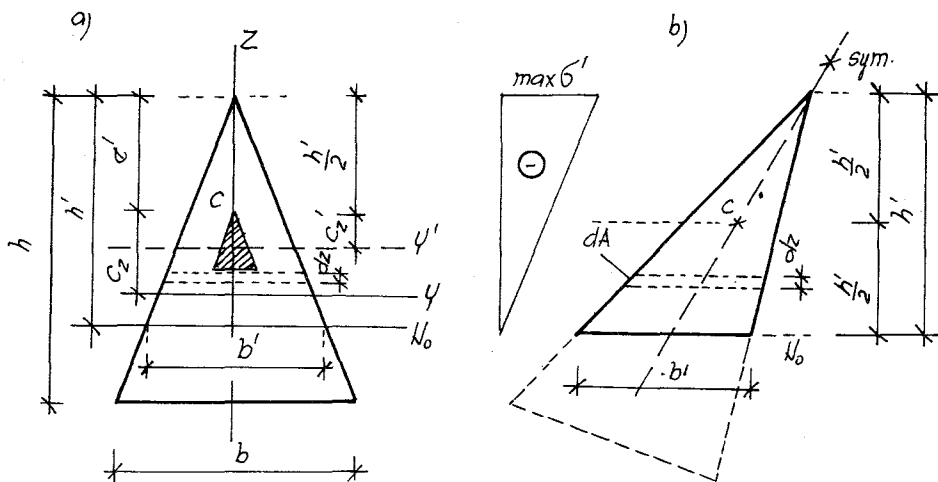
Obr.10.14. Obdélníkový průřez za vyloučeného tahu, tlakové centrum na ose symetrie.

takže největší napětí za vyloučeného tahu $\max \sigma'$ získáme ze vztahu /10.10/ pro vzdorující průřez

$$\begin{aligned} \max \sigma' &= \frac{N}{A'} \left[1 + \frac{z_1' c_z'}{(i_y')^2} \right] = \\ &= \frac{N}{b h'} \left[1 + \frac{\frac{1}{2} h' c_z'}{\frac{(h')^2}{12}} \right] = \\ &= 2 \frac{N}{b h'} = \frac{2}{3} \frac{N}{b e'} \end{aligned}$$

/10.17/

Rovnoramenný trojúhelník má vrchol jádra ve vzdálenosti poloviny výšky od vrcholu trojúhelníka.



Obr.10.15. Trojúhelníkový průřez za vyloučeného tahu, tlakové centrum na ose symetrie.

Leží-li tedy tlakové centrum na ose souměrnosti /**obr.10.15a**/ mimo jádro blíže k vrcholu trojúhelníka ve vzdálenosti $e' = \frac{2}{3}h - c_z$ od tohoto vrcholu ($c_z > \frac{1}{6}h$), bude se nulová osa nacházet ve vzdálenosti h' od vrcholu. Vzdálenost h' musí být dvojnásobek vzdálenosti e'

$$h' = 2e' = \frac{4}{3}h - 2c_z \quad /10.18/$$

Šířka vzdorujícího průřezu b' je z úměry rovna

$$b' = \frac{h'}{h} b$$

vzdálenost c_z' tlakového centra od těžištové osy Y' vzdorujícího průřezu je

$$c_z' = \frac{2}{3}h' - e' = c_z - \frac{2}{3}(h - h') = \frac{1}{3}e'$$

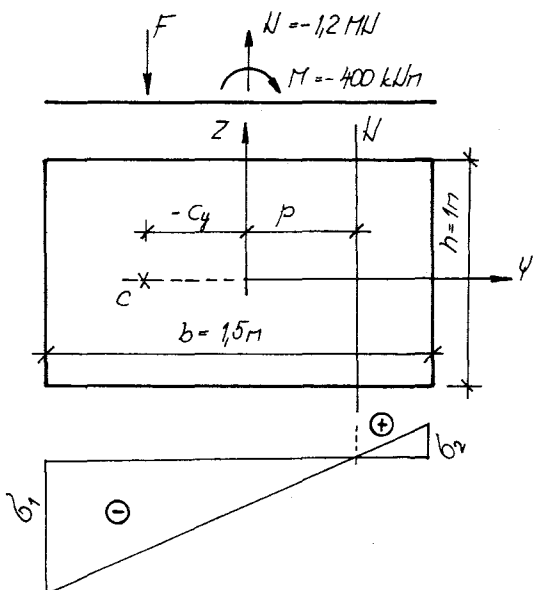
takže největší napětí za vyloučeného tahu $max \sigma'$ získáme opět ze vztahu /10.10/, dosadíme-li sem rozměry a vzdálenosti pro vzdorující průřez:

$$max \sigma' = \frac{N}{A'} \left[1 + \frac{z' c_z'}{(i_y')^2} \right] = \frac{N}{\frac{1}{2} b' h'} \left[1 + \frac{\frac{2}{3} h' c_z'}{\frac{(h')^2}{18}} \right] = 6 \frac{N}{b' h'} = \frac{3}{2} \frac{h}{e'} \frac{N}{b e'} = 3 \frac{N}{A'}$$

Z porovnání rovnoramenného trojúhelníka /**obr.10.15a**/ a obecného trojúhelníka /**obr.10.15b**/ je vidět, že napjatost je stejná, je-li stejná výška h' , šířka b' a leží-li tlakové centrum C na šikmé ose souměrnosti - těžnici vzdorujícího průřezu. Musí tomu tak být proto, že každý elementární proužek šířky dz má v obou případech stejnou délku a tedy i stejnou plochu, je v něm stejné napětí a tudíž i stejná elementární síla. Působíště této elementární síly leží na těžnici trojúhelníka, musí být tedy na stejné těžnici i výslednice všech elementárních sil. Tato výslednice má tedy v obou případech stejnou velikost a stejný statický moment k nulové ose U_0 , musí mít proto i stejně vzdálené působíště - a to musí být v tlakovém centru C .

Příklad 10.2.1.

Určete napjatost v obdélníkovém průřezu o rozměrech $b = 15 \text{ m}$, $h = 1 \text{ m}$, který je zatížen normálovou silou $N = 1,2 \text{ MN}$ a ohybovým momentem $M_z = -400 \text{ kNm}$ /**obr. 10.16**/.



Obr.10.16. Obdélníkový průřez namáhaný kombinací tlaku a prostého ohybu.

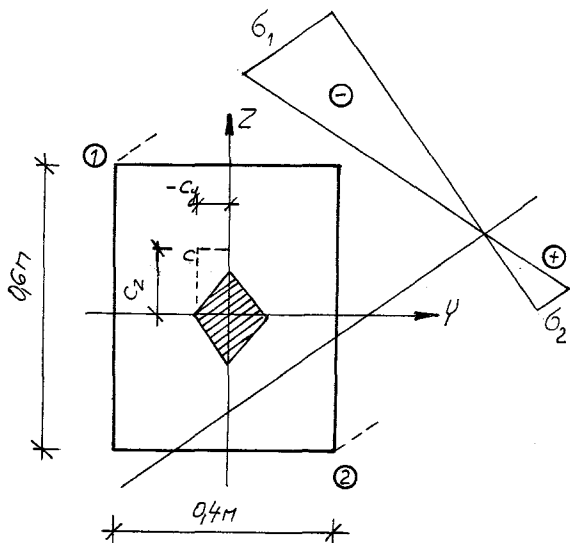
levém a pravém okraji. Po dosazení do vzorců /10.10/ vychází

$$\sigma_1 = \frac{-1200}{1,0 \cdot 1,5} \left(1 + \frac{-0,75 (-0,3333)}{\frac{1,5^2}{12}} \right) = -1866,67 \text{ kPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{-1200}{1,0 \cdot 1,5} \left(1 + \frac{0,75 (-0,3333)}{\frac{1,5^2}{12}} \right) = +266,67 \text{ kPa}$$

Příklad 10.2.2.

Určete napjatost v obdélníkovém průřezu o rozměrech $b=0,4\text{m}$, $h=0,6\text{m}$, který je zatížen normálovou silou $N = -600 \text{ kN}$ a ohybovými momenty $M_y = 90 \text{ kNm}$, $M_z = -30 \text{ kNm}$ /obr. 10.17/.



Obr.10.17. Obdélníkový průřez namáhaný kombinací tlaku a šikmého ohybu.

Řešení: Průřez je namáhan kombinací tlaku a prostého ohybu, příčměž rovina, ve které působí zatížení, je XY. Polohu tlakového centra určíme pomocí vztahu /10.3/, ze kterého vychází

$$c_y = -\frac{M_z}{N} = -\frac{-400}{-1200} = -0,3 \text{ m}$$

Délka jádrové úsečky je

$$j = \frac{b}{6} = \frac{1,5}{6} = 0,25 \text{ m}$$

takže tlakové centrum leží mimo jádro a část průřezu je tažena. Úsek, který vytíná neutrální osa na ose Y, je podle vztahu /10.7/

$$p = -\frac{i_z^2}{c_y} = -\frac{\frac{b^2}{12}}{\frac{M_z}{N}} = \frac{N b^2}{12 M_z} = \frac{-1200 \cdot 1,5^2}{-12 \cdot 400} = 0,5625 \text{ m}$$

Extrémní hodnoty napětí jsou v nejvzdálenějších bodech od neutrální osy, to je na

Řešení: Průřez je namáhan kombinací tlaku a šikmého ohybu. Souřadnice tlakového centra jsou podle vztahu /10.3/

$$c_y = -\frac{M_z}{N} = -\frac{-30}{-600} = -0,05 \text{ m}$$

$$c_z = -\frac{M_y}{N} = -\frac{90}{-600} = +0,15 \text{ m}$$

Tlakové centrum je mimo jádro průřezu, část průřezu je tedy tažena. Úseky, které vytíná neutrální osa na souřadných osách Y, Z, jsou rovny

$$p = -\frac{i_z^2}{c_y} = -\frac{\frac{0,4^2}{12}}{-0,05} = +0,26 \text{ m}$$

$$q = -\frac{i_y^2}{c_z} = -\frac{\frac{0,6^2}{12}}{0,15} = -0,2 \text{ m}$$

Extrémní napětí nalezneme v krajních

bodech nejvzdálenějších od neutrální osy, to je v bodech /obr.10.17/ 1(-q₂; q₃) a 2(q₂; -q₃). Velikost napětí v těchto bodech určíme pomocí vztahů /10.10/, ze kterých dostáváme

$$\sigma_1 = \frac{-600}{0,4 \cdot 0,6} \left(1 + \frac{-0,2 \cdot (-0,05)}{0,013} + \frac{0,3 \cdot 0,15}{0,03} \right) = -8125 \text{ kPa} = -8,125 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{-600}{0,4 \cdot 0,6} \left(1 + \frac{0,2 \cdot (-0,05)}{0,013} + \frac{-0,3 \cdot 0,15}{0,03} \right) = +3125 \text{ kPa} = +3,125 \text{ MPa}$$

Příklad 10.2.3.

Nalezněte jádro obrazce uvedeného na **obrázku 10.18.**

Řešení: Opsaným útvarem je pro daný obrazec pětiúhelník, jádro bude mít též tvar pětiúhelníka. Strany jádra získáme jako neutrální osy pro tlaková centra umístěná ve vrcholech opsaného pětiúhelníka. Použijeme při tom vztahů /10.7/ a /10.8/, které platí pro hlavní centrální osy setrvačnosti. K jejich určení zavedeme pomocné souřadné osy Y', Z' , proložené stranami obrazce. Pomocí statických momentů obrazce k těmto osám určíme polohu těžiště:

$$A = 0,9^2 - 0,6^2 = 0,45 \text{ m}^2,$$

$$S_{Y'} = \frac{1}{2} 0,9^3 - \frac{1}{2} 0,6^3 = 0,2565 \text{ m}^3,$$

$$z_T' = \frac{0,2565}{0,45} = 0,57 \text{ m}.$$

Protože obrazec je symetrický, bude pro těžišťovou vzdálenost y_T' od souřadné osy Z' platit

$$y_T' = 0,9 - 0,57 = 0,33 \text{ m}.$$

Momenty setrvačnosti k těžišťovým osám Y_T', Z_T' a leviáčnický moment k těmto osám získáme pomocí Steinerovy věty z momentů setrvačnosti k osám Y', Z' . Dostáváme

$$I_{Y_T'} = \frac{1}{3} 0,9^4 - \frac{1}{3} 0,6^4 = 0,1755 \text{ m}^4$$

$$I_{Z_T'} = \frac{1}{3} 0,6 \cdot 0,3^3 + \frac{1}{3} 0,3 \cdot 0,9^3 = 0,0783 \text{ m}^4$$

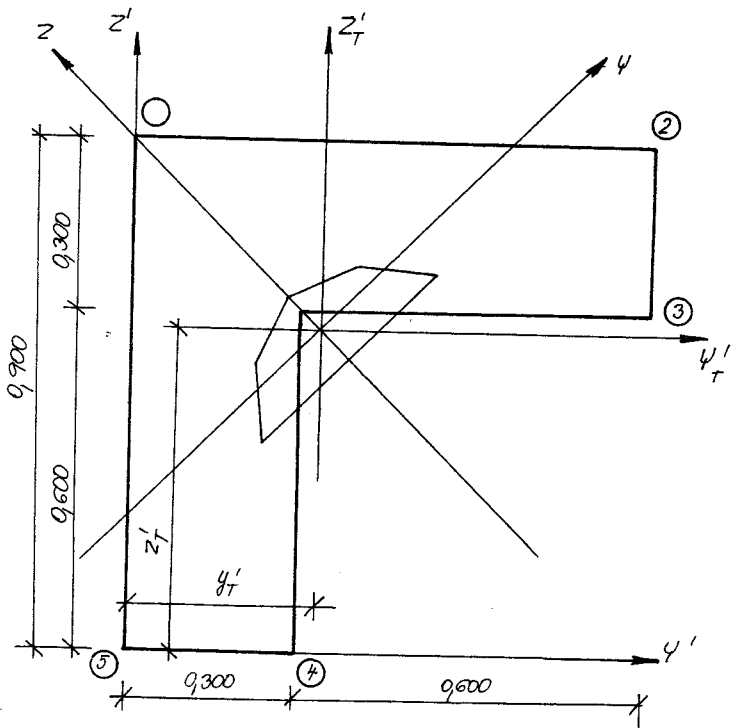
$$I_{Y_T'Z_T'} = \frac{1}{4} 0,9^4 - \frac{1}{4} 0,9^2 \cdot 0,6^2 + \frac{1}{4} 0,3^2 \cdot 0,6^2 = 0,099225 \text{ m}^4,$$

$$I_{Y_T'} = 0,1755 - 0,45 \cdot 0,57^2 = 0,029295 \text{ m}^4,$$

$$I_{Z_T'} = 0,0783 - 0,45 \cdot 0,33^2 = 0,029295 \text{ m}^4$$

$$I_{Y_T'Z_T'} = 0,099225 - 0,45 \cdot 0,57 \cdot 0,33 = 0,01458 \text{ m}^4.$$

Ze symetrie průřezu vyplývá, že momenty setrvačnosti k osám Y_T', Z_T' musí být stejné - kontrola správnosti. Protože průřez je symetrický, musí být osa symetrie Z_T' hlavní centrální osou setrvačnosti, druhá hlavní centrální osa je k ní kolmá.



Obr. 10.18. Jádro obrazce.

Hlavní centrální momenty setrvačnosti získáme pro úhel $\alpha = 45^\circ$. Dostáváme

$$I_y = 0,029295 \cdot \cos^2 45^\circ + 0,029295 \cdot \sin^2 45^\circ - 0,01458 \cdot \sin 2 \cdot 45^\circ = 0,014715 \text{ m}^4,$$

$$I_z = 0,029295 \cdot \sin^2 45^\circ + 0,029295 \cdot \cos^2 45^\circ + 0,01458 \cdot \sin 2 \cdot 45^\circ = 0,043875 \text{ m}^4.$$

Hlavní centrální poloměry setrvačnosti, resp. jejich čtverce, jsou

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{0,014715}{0,45} = 0,0327 \text{ m}^2, \quad i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{0,043875}{0,45} = 0,0975 \text{ m}^2.$$

Souřadnice vrcholů opsaného pětiúhelníka vzhledem k hlavním centrálním osám setrvačnosti Y, Z jsou

$$y_1 = 0, \quad z_1 = y_1' \cdot \sqrt{2} = 0,4667 \text{ m}, \quad y_2 = 0,9 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,6364 \text{ m}, \quad z_2 = z_1 - 0,9 \frac{\sqrt{2}}{2} = -0,1697 \text{ m}$$

$$y_3 = 0,6 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,4243 \text{ m}, \quad z_3 = z_2 - 0,3 \frac{\sqrt{2}}{2} = -0,3818 \text{ m}.$$

Vzhledem k symetrii průřezu není třeba souřadnice vrcholů 4 a 5 určovat. Dosaďme-li nyní tyto souřadnice vrcholů do vztahů /10.7/ a /10.8/, nalezneme úseky na souřadných osách Y, Z , které vytínají strany jádra:

$$P_1 = -\frac{0,0975}{0} = \infty,$$

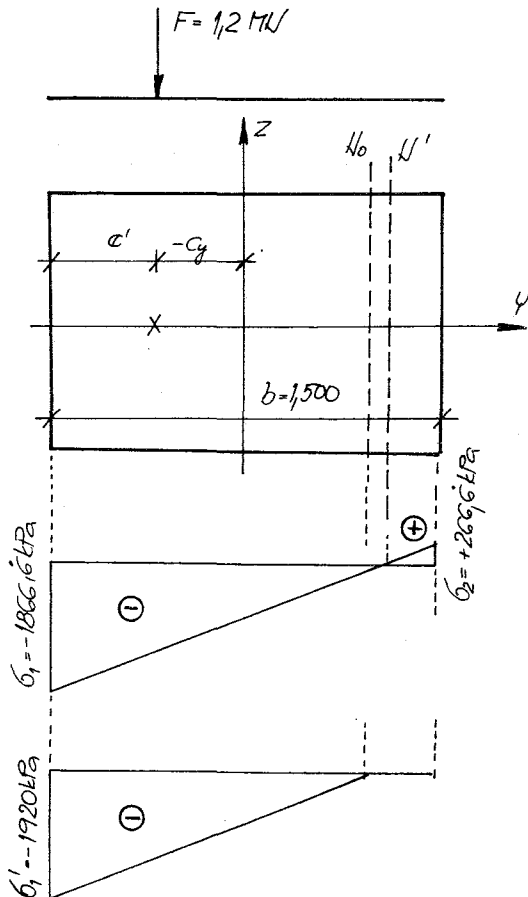
$$r_1 = -\frac{0,0327}{0,4667} = -0,0701 \text{ m},$$

$$P_2 = -\frac{0,0975}{0,6364} = -0,1532 \text{ m},$$

$$r_2 = -\frac{0,0327}{-0,1697} = +0,1927 \text{ m},$$

$$P_3 = -\frac{0,0975}{0,4243} = -0,2298 \text{ m},$$

$$r_3 = -\frac{0,0327}{-0,3818} = +0,0856 \text{ m}.$$



Obr.10.19. Obdélníkový průřez, napjatost za vyloučeného tahu.

Příklad 10.2.4.

Řešte zadání příkladu 10.2.1 za vyloučeného tahu. Porovnejte výsledný průběh napětí.

Řešení: Tlakové centrum se nachází na ose Y ve vzdálenosti $c_y = 73$ od těžiště /obr.10.19/, to je tedy ve vzdálenosti

$$e' = \frac{b}{2} + c_y = 946 \text{ m}$$

od levého okraje průřezu. Nulová přímka N_0 se pak bude nalézat od tohoto okraje ve trojnásobné vzdálenosti podle /10.16/, to je

$$h' = 3e' = 1,25 \text{ m}$$

Maximální tlakové napětí při vyloučeném tahu určíme ze vztahu /10.17/, ze

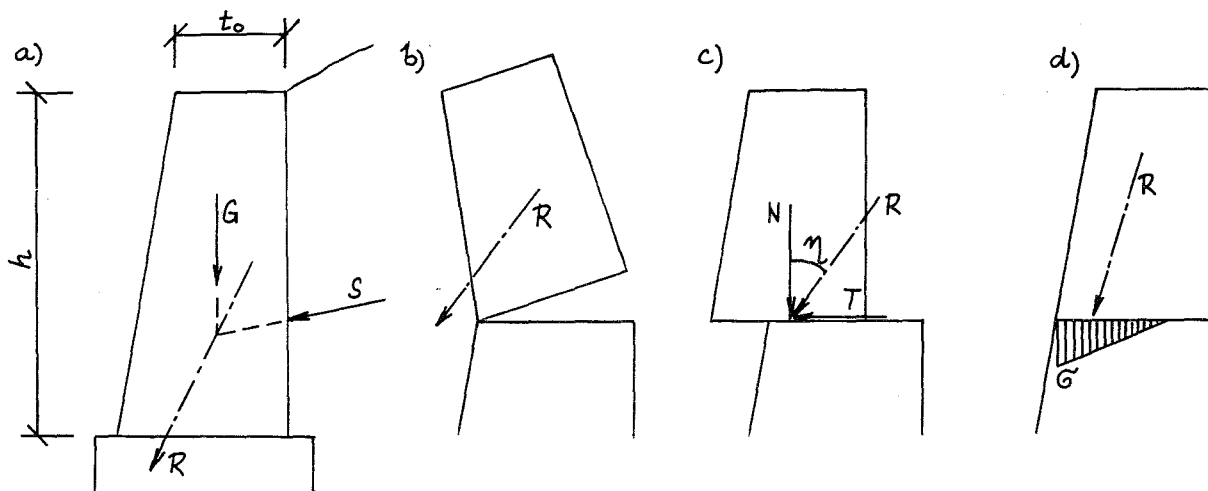
kterého dostáváme

$$\sigma_1' = \frac{2 \cdot (-1200)}{125 \cdot 10} = -1920 \text{ kPa}$$

což je přibližně o 29% více než s uvažováním tahových napětí v průřezu. Malý rozdíl je způsoben tím, že tažená oblast je poměrně malá.

10.3. Typy a konstrukce opěráčů zdí.

Síly působící na opěrnou zeď jsou tedy tlak zeminy a vlastní tíha opěrné zdi /obr.10.20a/. Opěrná zeď musí být navržena tak, aby v libovolném příčném řezu



Obr. 10.20. Zatížení opěrné zdi a případy jejího porušení.

vyhověla třem základním podmínkám :

1. Podmínka rovnováhy co do překlopení zdi nebo její části /obr.10.20b/, která vyžaduje, aby výslednice R tlaku zeminy S a vlastní tíhy G procházela uvnitř opěrné zdi nad libovolným příčným řezem.
2. Podmínka rovnováhy co do posunutí /obr.10.20c/, podle které musí být úhel mezi výslednicí R a kolmicí ke spáře menší než úhel tření za klidu φ_0 . Tento úhel je pro zdivo na vlhké maltě asi $22,5^\circ$, pro zdivo na suché maltě asi 37° , pro vyschlé zdivo na suché půdě asi 33° , pro vyschlé zdivo na středně vlhké půdě asi 24° a pro zdivo na půdě mokré a jílovitě asi 17° .
3. Podmínka pevnosti v tlaku, podle které normálová napětí v libovolné spáře nesmí přestoupit povolenou mez. Napětí ve zdech cihelných, kamenných nebo z prostého betonu může být pouze tlakové, takže je nutno, aby výslednice R procházela uvnitř jádra průřezu (ve vnitřní třetině šířky), anebo zeď vyšetřujeme za vyloučeného tahu

Zvětšováním tlaku zeminy se bezpečnost opěrné zdi zmenšuje, naopak zvětšením vlastní tíhy přispíváme k zvýšení bezpečnosti. Tlak zeminy se podle obrázku 10.2b zvětšuje přímo úměrně s hloubkou, roste tedy značně rychleji než vlastní tíha. Bude nás tedy při posuzování opěrné zdi zajímat především základová spára, a pak

ty spáry, kde se průřez zvětšuje skokem.

Tloušťku opěrných zdí (s výjimkou zdí železobetonových, které jsou podstatně tenčí) volíme obvykle tak, že v koruně zdi určíme tloušťku t_0 v metrech podle přibližného vzorce

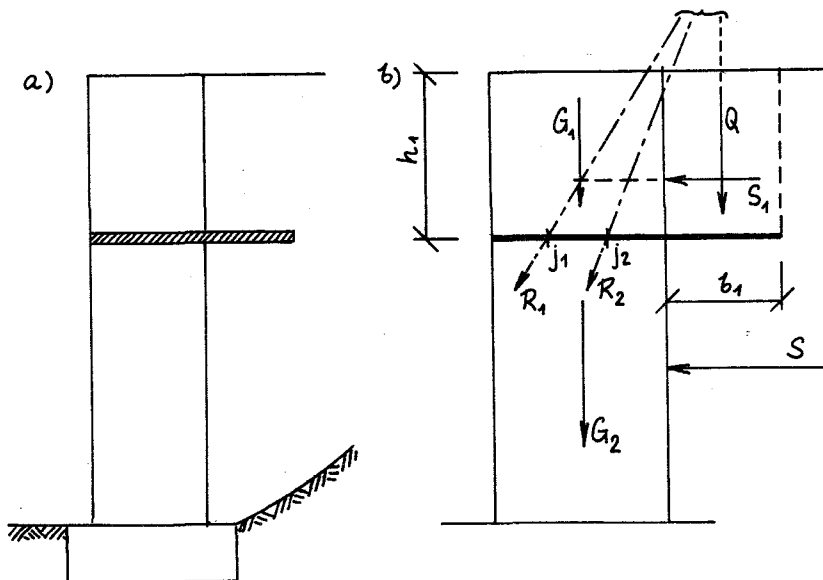
$$t_0 \doteq 0,44 + 0,2 h [m], \quad /10.19/$$

směrem dolů se pak opěrné zdi na vnějším líci rozšiřují v poměru 1 : 6, takže v patě má zeď tloušťku t_1

$$t_1 \doteq 0,44 + 0,37 h [m]. \quad /10.20/$$

Tloušťka zdi v koruně by ovšem neměla být menší než 0,6 m.

Chceme-li navrhnout opěrnou zeď z lomového kamene nebo cihel či prostého betonu úsporněji anebo chceme-li zvýšit při rekonstrukci objektu dříve vybudovanou opěrnou zeď bez současného zesílení zdi, můžeme použít tak zvanou Chaudyho desku /obr.10.21/. Je to deska, která je vetknutá do opěrné zdi a zasahuje do nás-



Obr. 10.21. Chaudyho opěrná zeď.

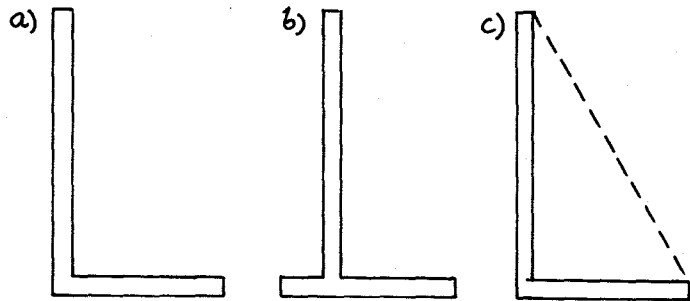
pu. Příznivý účinek desky spočívá v tom, že zemina nad deskou přispívá svou vlastní tíhou Q ke zvětšení normálového tlaku ve zdi, čímž zmenšuje úhel η /obr. 10.20c/ mezi výslednicí a kolmicí ke spáře, a zejména způsobuje statický moment opačného znaménka než tlak zeminy a tím zlepšuje stabilitu proti překlopení. Největší možnou hloubku uložení Chaudyho desky určíme z podmínky, že nad touto deskou musí opěrná zeď svou tíhou vzdorovat tlaku zemi-

ny, neboli výslednice R_1 sil S_1 a G_1 musí procházet vnějším jádrovým bodem j_1 , který se nachází v třetině tloušťky zdi. Známe-li hloubku h_1 uložení Chaudyho desky, stanovíme její maximální možné vyložení. Protože nelze vyloučit, že pod Chaudyho deskou vznikne dutina, takže pak tato deska není zeminou podpírána, nesmí vlastní tíha Q zeminy způsobit překlopení zdi dovnitř. Musí tedy výslednice sil S_1 , G_1 a Q procházet vnitřním jádrovým bodem j_2 .

Po stanovení hloubky h_1 uložení a šířky b_1 vyložení Chaudyho desky je nutno ještě posoudit, zda vyhoví opěrná zeď i ve své základové spáře. Pokud nevyhoví, je možno použít ještě další Chaudyho desky, jejichž maximální možné uložení i vyložení určíme opět výše popsáním způsobem.

Opěrné zdi ze železobetonu /obr.10.22/ mají ve svém zatížení hodně společného

se zdmi Chaudyho. Protože vlastní tíha těchto zdí je relativně malá, přispívá ke stabilitě zdi tíha zeminy nacházející se nad vodorovnou deskou. Tuto šířku desky určíme opět z podmínky, aby v základové spáře nevznikl tah; musí tedy výslednice vlastní tíhy opěrné zdi (často ji zanedbáváme), tlaku zeminy a vlastní tíhy zeminy nad deskou procházet vnějším jádrovým bodem. Šířka desky je ovšem ovlivněna i únosností základové zeminy, u málo únosných zemín musíme někdy volit šířku desky i větší než podle výše uvedeného výpočtu, u velmi únosných zemín pak volit šířku desky menší a počítat napětí v základové spáře podle vyloučeného tahu.



Obr. 10.22. Opěrné zdi ze železobetonu.

Zmenšení nutné šířky desky můžeme dosáhnout tím, že základní desku vysuneme před líc opěrné stěny /obr.10.22b/. Jádrový bod se pak posune blíže k vnějšímu líci opěrné zdi, takže tíha zeminy nad deskou může být podstatně menší.

Pokud by v opěrné zdi ze železobetonu vznikaly příliš velké ohybové momenty, můžeme únosnost zvětšit přidáním příčných žeber /obr.10.22c/, svíslá část opěrné zdi i vodorovná část se pak chovají jako spojitě desky, nebo můžeme i u železobetonových opěrných zdí použít Chaudyho desek.

Příklad 10.3.1.

Stanovte průběh napětí v základové spáře opěrné zdi z prostého betonu. Výška opěrné zdi je $h = 6 \text{ m}$, zásypem je vlhký písek. Dovolené namáhání základové spáry je $0,4 \text{ MPa}$.

Řešení: K stanovení tloušťky zdi použijeme přibližných vzorců. Podle /10.19/ je tloušťka v koruně zdi

$$t_0 \approx 0,44 + 0,2 \cdot 6 = 1,64 \text{ m},$$

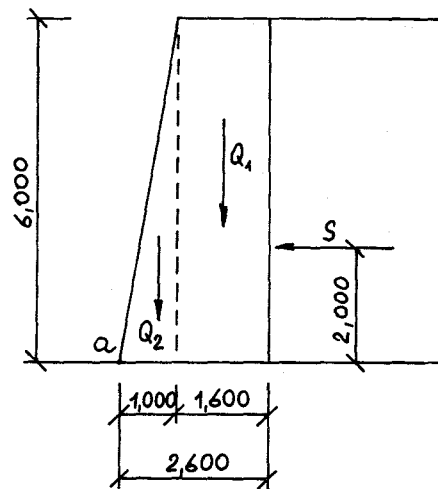
zvolíme $t_0 = 1,6 \text{ m}$, šířka v patě bude o $1/6$ výšky větší, tedy $t_1 = 2,6 \text{ m}$ /obr. 10.23/.

Měrná hmotnost vlhkého písku je podle tabulky 10.1 rovna $\rho = 2,1 \text{ t/m}^3$, měrná tíha je tedy $\gamma = 21 \text{ kN/m}^3$, a třecí úhel $\varphi = 30^\circ$. Vzhledem k tomu, že se jedná o zeminu vlhkou, budeme počítat tlak zeminy kolmý k opěrné zdi, tedy $\varphi = 0^\circ$. Velikost tlaku zeminy na 1 m šířky zdi je podle vzorce /10.1/ rovna

$$S = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 6^2 \cdot \text{tg}^2\left(45 - \frac{30}{2}\right)^\circ = 126 \text{ kN/m}.$$

Lichoběžníkový průřez zdi rozdělíme na obdélník a trojúhelník, jak vidíme na obrázku 10.23.

Protože měrná tíha prostého betonu je 23 kN/m^3 , bude vlastní tíha těchto dvou částí opěrné zdi (počítána opět na šířku zdi 1 m) rovna



Obr.10.23. Opěrná zeď z prostého betonu.

$$G_1 = 1,6 \cdot 6 \cdot 23 = 220,8 \text{ kN/m}, \quad G_2 = \frac{1}{2} \cdot 1,0 \cdot 6 \cdot 23 = 69 \text{ kN/m}.$$

Normálová síla v patě zdi je tedy

$$N = -G_1 - G_2 = -220,8 - 69 = -289,8 \text{ kN/m}.$$

Statický moment k vnějšímu líci v patě zdi, to je k bodu a, se rovná

$$M_a = -S \cdot 2,0 + G_1 \left(2,6 - \frac{1,6}{2}\right) + G_2 \cdot 2 \cdot \frac{1,0}{3} = 191,44 \text{ kNm/m}.$$

Vzdálenost průsečíku výslednice s patní spárou od bodu a je tedy

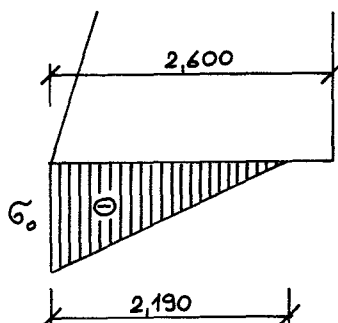
$$r = \frac{M}{-N} = \frac{191,44}{289,8} = 0,661 < \frac{2,6}{3}.$$

Tlakové centrum je tedy mimo jádro průřezu, patní spáru budeme počítat za vyloučeného tahu. Šířka tlačené oblasti je

$$x = 3 \cdot r = 3 \cdot 0,661 = 1,982 \text{ m}$$

a velikost normálového napětí

$$\sigma_o = \frac{2N}{x} = -\frac{2 \cdot 289,8}{1,982} = -292,5 \text{ kPa}.$$



Obr.10.24. Rozdělení napětí v patní spáře.

Protože dovolené namáhání zeminy je $\sigma_{dov} = 0,4 \text{ MPa}$, opěrná zeď vyhovuje. Průběh napětí v základové spáře je vykreslen na obrázku 10.24.

Ještě je zapotřebí zkontrolovat rovnováhu co do posunutí. Úhel mezi výslednicí zatížení a svislicí určíme z poměru vodorovné a svislé složky zatížení, dostáváme tedy

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{S}{G_1 + G_2} = \frac{126}{289,8} = 0,435 \quad \dots \quad \eta = 23^\circ 30' < 24^\circ.$$

Zeď vyhovuje i co do bezpečnosti proti posunutí.

Příklad 10.3.2.

Stanovte hloubku uložení a šířku vyložení Chaudyho desky u cihelné opěrné zdi tloušťky 0,9 m. Zemina je zavlhlý hlinitý písek, tlak zeminy předpokládejte kolmý k líci opěrné zdi.

Řešení : Podle tabulky 10.1 je měrná hmotnost zavlhlého hlinitého písku rovna $\rho = 1,85 \text{ t/m}^3$, takže měrná tíha je $\gamma = 18,5 \text{ kN/m}^3$, třecí úhel zeminy je $\varphi = 25^\circ$.

Při hloubce h_1 bude tlaková síla S_1 zeminy podle vzorce /10.1/ rovna

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 18,5 \cdot h_1^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \left(45 - \frac{25}{2}\right)^\circ = 3,754 h_1^2$$

a vlastní tíha zdiva (viz obrázek 10.25/

$$G_1 = 0,9 \cdot h_1 \cdot 18,0 = 16,2 h_1.$$

Aby výslednice sil S_1 a G_1 procházela levým jádrovým bodem j_1 , musí být k tomuto bodu součet statických momentů těchto sil nulový, tedy

$$S_1 \cdot \frac{h_1}{3} - G_1 \cdot \frac{0,9}{6} = 0,$$

neboli

$$3,754 h_1^2 \cdot \frac{h_1}{3} - 16,2 h_1 \cdot \frac{0,9}{6} = 0 \dots h_1 = 1,4 \text{ m.}$$

Uložíme-li tedy Chaudyho desku v hloubce 1,4 m, bude tlak zeminy S_1 roven

$$S_1 = 3,754 \cdot 1,4^2 = 7,358 \text{ kN/m}$$

a vlastní tíha zdiva

$$G_1 = 16,2 \cdot 1,4 = 22,68 \text{ kN/m.}$$

Vlastní tíha zeminy nad deskou šířky b_1 je

$$Q_1 = 1,4 b_1 \cdot 18,5 = 25,9 b_1.$$

Má-li výslednice sil S_1 , G_1 a Q_1 procházet pravým jádrovým bodem j_2 , musí být součet statických momentů těchto sil k bodu j_2 nulový, neboli

$$S_1 \cdot \frac{1,4}{3} + G_1 \cdot \frac{0,9}{6} - Q_1 \left(\frac{b_1}{2} + \frac{0,9}{3} \right) = 0.$$

Po dosazení dostáváme

$$7,358 \cdot \frac{1,4}{3} + 22,68 \cdot \frac{0,9}{6} - 25,9 b_1 \left(\frac{b_1}{2} + \frac{0,9}{3} \right) = 0$$

a odtud

$$b_1 = 0,486 \text{ m,}$$

zvolíme tedy $b_1 = 0,45 \text{ m.}$

Maximální výšku opěrné zdi s touto Chaudyho deskou určíme z podmínky, že výslednice tíhy G opěrné zdi výšky h , tlaku S zeminy o výšce h a tíhy Q_1 zeminy nad Chaudyho deskou musí procházet levým jádrovým bodem j_1 . Dostáváme tedy podmínku

$$G \cdot \frac{0,9}{6} - S \frac{h}{3} + Q_1 \left(\frac{0,45}{2} + 2 \frac{0,9}{3} \right) = 0$$

a po dosazení

$$0,9 h \cdot 18 \cdot \frac{0,9}{6} - 3,754 h^2 \cdot \frac{h}{3} + 25,9 \cdot 1,4 \cdot 0,825 = 0.$$

Řešením kubické rovnice získáme

$$h = 2,3 \text{ m.}$$

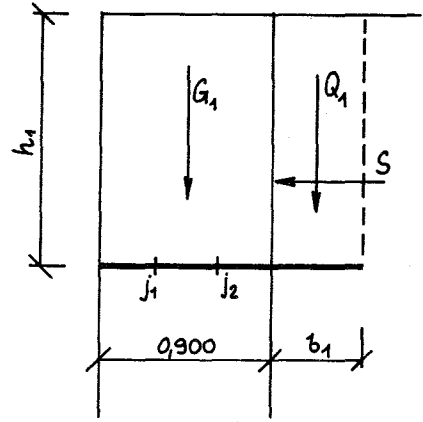
Podle empirických vzorců /10.19/ a /10.20/ by opěrná zeď výšky $h = 2,3 \text{ m}$ měla mít v koruně tloušťku

$$t_0 \doteq 0,44 + 0,2 \cdot 2,3 = 0,9 \text{ m}$$

a v patě tloušťku

$$t_1 \doteq 0,44 + 0,37 \cdot 2,3 = 1,3 \text{ m.}$$

Vidíme tedy, že použitím Chaudyho desky jsme dosáhli svislého líce zdi a navíc



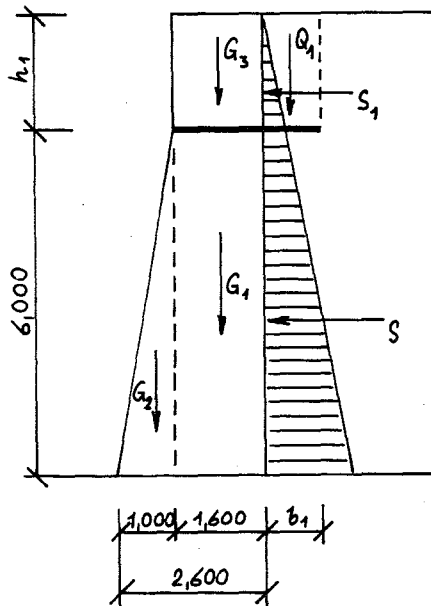
Obr.10.25. Chaudyho deska.

jame uspořili asi 20 % materiálu.

Příklad 10.3.3.

Opěrnou zeď z příkladu 10.3.1 je třeba při rekonstrukci objektu zvýšit. O kolik ji můžeme zvýšit použitím Chaudyho desky bez zvětšení tloušťky stávající opěrné zdi?

Řešení: Zvýšení h_1 opěrné zdi (je uvedena na obrázku 10.26/ určíme obdobně jako v předešlém příkladu z podmínky, aby výslednice sil S_1 a G_3 procházela levým jádrovým bodem j_1 spáry těsně nad Chaudyho deskou. Tlaková síla S_1 zeminy nad deskou, o měrné tíze $\gamma = 21 \text{ kN/m}^3$, je podle vzorce /10.1/ rovna



Obr.10.26. Zvýšení opěrné zdi použitím Chaudyho desky.

$$S_1 = \frac{1}{2} 21 h_1^2 \tan^2 \left(45 - \frac{30}{2} \right) = 3,5 h_1^2$$

a tíha zdi z prostého betonu nad Chaudyho deskou se rovná

$$G_3 = 1,6 \cdot h_1 \cdot 23 = 36,8 h_1.$$

Momentová podmínka sil G_3 a S_1 k levému jádrovému bodu j_1 dává

$$G_3 \cdot \frac{1,6}{6} - S_1 \cdot \frac{h_1}{3} = 0$$

a po dosazení

$$36,8 h_1 \cdot \frac{1,6}{6} - 3,5 h_1^2 \cdot \frac{h_1}{3} = 0.$$

Odtud dostáváme výsledek

$$h_1 = \sqrt{\frac{36,8 \cdot \frac{1,6}{6}}{\frac{3,5}{3}}} = 2,9 \text{ m.}$$

Tlaková síla zeminy nad deskou je tedy po dosažení $h_1 = 2,9 \text{ m}$

$$S_1 = 3,5 \cdot 2,9^2 = 29,435 \text{ kN/m}$$

a tíha zdi nad deskou se potom bude rovnat

$$G_3 = 36,8 \cdot 2,9 = 106,72 \text{ kN/m.}$$

Vlastní tíha zeminy nad Chaudyho deskou šířky b_1 se rovná

$$Q_1 = b_1 \cdot 2,9 \cdot 21 = 60,9 b_1.$$

Momentová podmínka sil G_3 , S_1 a Q_1 k pravému jádrovému bodu j_2 dává

$$G_3 \cdot \frac{1,6}{6} + S_1 \cdot \frac{2,9}{3} - Q_1 \left(\frac{b_1}{2} + \frac{1,6}{3} \right) = 0.$$

Po dosazení dostaneme

$$106,72 \cdot \frac{1,6}{6} + 29,435 \cdot \frac{2,9}{3} - 60,9 b_1 \left(\frac{b_1}{2} + \frac{1,6}{3} \right) = 0$$

a odtud

$$b_1 = 0,93 \text{ m,}$$

zvolíme tedy $b_1 = 0,9 \text{ m}$ a tíha zeminy nad deskou bude

$$Q_1 = 60,9 \cdot 0,9 = 54,81 \text{ kN/m.}$$

Je třeba ještě stanovit napjatost v patě zdi. Normálová síla tam je

$$N = -G_1 - G_2 - G_3 - Q_1 = -220,8 - 69 - 106,72 - 54,81 = -451,33 \text{ kN/m.}$$

Celkový tlak S zeminy na opěrnou zeď výšky $6 + 2,9 = 8,9 \text{ m}$ se rovná

$$S = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 8,9^2 \cdot \text{tg}^2\left(45 - \frac{30}{2}\right) = 277,235 \text{ kN/m.}$$

Statický moment sil k bodu a na vnějším líci paty zdi se rovná

$$M_a = (G_1 + G_3) \cdot \left(2,6 - \frac{1,6}{2}\right) + G_2 \cdot 2 \cdot \frac{1,0}{3} + Q_1 \cdot \left(2,6 + \frac{0,9}{2}\right) - S \cdot \frac{8,9}{3} = -19,76 \text{ kNm/m.}$$

Záporný výsledek značí, že statický moment tlaku zeminy S je větší než statický moment od vlastní tíhy zdi a zeminy nad Chaudyho deskou, zeď se tedy kolem bodu a překlápí. Zvýšení zdi o $h_1 = 2,9 \text{ m}$ je tedy příliš velké, je třeba je zmenšit.

Opakováním výpočtu zjistíme, že můžeme opěrnou zeď s použitím Chaudyho desky zvýšit pouze o $h_1 = 0,6 \text{ m}$ s vyložení Chaudyho desky $b_1 = 0,6 \text{ m}$, napětí v základové spáře by pak bylo 400 kPa . Pokud bychom mohli zapustit Chaudyho desku níž do stávající zdi, mohli bychom zvýšit opěrnou zeď o $1,2 \text{ m}$. Chaudyho deska by byla zapuštěna do zdi v hloubce $2,9 \text{ m}$ pod povrchem zeminy a byla by vyložena $0,9 \text{ m}$.

Příklad 10.3.4.

Navrhněte úhlovou železobetonovou zeď pro výšku $h = 6 \text{ m}$, zásypem je vlhký písek. Opěrná zeď nesmí přechýlat před vnější líc.

Řešení: Podle tabulky 10.1 je třecí úhel vlhkého písku $\varphi = 30^\circ$ a měrná tíha $\gamma = 10 \cdot 2,1 = 21 \text{ kN/m}^3$. Podle obrázku 10.27 bude tíha zeminy nad deskou

$$Q = 6 \cdot 6 \cdot 21 = 126 \text{ t}$$

a tlak zeminy S se bude rovnat

$$S = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 6^2 \cdot \text{tg}^2\left(45 - \frac{30}{2}\right) = 126 \text{ kN/m.}$$

Aby celá spára byla pouze tlačena, musí výslednice tlaku zeminy i vlastní tíhy sloupce zeminy procházet levým jádrovým bodem. Z momentové podmínky k tomuto bodu dostáváme

$$Q \cdot \frac{b}{6} - S \cdot 2 = 0$$

a po dosazení

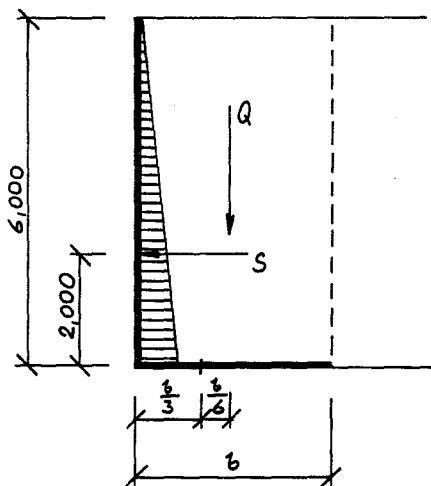
$$126 \cdot \frac{b}{6} - 126 \cdot 2 = 0 \dots b = \sqrt{12} \doteq 3,5 \text{ m.}$$

Extrémní napětí v základové spáře stanovíme ze známého vzorce pro kombinaci tlaku a ohybu

$$\sigma_{1,2} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} = \frac{-126 \cdot 3,5}{3,5} \pm \frac{126 \cdot 2}{\frac{1}{2} \cdot 3,5^2}$$

$$\sigma_1 = -249,4 \text{ kPa}, \quad \sigma_2 = -2,6 \text{ kPa.}$$

Protože největší tlak zdaleka nedosahuje mezního napětí písku $R = 400 \text{ kPa}$ je možno šířku zdi podstatně zmenšit. Opakováním výpočtu (nebo sestavením jednoduché rovnice) zjistíme, že je šířku možno zmenšit až na $b = 2,65 \text{ m}$, napětí pod



Obr.10.27. Úhlová opěrná zeď.

deskou se pak bude rozdělovat podle teorie o vyloučeném tahu. Tíha zeminy nad deskou nyní je

$$Q' = 126 \cdot 2,65 = 333,9 \text{ kN/m}$$

a statický moment sil Q' a S k levému líci a stěny je

$$M'_a = Q' \cdot \frac{2,65}{2} - S \cdot 2 = 190,42 \text{ kNm/m.}$$

Výslednice prochází tedy ve vodorovné vzdálenosti od bodu a

$$r = \frac{M'_a}{Q'} = \frac{190,42}{333,9} = 0,57 \text{ m,}$$

takže šířka tlačené části základové desky je

$$\chi = 3 \cdot r = 3 \cdot 0,57 = 1,71 \text{ m.}$$

Napětí v základové spáře má pak extrémní hodnotu

$$\sigma_0 = \frac{2 \cdot N}{\chi} = - \frac{2 \cdot 333,9}{1,71} = -390 \text{ kPa.}$$

Pro stanovení ohybových momentů v úhlové zdi je nyní nutno určit spojitá zatížení stěny. Tlak zeminy (obr. 10.28a) se zvětšuje lineárně s hloubkou, takže na spodním okraji zdi má hodnotu

$$q_1 = \frac{2 \cdot S}{h} = \frac{2 \cdot 126}{6} = 42 \text{ kN/m}^2.$$

Tíha zeminy způsobuje rovnoměrný tlak směřující dolů a jeho velikost je dána součinem měrné tíhy a hloubky, tedy

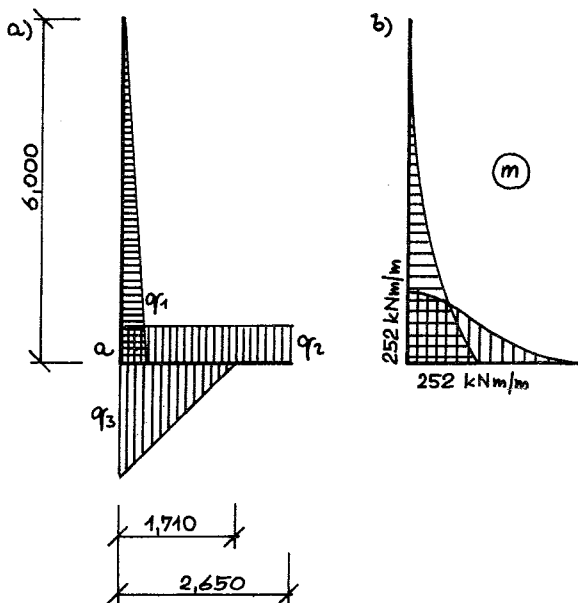
$$q_2 = \gamma \cdot h = 21 \cdot 6 = 126 \text{ kN/m}^2.$$

Reakce v základové spáře směřuje vzhůru, rozděluje se podle vyloučeného tahu a má tedy maximální hodnotu

$$q_3 = -\sigma_0 = 390 \text{ kN/m}^2.$$

Ohybové momenty na lomeném nosníku jsou vykresleny na obrázku 10.28b, maximální měrný ohybový moment je v bodě a a má velikost

$$m_a = S \cdot 2 = 126 \cdot 2 = 252 \text{ kNm/m.}$$



Obr.10.28. Zatížení a měrné ohybové momenty v úhlové zdi.

11. STATICKY NEURČITÉ PRUTOVÉ ROVINNÉ KONSTRUKCE.

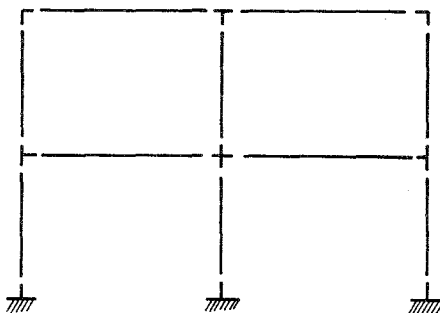
Všechny metody pro řešení vnitřních sil staticky neurčitých konstrukcí můžeme rozdělit na dvě skupiny metod: metody silové a metody deformační. Základní princip všech silových metod je v tom, že neznámé jsou silové veličiny /síly, momenty, napětí.../ a píšeme pro ně deformační podmínky. V deformačních podmínkách se jedná o zajištění spojitosti i po deformaci. Pro deformační metody je naopak charakteristické, že se v nich jako neznámé vyskytují deformační veličiny /např. posunutí a pootočení styčniců/ a píšeme pro ně statické podmínky rovnováhy. Crossova metoda, se kterou se seznámíme v této kapitole, spojuje v sobě vlastnosti obou těchto skupin metod. Patří sice mezi metody silové, protože jako neznámé se v ní vyskytují silové veličiny /ohybové momenty ve styčnicích/, ale pro jejich stanovení se využívá silových podmínek - momentových podmínek rovnováhy ve styčnicích.

Počet neznámých veličin v silové metodě je dán statickou neurčitostí konstrukce. V deformační metodě je počet neznámých dán deformační neurčitostí konstrukce, tedy počtem různých styčnickových posunutí a pootočení. Zdálo by se tedy, že silová metoda je vhodnější tam, kde je statická neurčitost menší než deformační neurčitost, a deformační metoda je vhodnější v opačném případě. Ovšem algoritmus výpočtu silovou metodou je poměrně komplikovaný, zatímco algoritmus deformační metody je velmi jednoduchý. Dává se proto často deformační metodě přednost i v těch případech, kdy deformační neurčitost je větší než statická, zejména proto, že samotné řešení soustavy lineárních rovnic není při použití výpočetní techniky problémem. Mimo to je deformační metoda vhodnější pro komplexní programování celého výpočtu, zatímco využití silové metody na počítačích znesnadňuje složitý algoritmus výpočtu.

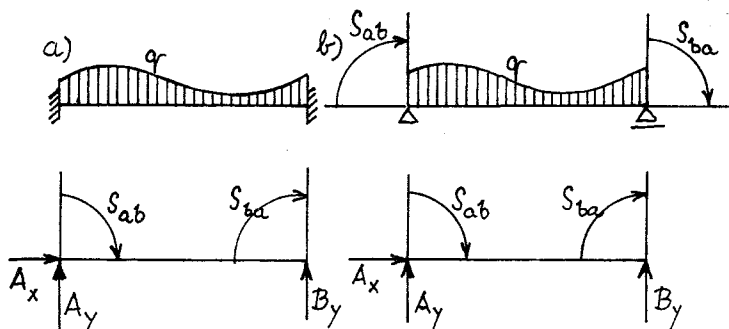
11.1. Metoda rozdělování momentů /Crossova/ pro konstrukce s neposuvnými styčnicíky.

Metodou pro řešení staticky neurčitých prutových konstrukcí, se kterou se zde seznámíme, je metoda Crossova. Tato metoda je bezesporu nejvýhodnější a nejrychlejší pro řešení vnitřních sil na rámových konstrukcích, pokud nedochází k posunům styčniců, tedy zejména pro spojitě nosáky a pro většinu symetrických symetricky zatížených rámu. Je to metoda iterační, při níž se každým během znovu přerozdělují ohybové momenty na konstrukci tak, aby se stále přibližovaly výslednému rovnovážnému stavu. Jako iterační metoda dává samozřejmě přibližné výsledky, ale nelze ji považovat za přibližnou metodu, protože přesnost výpočtu si sami volíme a můžeme se rozhodnout pro řešení orientační i pro řešení velmi přesné. Metodu Crossovu můžeme používat i pro řešení konstrukcí s posuvnými styčnicíky /např. patrové rámy vodoremně zatížené - větrem/. Ovšem při větším počtu tzv. patrových posuvů se výhody Crossovy metody ztrácejí, proto si ukážeme i zjednodušení pro mnohopatrové rámy /tzv. rámové výseky/.

Základními elementy konstrukce jsou v Crossově metodě styčnicíky, které jsou navzájem propojeny pomocí prutů /obr. 11.1/. Vlivem vnějšího zatížení se styčnicíky posunou a pootočí, čímž vyvolají v prutech vnitřní síly - ohybové momenty a posouvající a normálové síly. Protože pruty jsou do styčniců vetknuty/případy kloubového připojení prutů ke styčnicům se budeme zabývat později/, vznikají v místech připojení reakce, kterými působí pruty na styčnicíky a naopak.



Obr. 11.1. Styčnicíky a pruty.



Obr.11.2. Oboustranně vetknutý prut a jeho náhrada prostým nosníkem.

Základem Crossovy metody je analýza oboustranně vetknutého prutu /obr.11.2a/. Oboustranně vetknutý nosník je konstrukce 2x staticky neurčitá (srovnej příklad 6.3.1/, takže na něm je pět nezávislých složek reakcí. Silové složky A_x , A_y , B_y a momenty v dokonalém vetknutí S_{ab} , S_{ba} . Je třeba si všimnout, že moment S_{ba} je zaveden tak, že kladný

moment S_{ba} způsobuje záporný ohybový moment! Touto změnou, která na první pohled vypadá jako komplikace výpočtu, se ve skutečnosti výpočet nesmírně usnadňuje: momentová podmínka rovnováhy ve styčnicku pak zní, že součet momentů ve styčnicku musí být roven nule.

Abychom stanovili reakce na oboustranně vetknutém nosníku, nahradíme si jej prostým nosníkem /obr.11.2b/, který zatížíme zatím neznámými osamělými momenty

S_{ab} , S_{ba} . Vidíme, že reakce na obou nosnicích jsou stejné, je třeba zajistit i stejné deformace konců obou nosníků; ve vetknutí je pootočení rovno nule. Musí být tedy osamělé momenty S_{ab} , S_{ba} na prostém nosníku z obrázku 11.2b tak velké, aby pootočení obou konců bylo právě nulové, a to jsou dvě rovnice o dvou neznámých. Můžeme je zapsat

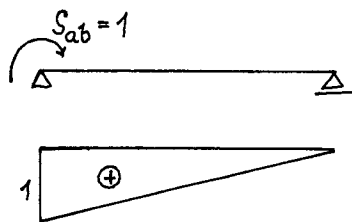
$$\varphi_a = 0 \quad \varphi_b = 0$$

Pootočení konců a, b prostého nosníku od celkového zatížení prutu si rozložíme na pootočení od vnějšího zatížení, která označíme φ_{az} , φ_{bz} , pootočení od momentu $S_{ab} = 1$, která označíme φ_{aa} , φ_{ba} , a pootočení od $S_{ba} = 1$, která označíme φ_{ab} , φ_{bb} . Pro S_{ab} , S_{ba} různé od jedné bude platit

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \varphi_{az} + \varphi_{aa} S_{ab} + \varphi_{ab} S_{ba} \\ \varphi_b &= \varphi_{bz} + \varphi_{ba} S_{ab} + \varphi_{bb} S_{ba} \end{aligned} \quad /11.1/$$

Hodnoty φ_{ij} určíme pomocí zásad uvedených v odstavci 8.5, např. pomocí Mohrových vět. Průběh ohybových momentů na prostém nosníku od zatížení $S_{ab} = 1$ je uveden na obrázku 11.3, a protože pootočení na nosníku je rovno posouvající síle na duálním nosníku od zatížení redukovaným obrazcem momentovým, platí

$$\begin{aligned} \varphi_{aa} &= \frac{2}{3} \frac{1}{2} l \frac{1}{EI} = \frac{1}{3EI} \\ \varphi_{ba} &= -\frac{1}{3} \frac{1}{2} l \frac{1}{EI} = -\frac{1}{6EI} \end{aligned} \quad /11.2/$$



Ze symetrie nosníku vyplývá

$$\varphi_{bb} = \varphi_{aa} \quad \varphi_{ab} = \varphi_{ba} \quad /11.3/$$

Pootočení φ_{az} , φ_{bz} závisí na způsobu zatížení a získáme je opět pomocí Mohrových vět. Na příklad pro plné rovnoměrné zatížení intenzity q dostáváme

$$\varphi_{az} = -\varphi_{bz} = \frac{1}{2} \frac{2}{3} l \frac{1}{8} \frac{q l^2}{EI} = \frac{q l^3}{24 EI} \quad /11.4/$$

Obr.11.3. Ohybové momenty od $S_{ab} = 1$.

Pro osamělé břemeno velikosti F působící uprostřed rozpětí nosníku dostáváme

$$\varphi_{az} = -\varphi_{bz} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{F l}{4 E I} = \frac{F l^2}{16 E I} \quad /11.5/$$

apod. Po dosazení vztahů /11.2/ a /11.3/ do rovnic /11.1/ dostáváme

$$\begin{aligned} S_{ab} &= \frac{2 E I}{l} 2 (\varphi_a - \varphi_{az}) + (\varphi_b - \varphi_{bz}) \\ S_{ba} &= \frac{2 E I}{l} (\varphi_a - \varphi_{az}) + 2 (\varphi_b - \varphi_{bz}) \end{aligned} \quad /11.6/$$

Výraz $2EI/l$ se nazývá skutečná ohybová tuhost prutu a značí se k'_{ab} , tedy

$$k'_{ab} = \frac{2 E I}{l} \quad /11.7/$$

Jak vidíme z rovnic /11.6/ ohybová tuhost prutu je vlastně velikost momentu ve vetknutí oboustranně vetknutého prutu, který je vyvozen pootočením tohoto styčnicku o úhel rovný $0,5$.

Protože nás zajímá velikost momentů ve vetknutích oboustranně vetknutého prutu, dosadíme do rovnic /11.6/ nulová pootočení konců $\varphi_a = \varphi_b = 0$ a dostaneme

$$\begin{aligned} S_{ab} &= -k'_{ab} (2 \varphi_{az} + \varphi_{bz}) \\ S_{ba} &= -k'_{ab} (\varphi_{az} + 2 \varphi_{bz}) \end{aligned} \quad /11.8/$$

Vzorce /11.8/ slouží k výpočtu momentů v dokonalém vetknutí pro různé druhy zatížení, dosadíme-li do nich pootočení konců prostého nosníku příslušně zatíženého. Na příklad pro plné rovnoměrné zatížení po dosazení z /11.4/ dostáváme

$$S_{ab} = -S_{ba} = -\frac{1}{12} q l^2 \quad /11.9/$$

Kromě prutů oboustranně vetknutých se setkáváme i s pruty vetknutými na jednom konci a na druhém podepřeném kloubově nebo posuvně /obr. 11.4/. Vztahy pro jednostranně vetknutý nosník získáme ze vztahů /11.6/, když si uvědomíme, že na jednostranně vetknutém nosníku není pootočení kloubu φ_b známé, ale místo toho je v kloubu ohybový moment roven nule. Položíme tedy pravou stranu druhé z rovnic /11.6/ rovnou nule, vypočteme z ní pootočení φ_b a to dosadíme do první z rovnic /11.6/. Po úpravě dostaneme

$$S_{ab}^k = \frac{1,5 E I}{l} 2 (\varphi_a - \varphi_{az}) \quad /11.10/$$

Vidíme, že tuhost prutu jednostranně vetknutého je rovna třem čtvrtinám tuhosti prutu vetknutého oboustranně

$$k_{ab}^k = \frac{3}{4} k'_{ab} \quad /11.11/$$

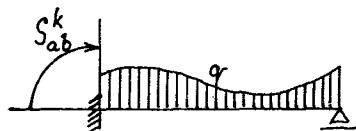
Moment ve vetknutí jednostranně vetknutého prutu získáme ze vztahu /11.10/ po dosazení nulového pootočení vetknutí $\varphi_a = 0$ a dostáváme

$$S_{ab}^k = -k_{ab}^k \cdot 2 \varphi_{az} \quad /11.12/$$




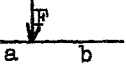
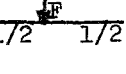
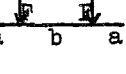
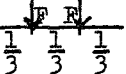
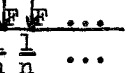
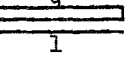
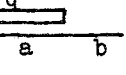
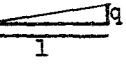
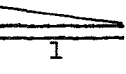
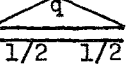
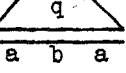
Na příklad pro plné rovnoměrné zatížení dostáváme po dosazení z /11.4/ do /11.12/

$$S_{ab}^k = -\frac{1}{8} q l^2 \quad /11.13/$$

Velikosti momentů v dokonalém vetknutí pro různé typy zatížení prutů jsou uvedeny v tabulce 11.1.

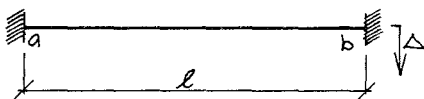


Obr. 11.4. Jednostranně vetknutý nosník.

S_{ab} S_{ba}			
	S_{ab}	S_{ba}	S_{ab}^k
	$-\frac{F a b^2}{l^2}$	$\frac{F a^2 b}{l^2}$	$-\frac{F a b (1+b)}{2 l^2}$
	$-\frac{1}{8} F l$	$\frac{1}{8} F l$	$-\frac{3}{16} F l$
	$-\frac{F a (1-a)}{l}$	$\frac{F a (1-a)}{l}$	$-\frac{F 3 a (1-a)}{2 l}$
	$-\frac{2}{9} F l$	$\frac{2}{9} F l$	$-\frac{1}{3} F l$
	$-\frac{n^2 - 1}{12 n} F l$	$\frac{n^2 - 1}{12 n} F l$	$-\frac{n^2 - 1}{8 n} F l$
	$-\frac{1}{12} q l^2$	$\frac{1}{12} q l^2$	$-\frac{1}{8} q l^2$
	$-\frac{1}{12} q a^2 \frac{(1+b)^2 + 2b^2}{l^2}$	$\frac{1}{12} q b^2 \frac{b(1+3a)}{l^2}$	$-\frac{1}{8} q a^2 \frac{(1+b)^2}{l^2}$
	$-\frac{1}{30} q l^2$	$\frac{1}{20} q l^2$	$-\frac{7}{120} q l^2$
	$-\frac{1}{20} q l^2$	$\frac{1}{30} q l^2$	$-\frac{1}{15} q l^2$
	$-\frac{5}{96} q l^2$	$\frac{5}{96} q l^2$	$-\frac{5}{64} q l^2$
	$-\frac{1}{12} q \frac{(a+b)(l^2 + al - a^2)}{l}$	$\frac{1}{12} q \frac{(a+b)(l^2 + al - a^2)}{l}$	$-\frac{1}{8} q \frac{(a+b)(l^2 + al - a^2)}{l}$

Tabulka 11.1. Momenty v dokonalém vetknutí.

Zvláštní případ zatížení prutu je zatížení známým poklesem podpory. K tomuto zatížení dochází při protažení prutů vlivem oteplení nebo při poklesu základu např. na poddolovaném území apod. Při zatížení poklesem pravé podpory o hodnotu Δ (obr. 11.5/ si pro stanovení momentů v dokonalém vetknutí oboustranně vetknutý nosník nahradíme konzolou (obr. 11.6/ za-



Obr. 11.5. Pokles styčnicku.

tíženou neznámými reakcemi B , S_{ba} . Tyto reakce určíme z podmínek, že průhyb bodu b bude roven Δ a pootočení bodu b bude nulové. Označme průhyb bodu b vlivem reakce $B = 1$ jako w_b a vlivem momentu $S_{ba} = 1$ jako w_s , pootočení bodu b vlivem reakce $B = 1$ jako φ_b a vlivem momentu $S_{ba} = 1$ jako φ_s . Tyto dílčí deformace určíme pomocí Mohrových vět a získáme

$$w_b = -\frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{E I} = -\frac{1}{3} \frac{1^3}{E I}$$

$$w_s = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{E I} = \frac{1}{2} \frac{1^2}{E I}$$

$$\varphi_b = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{E I} = -\frac{1}{2} \frac{1^2}{E I}$$

$$\varphi_s = 1 \frac{1}{E I} = \frac{1}{E I}$$

Podmínečné rovnice mají tedy tvar

$$-\frac{1}{3} \frac{1^3}{E I} \cdot B + \frac{1}{2} \frac{1^2}{E I} \cdot S_{ba} = \Delta$$

$$-\frac{1}{2} \frac{1^2}{E I} \cdot B + \frac{1}{E I} \cdot S_{ba} = 0$$

Řešením dostáváme

$$B = -\frac{12 E I}{1^3} \Delta$$

$$S_{ba} = -\frac{6 E I}{1^2} \Delta$$

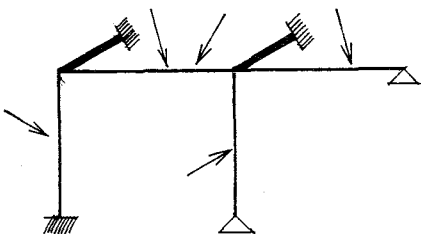
Moment v levé podpoře S_{ab} již získáme ze statické podmínky rovnováhy

$$S_{ab} = -S_{ba} + B l = -\frac{6 E I}{1^2} \Delta$$

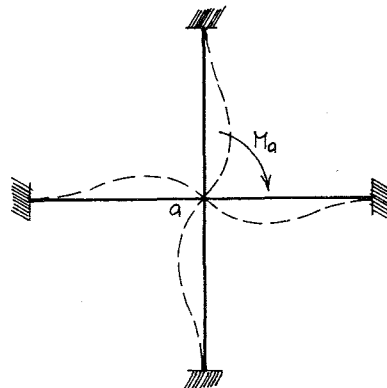
Vidíme, že pokles pravé podpory způsobí oba momenty ve vetknutích stejné co do velikosti i co do znaménka, jejich hodnota je

$$S_{ab} = S_{ba} = -\frac{6 E I}{1^2} \Delta \quad /11.14/$$

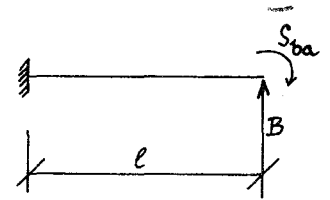
A nyní si řekněme o postupu výpočtu při Crossově metodě. Nejprve předpokládáme, že všechny styčníky upevníme tak, aby se nemohly pootočit (obr. 11.7/. Při takovémto upevnění vznikají na jednotlivých prutech tzv. momenty v dokonalém vetknutí podle tabulky 11.1. Tyto momenty nejsou ovšem v rovnováze, a proto vznikají v tuhých upevněních styčnicků momenty rovné záporně vzatému součtu momentů ve styčníku. Při dalším řešení potom styčníky postupně uvolňujeme, to znamená, že v jednom styčníku odstraníme tuhé upevnění. Tím odstraníme také moment v upevnění, což je totéž, jako bychom styčník zatížili stejně velikým momentem opačného znaménka. Musíme tedy do styčníku a přidat moment M_a (obr. 11.8/,



Obr. 11.7. Tuhé upevnění styčnicků.



Obr. 11.8. Styčnickový moment.



Obr. 11.6. Náhrada konzolou.

kteřý dává s ostatními momenty na prutech momentovou rovnováhu (tj. nulový součet). Tento moment způsobí pootočení styčnicku a (ostatní styčnický zůstávají upevněny) o úhel φ_a . Od pootočení $\varphi_a=1$ vznikají v prutech momenty, které jsou rovny polovině ohybové tuhosti příslušného prutu - srovnej s první rovnicí /11.6/ nebo s definicí ohybové tuhosti prutu. Vyvodí tedy styčnickový moment M_a v prutech sbíhajících se ve styčnicku a momenty přímo úměrné ohybovým tuhostem prutů, a součet momentů v prutech musí být M_a , takže velikost přidaného momentu v prutu a_i bude

$$M_{ai} = \frac{k_{ai}}{\sum k_a} M_a = \mu_{ai} M_a \quad /11.15/$$

Koeficientu μ_{ai} říkáme rozdělovací součinitel, a ten určuje, jak velká část styčnickového momentu M_a připadne prutu a_i . Součet rozdělovacích součinitelů v kterémkoliv styčnicku musí být roven 1. Protože součet tuhostí prutů v koncových styčnicích prutu je obecně různý, je obvykle

$$\mu_{ai} \neq \mu_{ia}$$

Prohlédneme-li si rovnici /11.15/, vidíme, že tuhosti se v ní vyskytují pouze v poměru. Můžeme tedy všechny tuhosti přenásobit libovolnou konstantou C , čímž dostaneme poměrné ohybové tuhosti prutů, označované k_{ab}

$$k_{ab} = C k'_{ab} \quad /11.16/$$

kde C je konstanta zcela libovolná (samozřejmě různá od nuly), ale stejná pro všechny pruty konstrukce. Volíme ji tak, abychom na co největším počtu prutů konstrukce měli poměrnou ohybovou tuhost prutu rovnou jedné. Při řešení staticky neurčitých konstrukcí počítáme téměř vždy s poměrnými tuhostmi prutů, proto slovo "poměrná" obvykle vynecháváme a pojmem tuhost prutu označujeme vždy tuhost prutu poměrnou.

Obvykle velikost konstanty C nestanovujeme, stačí nám, aby byla stejná pro celou konstrukci. To znamená, že tuhosti prutů jsou přímo úměrné momentu setrvačnosti průřezu a nepřímo úměrné délce prutu. Má-li na příklad prut obdélníkového průřezu $0,3 \times 0,4$ m a délky 4 m tuhost $k_1 = 1$ (tuhost jednoho prutu konstrukce můžeme volit), bude mít jiný prut obdélníkového průřezu $0,3 \times 0,6$ m délky 6 m tuhost k_2 , pro níž platí

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{\frac{2 E I_2}{I_2}}{\frac{2 E I_1}{I_1}} \quad k_2 = k_1 \frac{I_2 I_1}{I_1 I_2} = 1 \cdot \frac{\frac{1}{12} 0,3 \cdot 0,6^3 \cdot 4}{\frac{1}{12} 0,3 \cdot 0,4^3 \cdot 6} = 2,25$$

Že konstanta C má ve skutečnosti velikost (je-li modul pružnosti $E = 2 \cdot 10^7$ kPa)

$$C = \frac{k_1}{k'_1} = \frac{1}{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 0,3 \cdot 0,4^3}{12 \cdot 4}} = 62,5 \cdot 10^{-6} \text{ kN}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

to při výpočtu vůbec nepotřebujeme vědět.

Pootočení φ_a styčnicku a vyvozené momentem M_a nevyvolá pouze momenty M_{ai} , ale podle druhé rovnice /11.6/ vyvolá i momenty na opačných koncích prutů, tedy M_{ia} . Srovnáme-li prvou a druhou rovnicí /11.6/ za předpokladu nulového zatížení a nulových deformací vyjma φ_a , vidíme, že moment M_{ia} má poloviční velikost než moment M_{ai} . Vyvodí tedy styčnickový moment M_a na opačných koncích prutů sbíhajících se ve styčnicku a momenty, které mají poloviční hodnotu než

momenty přidané na pruty ve styčnicku, tedy

$$\Delta M_{ia} = 0,5 \Delta M_{ai} = \mathcal{J}_{ai} \Delta M_{ai} \quad /11.17/$$

Koeficientu \mathcal{J}_{ai} říkáme převáděcí součinitel a na prutech konstantního průřezu je roven 0,5.

Přidáním styčnickového momentu M_a , jeho rozdělením na pruty styčnicku a převedením polovičních hodnot na opačné konce prutů je ukončeno tzv. vyrovnání styčnicku a . Po jeho ukončení styčnick a opět upevníme a přistoupíme k vyrovnávání dalšího styčnicku. Protože vyrovnáním sousedních styčnicků způsobíme opět ve styčnicku a novou nerovnováhu (ovšem značně menší), musíme v dalším iteračním běhu styčnick a vyrovnávat znovu. Takto iteračním způsobem postupujeme tak dlouho, až můžeme momenty převáděné na druhé konce prutů zanedbat. Iteraci končíme vždy vyrovnáním styčnicků.

Pokud je některý prut připevněn kloubově, spočívá jediný rozdíl ve výpočtu v tom, že tuhost tohoto prutu je na straně vetknutí rovna třem čtvrtinám tuhosti oboustranně vetknutého prutu, na straně kloubu je nulová. Také převáděcí součinitel do kloubu je nulový - do kloubu momenty nepřevádíme!

Prut prořatý osou symetrie má tuhost poloviční než plný prut a přes osu symetrie momenty nepřevádíme.

Postup při řešení konstrukce Crossovou metodou je tedy následující :

1. Výpočet ohybových tuhostí jednotlivých prutů konstrukce (tuhostí poměrných nebo skutečných)
2. Stanovení momentů na dokonale vetknutých prutech pomocí tabulky 11.1
3. Výpočet rozdělovacích součinitelů pro pruty ve styčnicích podle /11.15/
4. Postupné vyrovnávání styčnicků; pro urychlení iterace je nejvýhodnější začít styčnickem, kde je největší momentová nerovnováha, a postupovat po styčnicích šachovnicově. Vyrovnávání je ukončeno, když je rovnováha ve všech styčnicích
5. Vyčíslení výsledných ohybových momentů ve styčnicích - součtem přírůstků získaných podle /11.15/ a /11.17/
6. Výpočet posouvajících sil ze získaných ohybových momentů
7. Výpočet reakcí z posouvajících sil
8. Výpočet maximálních mezipodporových momentů

Posouvající síly počítáme z průběhu ohybových momentů na prutu, který vyjme-me z konstrukce. Působení okolní konstrukce vyjadřují známé momenty ve styčnicích (obr. 11.9/. Samotný styčnickový moment

M_{ab} vyvodí na prutu reakci A , jež je rovna

$$A' = - \frac{M_{ab}}{l_{ab}}$$

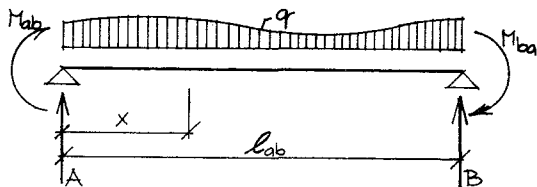
a obdobně styčnickový moment M_{ba} vyvodí reakci B o velikosti

$$A'' = - \frac{M_{ba}}{l_{ab}}$$

Označíme-li posouvající sílu v obecném průřezu x na prostém nosníku ab od

zatížení prutu (bez styčnickových momentů) jako \mathcal{T} , bude celková posouvající síla T_x v průřezu x rovna

$$T = \mathcal{T} - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_{ab}}$$



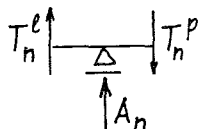
Obr. 11.9. Výpočet posouvajících sil při Crossově metodě.

/11.18/

Vidíme, že posouvající síly na prutech jsou rovny posouvajícím silám na odpovídajících prostých nosnicích, které zvětšíme o tzv. momentový doplněk, který je pro celý prut konstantní. Upozornění - styčnickové momenty M_{ab} , M_{ba} uvažujeme se znaménky, která jsme získali z Crossovy metody, takže kladný styčnickový moment M_{ba} způsobuje tah v horních vlásknech /záporný ohybový moment/!! U styčnickového momentu M_{ab} se znaménko s ohybovým momentem shoduje.

11.2. Spojitý nosník.

Při výpočtu reakcí na spojitém nosníku vycházíme z již známých velikostí posouvajících sil v sousedství podpory. Vyjmeme-li z nosníku dílek v bezprostředním okolí podpory n /obr.11.10/ a označíme-li reakci v podpoře jako A_n , posouvající síly nalevo a napravo od podpory jako T_n^l , T_n^p (kladné smysly jsou uvedeny na obrázku 11.10/, můžeme psát směrovou podmínku rovnováhy ve svislém směru



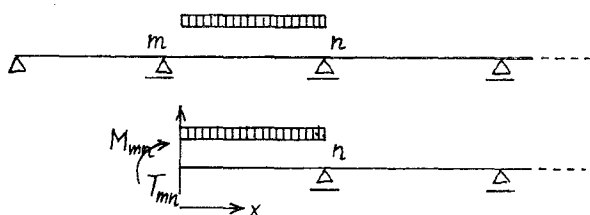
Obr.11.10. Okolí podpory.

$$T_n^l + A_n - T_n^p = 0$$

odkud dostáváme pro reakci vztah

$$A_n = T_n^p - T_n^l \quad /11.19/$$

takže reakce v podpoře spojitého nosníku se rovná posouvající síla napravo od podpory minus posouvající síla nalevo od podpory (i se znaménky).



Obr.11.11. Náhrada konzolou.

Pro stanovení maximálních mezipodporových momentů je možno použít několika různých způsobů, za nejvýhodnější je možno považovat náhradu konzolou. Ta spočívá v tom, že odstraníme část nosníku nalevo od průřezu těsně za levou podporou prutu /obr.11.11/ a odňatou část nahradíme ohybovým momentem a posouvající silou. V obecném průřezu vzdáleném x od levé podpory jsou

ohybový moment a posouvající síla jako na konzole rovny

$$M_x = M_{mn} + T_{mn} x - \frac{1}{2} q x^2 \quad /11.20/$$

$$T_x = T_{mn} - q x \quad /11.21/$$

Chceme-li určit maximální mezipodporový moment, použijeme Schwedlerovy věty, podle které vychází souřadnice x_c nebezpečného průřezu

$$x_c = \frac{T_{mn}}{q}$$

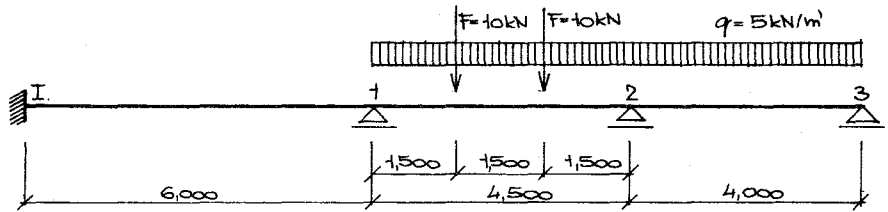
Tuto vzdálenost pak dosadíme do rovnice /11.20/.

Příklad 11.2.1.

Určete vnitřní síly spojitého nosníku konstantního průřezu uvedeného na obrázku 11.18. Nosník je železobetonový a má průřez 0,3/0,6 m.

Řešení: Nejprve stanovíme tuhosti jednotlivých prutů nosníku. Protože průřez i materiál jsou na celém spojitém nosníku konstantní, je možno je zahrnout do

konstanty C a tuhost (poměrná) je potom nepřímo úměrná délce prutu. Uvažujeme-li tuhost prutu I-1 rovnou jedné, bude platit



Obr.11.12. Spojitý nosník.

$$k_{I1} = 1 \quad k_{12} = \frac{6}{4,5} = 1,333 \quad k_{23}^k = \frac{3}{4} \frac{6}{4} = 1,125$$

Dále je třeba stanovit momenty ve vetknutích prutů. Z tabulky 11.1 dostáváme

$$S_{12} = -S_{21} = -\frac{1}{12} 5 \cdot 4,5^2 - \frac{2}{9} 10 \cdot 4,5 = -18,4375 \text{ kNm}$$

$$S_{23}^k = -\frac{1}{8} 5 \cdot 4^2 = -10 \text{ kNm}$$

Pomocí vztahu /11.15/ vypočteme nyní rozdělovací součinitele ve styčnicích. Dostáváme

$$\mu_{1I} = \frac{1}{1 + 1,333} = 0,4286$$

$$\mu_{12} = \frac{1,333}{1 + 1,333} = 0,5714$$

$$\mu_{21} = \frac{1,333}{1,333 + 1,125} = 0,5424$$

$$\mu_{23} = \frac{1,125}{1,333 + 1,125} = 0,4576$$

Momenty vyrovnáváme ve schématu konstrukce, které si nakreslíme dostatečně veliké. Ke každému styčníku připišeme rozdělovací součinitele prutů. Pod styčník zapisujeme k jednotlivým prutům momenty v dokonalém vetknutí (označeny \circ) a získávané momentové přírůstky. Vyrovnávání začneme ve styčníku 1, kde je největší momentová nerovnováha, a potom vyrovnáváme střídavě styčníky 2 a 1. Byla zvolena přesnost výpočtu na čtyři desetinná místa.

I	0,4286	1	0,5714	0,5424	2	0,4576	3
			-18,4375 \circ	\circ 18,4375		-10,0000 \circ	
+3,0509 ←	+7,9018	+10,5357	→	+5,2679			
		-3,7167	←	-7,4334		-6,2719	
+0,7964 ←	+1,5929	+2,1238	→	+1,0619			
		-0,2880	←	-0,5760		-0,4860	
+0,0617 ←	+0,1234	+0,1646	→	+0,0823			
		-0,0223	←	-0,0446		-0,0377	
+0,0048 ←	+0,0096	+0,0128	→	+0,0064			
		-0,0017	←	-0,0035		-0,0029	
<u>+0,0004</u> ←	<u>+0,0007</u>	<u>+0,0010</u>					
				+16,7985		-16,7985	
+4,8142	+9,6284	-9,6284					

Ke schématu konstrukce je výhodné přikreslit si kloubové podpory, abychom věděli, že do tohoto styčníku momenty nepřevádíme.

Při řešení jsme tedy postupovali tím způsobem, že nejprve byl vyrovnán styčník 1, kde součet momentů v dokonalém vetknutí byl -18,4375. Do styčníku bylo třeba přidat moment stejně veliký opačného znaménka (odstranění upnutí styčníku). Tento moment byl rozdělen podle rozdělovacích součinitelů, takže do průřezu 1-I přibyl moment +7,9018 kNm a do průřezu 1-2 moment +10,5357 kNm. Do průřezů I-1

a 2-1 byly převedeny poloviční hodnoty těchto momentů. Protože ve styčnicku 1 je nyní rovnováha (součet momentů je roven nule), můžeme tyto momenty podtrhnout. V rámci podtržení je vždy součet momentů nulový a při výpočtu následující nerovnováhy ve styčnicku 1 není třeba tyto momenty uvažovat, sčítáme pouze hodnoty pod podtržením. Ve styčnicku 2 je nyní (po převedení momentu +5,2679 kNm) nerovnováha $+18,4375 - 10 + 5,2679 = +13,7054$ kNm, je tedy nutno přidat do styčnicku moment $-13,7054$ kNm a tento moment rozdělit v poměru tuhostí - do průřezu 2-1 $-7,4334$ kNm a do průřezu 2-3 moment $-6,2719$ kNm. Tím je styčník 2 vyrovnán. Do průřezu 3-2 (kloub) nepřevádíme, do průřezu 1-2 převedeme polovinu z přírůstku momentu v průřezu 2-1, tj. $-3,7167$ kNm. Tímto převedením byla porušena rovnováha ve styčnicku 1, je tedy třeba tento styčník znovu vyrovnat přidáním momentu $+3,7167$ kNm a jeho rozdělením v poměru tuhostí.

Tímto způsobem pokračujeme až do dosažení požadované přesnosti řešení. Získaná přesnost je vždy větší než poslední nepřevedený moment (v našem příkladu $0,0005$ kNm), protože následujícím vyrovnáním styčnicku 2 by byl do průřezu 2-1 přidán ještě moment cca $-0,0003$ kNm, takže nepřevedením momentu $0,0005$ kNm se dopouštíme chyby pouze cca $0,0002$ kNm.

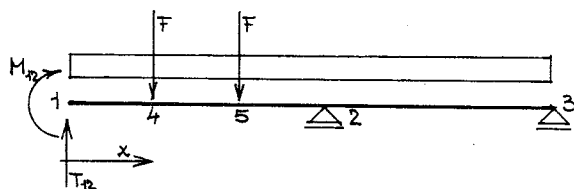
Po ukončeném vyrovnávání momenty v průřezech dvakrát podtrhneme a součtem všech přírůstků získáme výsledné momenty. V našem příkladu vyšlo

$$\begin{aligned} M_{1I} &= +4,8142 \text{ kNm} & M_{1I} &= +9,6284 \text{ kNm} & M_{12} &= -9,6284 \text{ kNm} \\ M_{21} &= +16,7985 \text{ kNm} & M_{23} &= -16,7985 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Součty momentů v obou styčnicích jsou nulové, momenty jsou tedy v rovnováze. Ze vzorce /11.18/ vypočteme posouvající síly a dostáváme

$$\begin{aligned} T_{1I} &= T_{1I} = 0 - \frac{+4,8142 + 9,6284}{6} = -2,4071 \text{ kN} \\ T_{12} &= \frac{1}{2} 5,4,5 + 10 - \frac{-9,6284 + 16,7985}{4,5} = 19,6586 \text{ kN} \\ T_{21} &= -\frac{1}{2} 5,4,5 - 10 - \frac{-9,6284 + 16,7985}{4,5} = -22,8414 \text{ kN} \\ T_{23} &= \frac{1}{2} 5,4 - \frac{-16,7985 + 0}{4} = 14,1996 \text{ kN} \\ T_{32} &= -\frac{1}{2} 5,4 - \frac{-16,7985 + 0}{4} = -5,8004 \text{ kN} \end{aligned}$$

Mezipodporové ohybové momenty získáme po oddělení části nosníku až po levý styčník, působení odňaté části pak nahradíme ohybovým momentem a posouvající silou v místě oddělení - pro pole 1-2 je oddělení uvedeno na obrázku 11.13. Takže ohybový moment v průřezu 4, to je pod levým břemenem F , je roven



$$\begin{aligned} M_4 &= M_{12} + T_{12} \cdot 1,5 - \frac{1}{2} 5,1,5^2 = \\ &= -9,628 + 19,657 \cdot 1,5 - \\ &\quad - \frac{1}{2} 5,1,5^2 = 14,233 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Obr.11.13. Mezipodporové momenty v poli 1-2.

Maximální mezipodporový moment je v místě, kde posouvající síla je nulová, to je mezi průřezy 4 a 5. Vzdálenost tohoto průřezu získáme z vyjádření rovnice posouvající síly, to je

$$T_c = 0 = T_{12} - F - q x_c = 19,657 - 10 - 5 x_c \quad x_c = 1,931 \text{ m}$$

a maximální mezipodporový moment v poli 1-2 je roven

$$M_c = -9,628 + 19,657 \cdot 1,931 - \frac{1}{2} 5 \cdot 1,931^2 - 10 \cdot 0,431 = 14,698 \text{ kNm}$$

Obdobně v poli 2-3 dostáváme

$$14,2 - 5 \cdot x_d = 0 \quad x_d = 2,84 \text{ m}$$

$$M_d = -16,799 + 14,2 \cdot 2,84 - \frac{1}{2} 5 \cdot 2,84^2 = 3,365 \text{ kNm}$$

Reakce v podporách získáme ze vztahu /11.19/ jako rozdíl posouvajících sil, takže platí

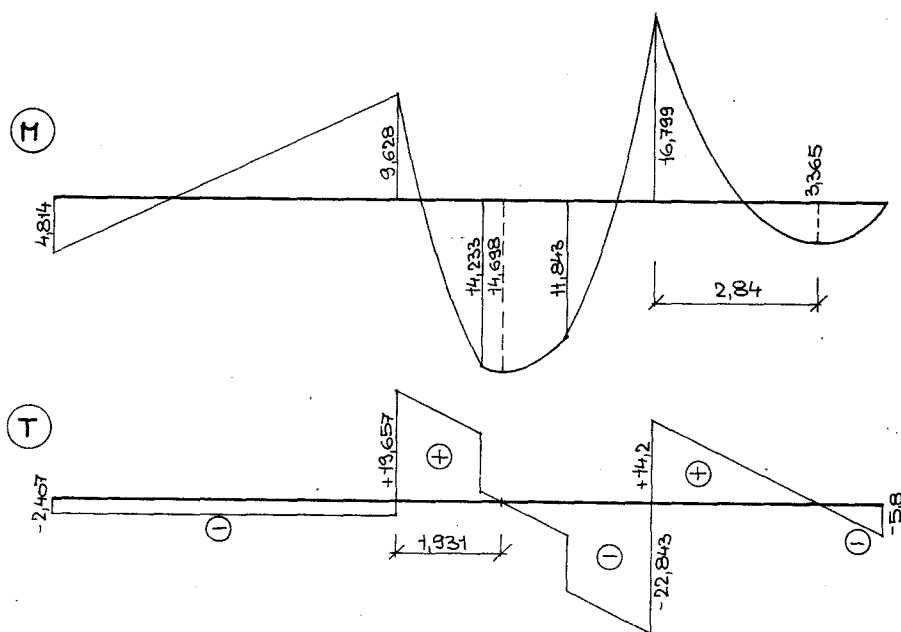
$$A_I = T_{I1} = -2,407 \text{ kN}$$

$$A_1 = T_{12} - T_{1I} = 19,657 - (-2,407) = 22,064 \text{ kN}$$

$$A_2 = T_{23} - T_{2I} = 14,2 + 22,843 = 37,043 \text{ kN}$$

$$A_3 = -T_{32} = 5,8 \text{ kN}$$

Při vynášení ohybových momentů je třeba stále pamatovat na to, že v Crossově metodě kladný moment na pravém konci prutu způsobuje tah v horních vláknech, tedy obráceně, než jak je definován ohybový moment. Výsledné průběhy ohybových momentů a posouvajících sil na spojitém nosníku jsou vyneseny na obrázku 11.14.



Obr.11.14. Ohybové momenty a posouvající síly na spojitém nosníku.

Příklad 11.2.2.

Určete vnitřní síly spojitého nosníku z příkladu 11.2.1 od zatížení poklesem podpory 1 o 20 mm.

Řešení: Protože nosník je stejný jako v předešlém příkladu, budou stejné i tuhosti a rozdělovací součinitele. Pokles podpory 1 o 20 mm způsobí v prutech I-1 a 1-2 momenty v dokonalém vetknutí podle /11.14/

$$S_{I1} = S_{1I} = -\frac{6EI}{l^2} = -\frac{6 \cdot 2 \cdot 10^7}{6^2} \frac{0,3 \cdot 0,6^3}{12} 0,02 = -360 \text{ kNm}$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 10^7}{4,5^2} \frac{0,3 \cdot 0,6^3}{12} 0,02 = +640 \text{ kNm}$$

Při vyrovnávání postupujeme jako v předešlém příkladu s tím rozdílem, že vyrovnávání začínáme ve styčnicku 2, kde je největší nerovnováha momentů :

I	0,4286	1	0,5714	0,5424	2	0,4576	3
-360,00	o	o	-360,00	+640,00	o	o	+640,00
-22,81	←	-45,62	-173,56	←	-347,12	-292,88	
-1,77	←	-3,53	-60,82	→	-30,41		
-0,14	←	-0,27	+8,25	←	+16,49	+13,92	
-384,71		-409,43	-4,71	→	-2,36		
			+0,64	←	+1,28	+1,08	
			-0,37	→	-0,18		
			+409,43		+0,10	+0,08	
					+277,80	-277,80	

Výsledné momenty tedy jsou

$$M_{I1} = -384,71 \text{ kNm}$$

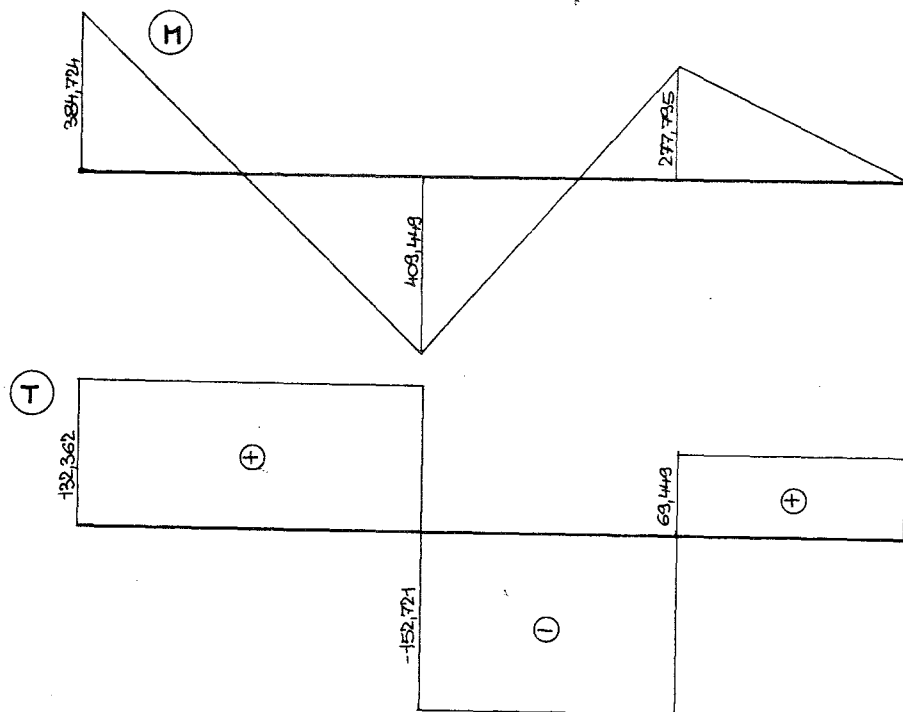
$$M_{1I} = -409,43 \text{ kNm}$$

$$M_{12} = 409,43 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = 277,80 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = -277,80 \text{ kNm}$$

Ve styčnicích 1 i 2 je momentová rovnováha.



Obr.11.15. Ohybové momenty a posouvající síly na spojitým nosníku zatíženém poklesem podpory.

Posouvající síly získáme opět po dosazení do vztahu /11.18/, přičemž posouvající síla na prostém nosníku je na všech prutech nulová. Dostáváme

$$T_{I1} = T_{1I} = - \frac{-384,724 - 409,449}{6} = 132,362 \text{ kN}$$

$$T_{12} = T_{21} = - \frac{409,449 + 277,795}{4,5} = -152,721 \text{ kN}$$

$$T_{23} = T_{32} = - \frac{-277,795}{4} = 69,449 \text{ kN}$$

Pro reakce použijeme i zde vztahu /11.19/a získáme

$$A_I = 132,362 \text{ kN}$$

$$A_1 = -152,721 - 132,362 = -285,083 \text{ kN}$$

$$A_2 = 69,449 + 152,721 = 222,170 \text{ kN}$$

$$A_3 = -69,449 \text{ kN}$$

Výsledné průběhy ohybových momentů a posouvajících sil jsou uvedeny na obrázku 11.15.

11.3. Plastické rezervy spojitých nosníků.

U staticky neurčitých ohybaných konstrukcí jsou kromě plastických rezerv průřezů, o nichž pojednával odstavec 8.4, ještě další plastické rezervy, podobně jako u staticky neurčitých tažených příhradových soustav. Ovšem u ohybaných konstrukcí je situace podstatně složitější. Vyskytují se zde totiž současně s pružnými částmi průřezy, které jsou ve stadiu plastickém a celé oblasti, které jsou ve stadiu pružnoplastickém. Je tedy přesný výpočet staticky neurčitých konstrukcí dosti obtížný.

U obvyklých konstrukcí se ovšem můžeme spokojit s přibližným výpočtem, kdy předpokládáme, že se nosníky ohýbají jako v pružném stavu, a v okamžiku plného zplastizování průřezu vzniká v tomto průřezu plastický kloub - ohybové deformace v tomto místě rostou bez zvyšování ohybového momentu. Při výpočtu tedy postupujeme tak, že řešíme ohybové momenty v pružném stavu. Zjistíme, který průřez má nejbližší ku vzniku plastického kloubu. Vynásobíme zatížení i ohybové momenty takovou konstantou, aby v jednom místě vznikl plastický kloub (tj. aby ohybový moment dosáhl hodnoty na mezi plastické únosnosti). Dále do místa plastického kloubu vložíme kloub a řešíme konstrukci znovu jako v pružném stavu - konstrukce má nyní o jeden stupeň statické neurčitosti méně. Uvedený postup opakujeme tolikrát, až nám zůstane konstrukce staticky přeuročitá. Výsledné zatížení na mezi únosnosti pak získáme součtem jednotlivých přírůstků zatížení.

V některých případech můžeme předem odhadnout místa, kde plastické klouby vzniknou, a výpočet tak značně zjednodušit. Při výpočtu umístíme přímo do míst předpokládaných plastických kloubů ohybový moment na mezi únosnosti a tím je celý průběh ohybových momentů jednoznačně určen, aniž bychom musili použít Crossovy metody. Velikost zatížení na mezi plastické únosnosti potom určíme ze známého průběhu ohybových momentů. Při tomto způsobu řešení ovšem neznáme historii postupného vznikání plastických kloubů.

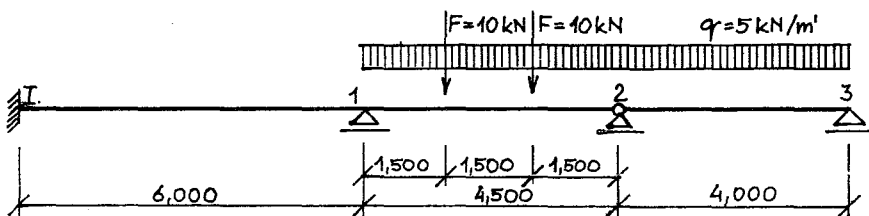
Příklad 11.3.1.

Kolikrát lze zvýšit zatížení nosníku z příkladu 11.2.1 při využití plastických rezerv nosníku. Únosnost celého nosníku je stejná pro kladné i záporné momenty po celé délce nosníku a je rovna 16,799 kNm.

Řešení: První částí výpočtu je výpočet ohybových momentů za pružného stavu. To je řešení příkladu 11.2.1 a ohybové momenty při tomto stadiu jsou uvedeny na obrázku 11.14. Vidíme, že maximální ohybový moment vzniká v průřezu nad podporou 2. Jeho velikost je -16,799 kNm, což je plastická únosnost průřezu, a do tohoto místa tedy pro další stadium výpočtu vložíme kloub.

Nyní budeme řešit nosník uvedený na obrázku 11.16. Jsou to vlastně dva oddělené

nosníky, levý je spojitý nosník o dvou polích I-1-2, pravý je prostý nosník 2-3. Pro řešení nosníku I-1-2 použijeme opět Crossovy metody. Tuhost prutu I-1 bude i v tomto případě rovna jedné a tuhost prutu 1-2,



Obr.11.16. Spojitý nosník po vzniku prvního plastického kloubu.

protože je nyní ukončen kloubem, poklesne na tři čtvrtiny, tedy

$$k_{I1} = 1 \qquad k_{12} = \frac{3}{4} \frac{6}{4,5} = 1$$

Moment v dokonalém vetknutí na prutu kloubově připevněném je podle tabulky 11.1 roven

$$S_{12}^k = -\frac{1}{8} 5 \cdot 4,5^2 - \frac{1}{3} 10 \cdot 4,5 = -27,6562 \text{ kNm}$$

Rozdělovací součinitele jsou

$$\mu_{11} = \frac{1}{1+1} = 0,5 \qquad \mu_{12} = \frac{1}{1+1} = 0,5$$

Momenty vyrovnáme stejným způsobem jako v příkladu 11.2.1, ale protože zde vyrovnáme pouze jeden styčnick, získáme přesné výsledky ihned po jeho vyrovnaní.

I	0,5	1	0,5	2
			-27,6562	o
+6,9140 ←	+13,8281		+13,8281	
			-13,8281	

Posouvající síly podle vztahu /11.18/ jsou

$$T_{I1} = T_{1I} = -\frac{6,9140 + 13,8281}{6} = -3,4570 \text{ kN}$$

$$T_{12} = \frac{1}{2} 5 \cdot 4,5 + 10 - \frac{-13,8281}{4,5} = 24,3229 \text{ kN}$$

$$T_{21} = -\frac{1}{2} 5 \cdot 4,5 - 10 - \frac{-13,8281}{4,5} = -18,1771 \text{ kN}$$

Poloha maximálního mezipodporového momentu je dána rovnicí

$$24,3229 - 10 - 5 x_c = 0 \qquad x_c = 2,8646 \text{ m}$$

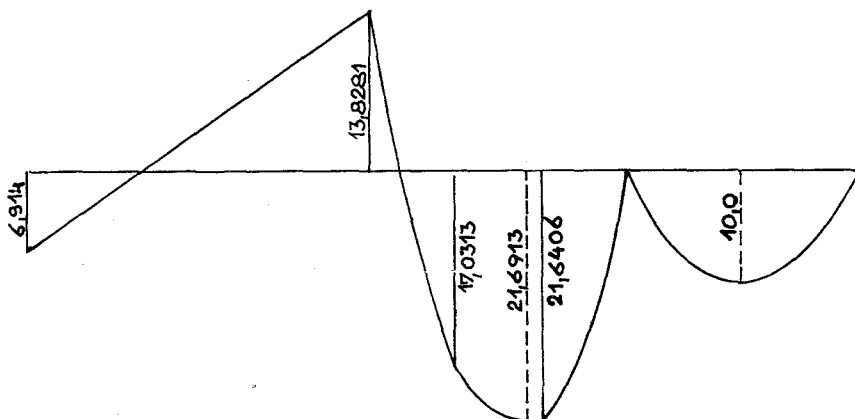
a jeho velikost je

$$M_c = -13,8281 + 24,3229 \cdot 2,8646 - \frac{1}{2} 5,2,8646^2 - 10,1,3646 = 21,6913 \text{ kNm}$$

Pravý nosník je prostý nosník, maximální ohybový moment na něm je uprostřed, to je ve vzdálenosti $x_d = 2 \text{ m}$, a velikost momentu je

$$M_d = \frac{1}{8} 5,4^2 = 10 \text{ kNm}$$

Průběh ohybových momentů od přetížení na nosníku s plastickým kloubem je uveden na obrázku 11.17.



Obr.11.17. Ohybové momenty od přetížení na nosníku s plastickým kloubem.

Celkové ohybové momenty získáme od plného zatížení (vzniká první plastický kloub) - momenty jsou na obrázku 11.14 - a p -násobku přetížení nosníku uvedeného na obrázku 11.16 - momenty jsou na obrázku 11.17. Aby vznikl druhý plastický kloub, a to v průřezu 1, bylo by třeba uvažovat hodnotu p rovnou

$$p_1 = \frac{16,799 - 9,628}{13,8281} = 0,5186$$

Má-li druhý plastický kloub vzniknout uvnitř pole 1-2, musí mít přetížení p přibližnou hodnotu

$$p_1' = \frac{16,799 - 14,698}{21,6913} = 0,0969$$

Jedná se o hodnotu přibližnou, protože poloha maximálního mezipodporového momentu na obrázcích 11.14 a 11.17 se poněkud liší. Přesnou hodnotu p bychom získali podrobnějším rozбором s uvažováním posouvajících sil a dostali bychom druhý plastický kloub ve vzdálenosti $x_c' = 2,021$ pro přetížení $p_1' = 0,1064$, což se téměř neliší.

Vidíme tedy, že druhý plastický kloub v nosníku vzniká v mezipodporovém průřezu v poli 1-2 dříve (při menším zatížení) než nad podporou 1; vzniká při zatížení rovném 1,1064 násobku původního zatížení. Hodnoty ohybových momentů a některých posouvajících sil při tomto zatížení jsou

$$M_{1I} = 4,8142 + 0,1064 \cdot 6,9140 = 5,550 \text{ kNm}$$

$$M_{1II} = -M_{12} = 9,6284 + 0,1064 \cdot 13,8281 = 11,100 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = -M_{23} = 16,7985 + 0,1064 \cdot 0 = 16,799 \text{ kNm}$$

$$T_{12} = 19,6586 + 0,1064 \cdot 24,3229 = 22,247 \text{ kN}$$

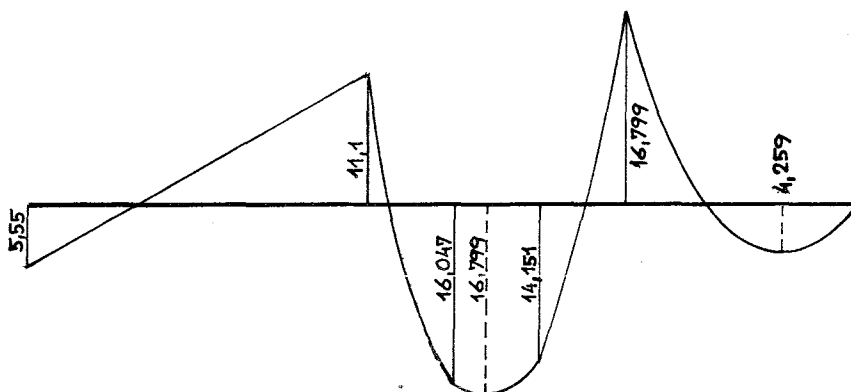
$$T_{23} = 14,1996 + 0,1064 \cdot 10 = 15,264 \text{ kN}$$

$$x_c = \frac{22,247 - 10 \cdot 1,1064}{5 \cdot 1,1064} = 2,021 \text{ m} \quad x_d = \frac{15,264}{5 \cdot 1,1064} = 2,76 \text{ m}$$

$$M_c = -11,100 + 22,247 \cdot 2,021 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1,1064 \cdot 2,021^2 - 10 \cdot 1,1064 \cdot 0,521 = 16,799 \text{ kNm}$$

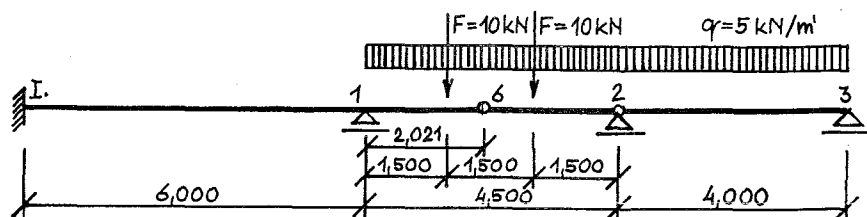
$$M_d = -16,799 + 15,264 \cdot 2,76 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1,1064 \cdot 2,76^2 = 4,259 \text{ kNm}$$

Průběh ohybových momentů při 1,1064 násobku původního zatížení (vznik druhého plastického kloubu) je uveden na obrázku 11.18.



Obr.11.18. Průběh ohybových momentů při vzniku druhého plastického kloubu.

Po vložení druhého plastického kloubu vzniká nosník uvedený na obrázku 11.19. Tento nosník se skládá ze tří částí : 1x staticky neurčitý nosník s převislým koncem I-6, vložené



Obr.11.19. Spojitý nosník po vzniku druhého plastického kloubu.

pole (prostý nosník) 6-2 a prostý nosník 2-3. Postup řešení připomíná řešení Gerberova nosníku - nejprve řešíme vložené pole 6-2. Je to prostý nosník, takže reakce získáme přímo z momentových

podmínek rovnováhy; stačí nám určit reakci A_6 ve vnitřním kloubu. Vychází

$$A_6 = \frac{10 \cdot 1,5 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2,479^2}{2,479} = 12,2483 \text{ kN}$$

Hodnotu ohybového momentu nad podporou 1 získáme jako na konzole a dostáváme

$$M_{12} = -12,2483 \cdot 2,021 - 10 \cdot 1,5 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2,021^2 = -49,965 \text{ kNm}$$

a styčnickový moment M_{1I} vyvodí ve vetknutí I ohybový moment, který má polo-
vičnou hodnotu (převáděcí součinitel), tedy

$$M_{1I} = -M_{12} = +49,965 \text{ kNm} \quad M_{I1} = \frac{1}{2} \cdot 49,965 = 24,9825 \text{ kNm}$$

Třetí plastický kloub na nosníku vzniká nad podporou 1, a to při přetížení p_2 velikosti

$$p_2 = \frac{16,799 - 11,1}{49,965} = 0,114$$

tedy při celkovém zatížení $1 + 0,1064 + 0,114 = 1,2204$ násobku původního zatížení. Vznikem třetího kloubu je únosnost konstrukce vyčerpána. Konstrukce se třemi plastickými klouby v průřezích 1, 2, 6 je sice formálně staticky určitá, ale jedná se o výjimečný případ, takže ji nemůžeme již dále zatěžovat.

Celkem je tedy konstrukce při využití plastických rezerv schopna přenést 1,2204 násobek původního zatížení. Při tomto zatížení budou mít ohybové momenty tyto velikosti

$$M_{I1} = 5,55 + 0,114 \cdot 24,9825 = 8,398 \text{ kNm}$$

$$M_{1I} = -M_{12} = 11,1 + 0,114 \cdot 49,965 = 16,796 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = -M_{23} = 16,799 \text{ kNm}$$

$$T_{12} = 22,247 + 0,114 (12,2483 + 10 + 5 \cdot 2,021) = 25,935 \text{ kN}$$

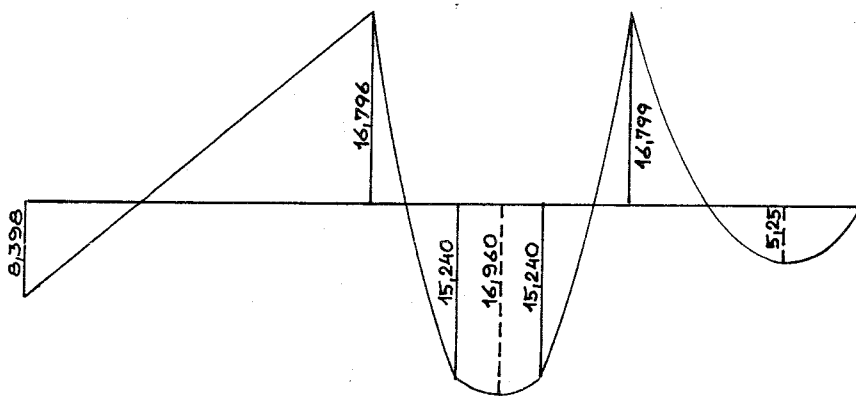
$$T_{23} = 15,264 + 0,114 \cdot 10 = 16,404 \text{ kN}$$

$$x_c = \frac{25,9353 - 10 \cdot 1,2204}{5 \cdot 1,2204} = 2,2503 \text{ m} \quad x_d = \frac{16,404}{5 \cdot 1,2204} = 2,688 \text{ m}$$

$$M_c = -16,796 + 25,935 \cdot 2,2503 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1,2204 \cdot 2,2503^2 - 10 \cdot 1,2204 \cdot 0,7503 = 16,960 \text{ kNm}$$

$$M_d = -16,799 + 16,404 \cdot 2,688 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1,2204 \cdot 2,688^2 = 5,250 \text{ kNm}$$

Vidíme, že při zvětšení zatížení došlo k posunutí polohy mezipodporového plastického kloubu a tím i mírnému zvětšení hodnoty tohoto momentu. Vzhledem k tomu, že došlo k překročení momentu na mezi únosnosti pouze o 0,96 %, můžeme tento výsledek ponechat. Konečný průběh ohybových momentů je vykreslen na obrázku 11.20.



Obr.11.20. Konečný průběh ohybových momentů po vzniku třetího plastického kloubu.

Řešení - alt.: Při řešení vyjdeme z předpokládané polohy plastických kloubů. V našem příkladu je možno předpokládat vznik plastických kloubů nad podporami 1 a 2. Tím vznikne uvnitř konstrukce prostý nosník 1-2, a protože zatížení tohoto prostého nosníku je symetrické, budou na něm symetrické i ohybové momenty, takže třetí plastický kloub vznikne na ose jeho symetrie, to je uprostřed pole 1-2. Jako výchozích hodnot při řešení tedy použijeme

$$M_{1I} = -M_{12} = 16,799 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = -M_{23} = 16,799 \text{ kNm}$$

$$x_c = 2,25 \text{ m}$$

$$M_c = 16,799 \text{ kNm}$$

Označme součinitel, kterým násobíme zatížení při plastické únosnosti, jako p . Pro ohybový moment v průřezu c musí platit

$$M_c = M_{12} + T_{12} x_c - \frac{1}{2} q p x_c^2 - F p (x_c - 1,5)$$

a protože z důvodu symetrie momentů na nosníku 1-2 musí být

$$T_{12} = \frac{1}{2} q p \cdot 4,5 + F p$$

dostáváme pro součinitel p podmínku

$$16,799 = -16,799 + \left(\frac{1}{2} 5 p \cdot 4,5 + 10 p\right) \cdot 2,25 - \frac{1}{2} 5 p \cdot 2,25^2 - 10 p \cdot 0,75$$

$$\underline{p = 1,2148}$$

Ostatní hodnoty ohybových momentů již získáme obvyklým způsobem :

$$M_{I1} = \frac{1}{2} M_{1I} = 8,400 \text{ kNm}$$

$$T_{23} = \frac{1}{2} 5 \cdot 4 \cdot 1,2148 - \frac{-16,799}{4} = 16,3478 \text{ kN}$$

$$x_d = \frac{16,3478}{5 \cdot 1,2148} = 2,6914 \text{ m}$$

$$M_d = -16,799 + 16,3478 \cdot 2,6914 - \frac{1}{2} 5 \cdot 1,2148 \cdot 2,6914^2 = 5,200 \text{ kNm}$$

Takto získané hodnoty se téměř neliší od prvního řešení (max. rozdíl činí 0,96%). Vzhledem k přesnější poloze mezipodporového plastického kloubu jsou hodnoty získané druhým řešením přesnější.

Příklad 11.3.2.

Kolikrát lze zvýšit rovnoměrné zatížení z příkladu 11.2.1 /je-li velikost osamělých břemen konstantní 10 kN/ při využití plastických rezerv nosníku. Únosnost celého nosníku je stejná pro kladné i záporné momenty po celé délce nosníku a je rovna 16,799 kNm.

Řešení: Využijeme postupu uvedeného v příkladu 11.3.1 jako alternativního. Předpokládáme tedy, že dva plastické klouby vzniknou nad nesílehlými podporami a třetí se bude nacházet na ose symetrie středního pole. Protože ohybové momenty v těchto třech průřezích se budou rovnat v absolutní hodnotě 16,799 kNm, bude výchozí podmínka v tomto příkladu

$$M_c = M_{12} + T_{12} \cdot x_c - \frac{1}{2} q p x_c^2 - F / x_c - 1,5/$$

a po dosazení dostáváme

$$16,799 = -16,799 + \frac{1}{2} 5 \cdot p \cdot 4,5 + 10/ \cdot 2,25 - \frac{1}{2} 5 p \cdot 2,25^2 - 10 \cdot 0,75$$

$$\underline{p = 1,47}$$

Pro hodnoty ostatních ohybových momentů v tomto příkladu dostáváme

$$M_{I1} = \frac{1}{2} M_{1I} = 8,400 \text{ kNm}$$

$$T_{23} = \frac{1}{2} 5 \cdot 4 \cdot 1,47 - \frac{-16,799}{4} = 18,9 \text{ kN}$$

$$x_d = \frac{18,9}{5 \cdot 1,47} = 2,5714 \text{ m}$$

$$M_d = -16,799 + 18,9 \cdot 2,5714 - \frac{1}{2} 5 \cdot 1,47 \cdot 2,5714^2 = 7,501 \text{ kNm}$$

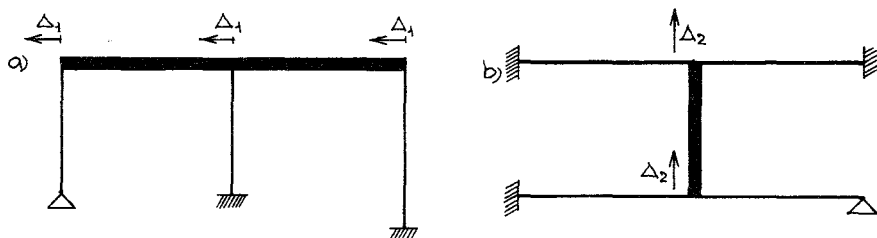
11.4. Rámové konstrukce.

Pro výpočet vnitřních sil na statiky neurčitých rámových konstrukcích existuje celá řada různých metod. Námátkou uvedme metodu minima potenciální energie deformace, silovou metodu, metodu třímomentovou a čtyřmomentovou, deformační metodu a další. Jednou z těchto metod je metoda rozdělování momentů /Crossova/, s jejímiž zásadami pro řešení spojitých nosníků jsme se již seznámili.

Ačkoliv tato metoda není tou nejužívanější, nemůže být o její vhodnosti pro architektury vůbec žádných pochyb. Tato metoda je metoda iterační, takže při jejím používání není potřeba řešit rozsáhlou soustavu rovnic. Jako metoda iterační je te metoda přibližná, ale přesnost řešení si sami volíme. To znamená, že při orientačním řešení můžeme výpočet podstatně zkrátit a naopak prodloužením doby potřebné k řešení můžeme dosáhnout velmi přesných výsledků. A právě takovouto metodu architekt potřebuje.

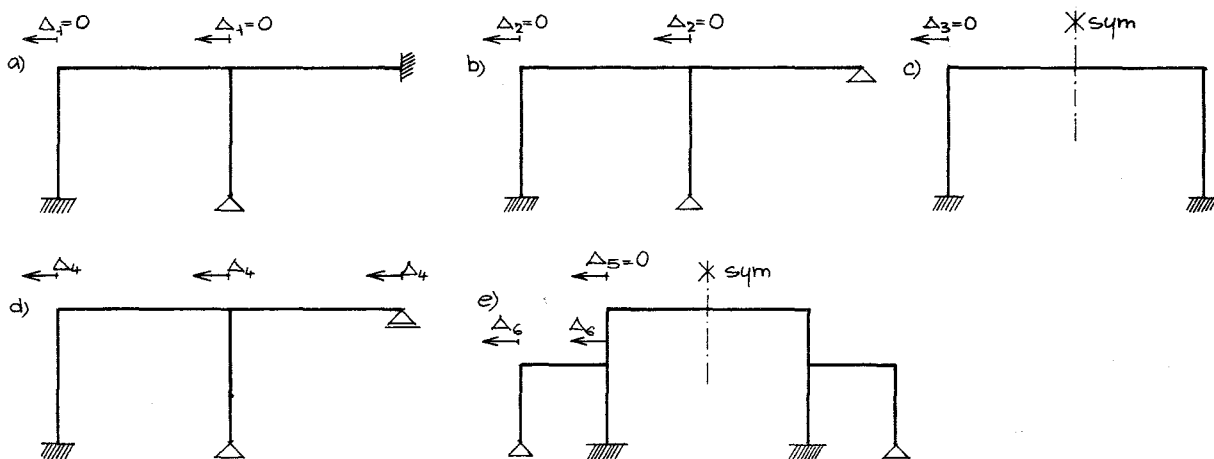
Všechny styčníky na konstrukci předpokládáme dokonale tuhé, to znamená, že všechny pruty se ve styčníku pootočí o stejný úhel. U běžných konstrukcí dále předpokládáme, že

vliv normálových sil na rozdělení vnitřních sil a velikost reakcí je možno zanedbat. Přírodním důsledkem pak je, že všechny pruty předpokládáme dokonale nestlačitelné, tu-



Obr. 11.21. Patrový posun.

díž všechny styčníky jednoho patra se posunou o stejné posunutí /obr.11.21/. Přitom "patro" může být jak vodorovné /obr.11.21a/, tak i svislé /obr.11.21b/. Posunout se mohou všechna patra, pokud tomuto posunutí nebrání vnější podpora (obr. 11.22ab/ nebo osa symetrie /obr.11.22c/. Ovšem posuvná podpora na obrázku 11.22d patrovému posunutí nebrání, a i na obrázku 11.22e může k patrovému posunutí Δ_6 dojít, protože spodní patro není prořato osou symetrie. S výjimkami výše uvede-



Obr. 11.22. Rozdělení rámu podle posuvnosti styčniců.

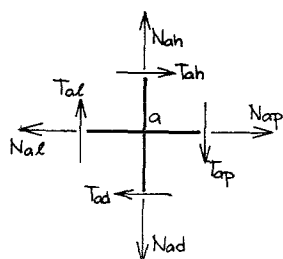
a), b), c) neposuvné styčniců d), e) posuvné styčniců

nými se posunou všechna patra, tedy i v případě svislého zatížení dojde k vodorovným posunutím pater. Předpoklad, že některé patrové posunutí bude asi nulové, je zaručeně chybný.

Při řešení rámců s neposuvnými styčníky postupujeme způsobem, který byl probrán podrobně v odstavci 11.1. Jediným rozdílem je to, že ve styčníku se může sbíhat větší počet prutů než dva, takže ve jmenovateli vztahu /11.15/ se suma vztahuje na větší počet prutů. Při řešení tedy dodržujeme osm bodů postupu uvedeného na straně 113, a doplníme je o další bod :

9. Výpočet normálových sil v koncových průřezech prutů - z posouvajících sil a zatížení

Normálové síly na konstrukci počítáme až po stanovení sil posouvajících a využíváme k jejich určení směrových podmínek rovnováhy ve styčníku /obr.11.23/. Podmínka rovnováhy ve vodorovném směru sil působících na styčník dává



$$- N_{al} + N_{ap} + T_{ah} - T_{ad} = 0 \quad /11.22/$$

a ve svislém směru

$$- N_{ad} + N_{ah} + T_{al} - T_{ap} = 0 \quad /11.23/$$

Při výpočtu normálových sil začínáme v rozích konstrukce a postupujeme pak podél jednotlivých prutů. Na příklad v levém horním rohu konstrukce, kde nejsou pruty $\bar{a}l$ a $\bar{a}h$, můžeme psát

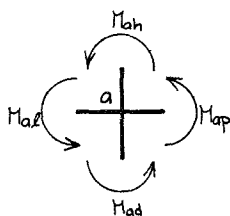
Obr.11.23. Rovnováha ve styčníku.

$$N_{ap} = T_{ad} \quad N_{ad} = - T_{ap}$$

pokud styčník není zatížen osamělým břemenem.

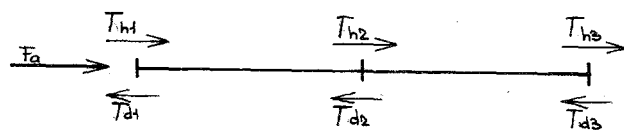
Poněkud složitější situace nastává při řešení rámových konstrukcí, u nichž se nacházejí posuvné styčníky. Zde je třeba kromě rovnováhy všech styčníků (obr.

11.24/ zajistit i rovnováhu každého patra /obr.11.25/. Rovnováhu styčníků (součet momentů v každém styčníku musí být roven nule) nám zajistí vyrovnávání momentů Crossovou metodou. Pro dosažení rovnováhy pater (součet průmětů všech sil do směru možného patrového posuvu musí být roven nule) je třeba napsat tolik rovnic, kolik je možných různých patrových posuvů.



Obr.11.24. Rovnováha momentů.

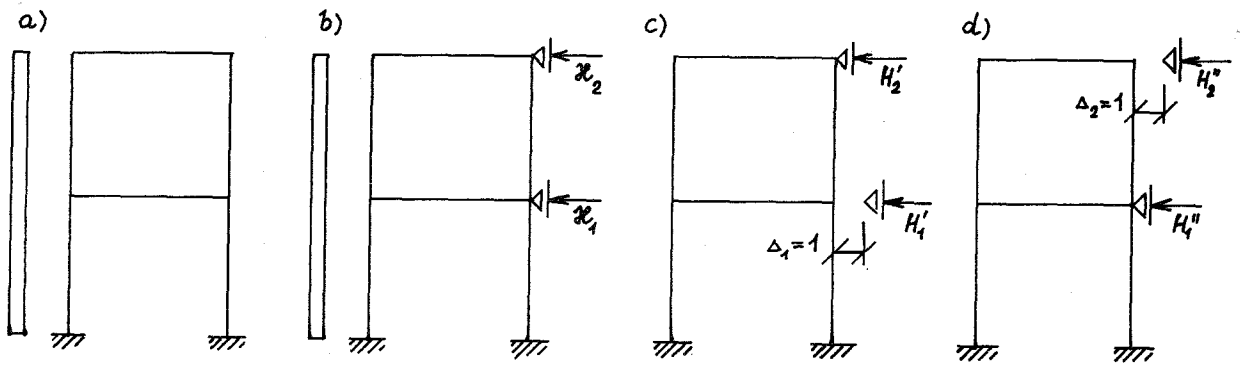
Při sestavování patrových rovnic postupujeme tím způsobem, že nejprve konstrukci /obr.11.26a/ doplníme přidávanými podporami, jimiž zajistíme dočasnou neposuvnost styčníků (obr.



Obr.11.25. Rovnováha sil patra.

11.26b/, a po vyrovnání momentů za neposuvnosti styčníků vypočteme reakce \mathcal{H}_i v těchto přidávaných podporách. Dále zatěžujeme konstrukci postupně posunutími jednotlivých posuvných pater vždy o jednotku /obr.11.26 c,d/ a ve všech

těchto výpočtových stadiích vyrovnáváme ohybové momenty a vypočteme síly v přidávaných podporách (H_i' , H_i'' ...). Síly počítáme ze směrových podmínek rovnováhy na příslušných patrech.



Obr. 11.26. Postup při řešení konstrukce s posuvnými styčnicíky.

Skutečné velikosti patrových posuvů ovšem nebudou jednotkové. Označíme-li velikost patrového posuvu Δ_1 jako X_1 , potom tento patrový posun vyvodí v konstrukci X_1 -násobky momentů vypočtených podle schématu obrázku 11.26c a také síly v přidávaných podporách budou X_1 -násobkem sil H'_1 . Obdobně při patrovém posunu $\Delta_2 = X_2$. Celková velikost sil v přidávané podpoře i bude

$$H_i = \mathcal{H}_i + H'_i X_1 + H''_i X_2 + \dots$$

a protože na skutečné konstrukci tato podpora není, musí i tato reakce být rovna nule. Dostáváme takto pro velikosti patrových posunů X_i soustavu rovnic

$$\mathcal{H}_1 + H'_1 X_1 + H''_1 X_2 + \dots = 0$$

$$\mathcal{H}_2 + H'_2 X_1 + H''_2 X_2 + \dots = 0$$

⋮

/11.24/

Počet rovnic i počet neznámých X je stejný jako počet různých patrových posuvů. Vyřešením soustavy rovnic /11.24/ získáme skutečné velikosti patrových posuvů. Výsledné ohybové momenty dostaneme jako součet ohybových momentů od zatížení /obr.11.26b/ a X_i -násobků ohybových momentů od $\Delta_i = 1$ /obr.11.26c,d/, tedy

$$M = m + M' X_1 + M'' X_2 + \dots$$

/11.25/

Po výpočtu ohybových momentů obdržíme obvyklým způsobem posouvající i normálové síly, reakce a mezipodporové momenty.

Při výpočtu ohybových momentů a reakcí od posunutí jednotlivých posuvných pater jsme vycházeli z jednotkových patrových posuvů, takže momenty v dokonalém vetknutí od těchto posuvů byly podle /11.14/

$$S_{ab} = \pm \frac{6EI}{l^2} \Delta_i = \pm \frac{6EI}{l^2} = \pm \frac{2EI}{1} \frac{3}{1} = \pm \frac{3k'}{1} \quad /11.26/$$

na prutu kloubově připevněném moment ve vetknutí pak

$$S_{ab}^k = \pm \frac{3EI}{l^2} \Delta_i = \pm \frac{3EI}{l^2} = \pm \frac{3}{4} \frac{2EI}{1} \frac{2}{1} = \pm \frac{2k^k}{1} \quad /11.27/$$

Znaménko + ve vztazích /11.26/ a /11.27/ platí tehdy, poklesne-li levá podpora nebo se nadzvedne pravá, znaménko - v opačném případě.

Podívejme se nyní, jak se změní výpočet, použijeme-li jako výchozí hodnoty patrové posunutí $\Delta_1 = 2$. Dvojnásobná velikost posuvu způsobí také dvojnásobné momenty v dokonalém vetknutí S_{ab} , dostaneme tedy i dvojnásobné ohybové momenty M' než pro případ znázorněný na obrázku 11.26c a také síly H'_1 , H'_2 budou

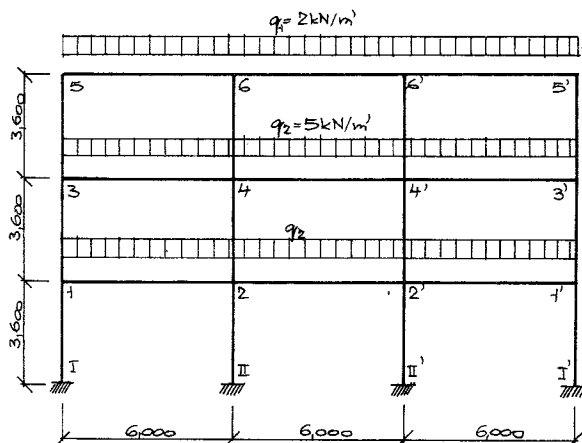
dvojnásobné. V soustavě rovnic /11.24/ budou tudíž dvojnásobné všechny koeficienty, které násobí proměnnou X_1 , takže řešením získáme poloviční hodnotu proměnné X_1 . V rovnici /11.25/ se proměnná X_1 vyskytuje v součinu s ohybovými momenty M' ; proměnná X_1 je poloviční a ohybové momenty M' jsou dvojnásobné, proto jejich součin $M' X_1$ se nezmění. Z toho vyplývá, že velikosti patrových posuvů A_i , z nichž vycházíme při výpočtu, mohou být libovolné (ovšem různé od nuly) a výsledné ohybové momenty na nich nezávisí. Můžeme tedy ve vztazích /11.26/ a /11.27/ využít místo skutečných ohybových tuhostí prutů tuhosti poměrné a navíc tyto momenty násobit libovolnými konstantami D_i (pro každý zatěžovací stav je jediná konstanta, pro různé zatěžovací stavy mohou být konstanty různé), tedy

$$S_{ab} = \pm \frac{3k}{l} D_i \quad /11.28/$$

$$S_{ab}^k = \pm \frac{2k^k}{l} D_i \quad /11.29/$$

Příklad 11.4.1.

Určete ohybové momenty na rámu uvedeném na obrázku 11.27. Rám je symetrický a symetricky zatížený. Sloupy mají průřez $0,3 \times 0,4$ m, příčle $0,3 \times 0,6$ m.



Obr. 11.27. Symetrický rám.

Řešení: Nejprve je třeba stanovit momenty v dokonalém vetknutí prutů, tuhosti a rozdělovací součinitele.

Dostáváme

$$S_{12} = -S_{21} = S_{22}, = S_{34} = -S_{43} = S_{44}, = -\frac{1}{12} 5.6^2 = -15 \text{ kNm}$$

$$S_{56} = -S_{65} = S_{66}, = -\frac{1}{12} 2.6^2 = -6 \text{ kNm}$$

$$k_{I1} = k_{13} = k_{35} = k_{II2} = k_{24} = k_{46} = 1$$

$$k_{12} = k_{34} = k_{56} = \frac{\frac{0,3 \cdot 0,6^3}{6}}{\frac{0,3 \cdot 0,4^3}{4}} = 2,25$$

$$k_{22}^s = k_{44}^s = k_{66}^s = \frac{1}{2} 2,25 = 1,125$$

$$\mu_{1I} = \mu_{13} = \mu_{31} = \mu_{35} = \frac{1}{1 + 1 + 2,25} = 0,2353$$

$$\mu_{12} = \mu_{34} = \frac{2,25}{1 + 1 + 2,25} = 0,5294$$

$$\mu_{2II} = \mu_{24} = \mu_{42} = \mu_{46} = \frac{1}{1 + 1 + 2,25 + 1,125} = 0,1860$$

$$\mu_{21} = \mu_{43} = \frac{2,25}{1 + 1 + 2,25 + 1,125} = 0,4186$$

$$\mu_{22'} = \mu_{44'} = \frac{1,125}{1 + 1 + 2,25 + 1,125} = 0,2093$$

$$\mu_{53} = \frac{1}{1 + 2,25} = 0,3077$$

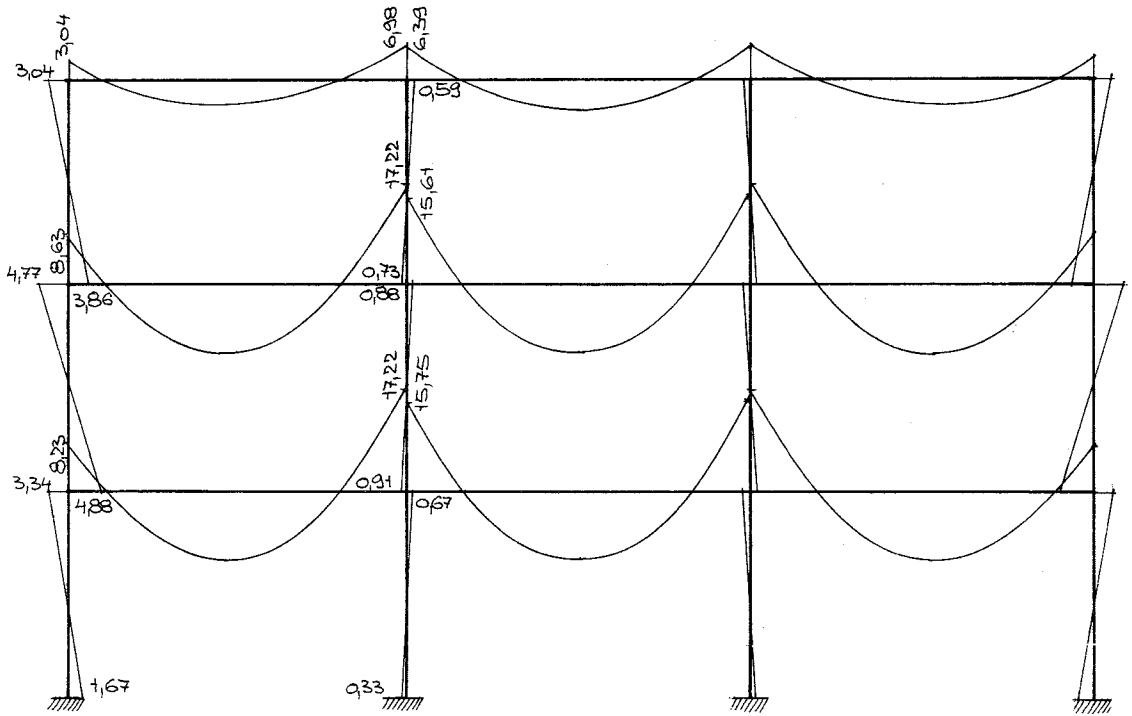
$$\mu_{56} = \frac{2,25}{1 + 2,25} = 0,6923$$

$$\mu_{64} = \frac{1}{1 + 2,25 + 1,125} = 0,2286$$

$$\mu_{65} = \frac{2,25}{1 + 2,25 + 1,125} = 0,5143$$

$$\mu_{66'} = \frac{1,125}{1 + 2,25 + 1,125} = 0,2571$$

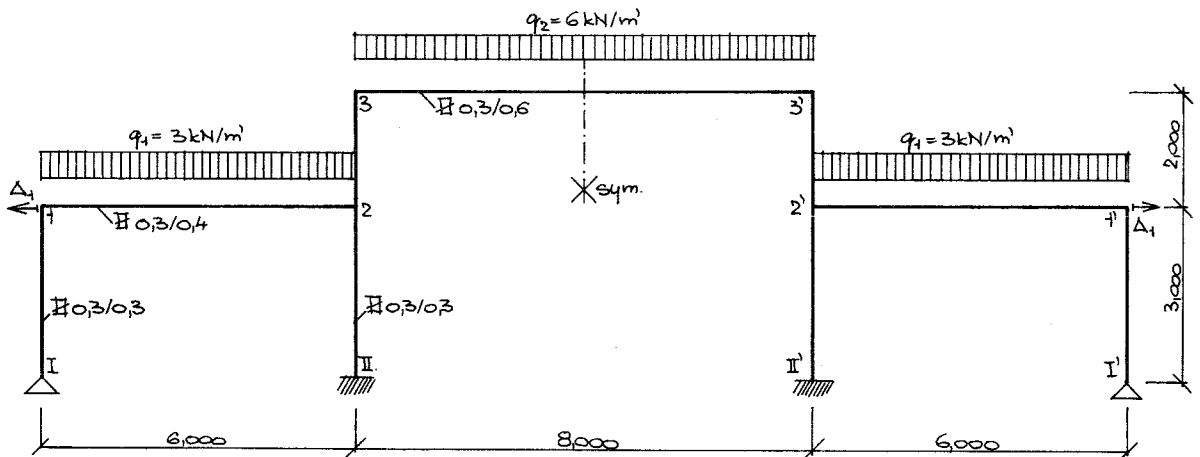
Vyrovňávání začneme ve styčnicku 1, pak postupujeme v pořadí 4-5-2-3-6-1 ... až do vyrovňání všech styčníků.



Obr. 11.28. Ohybové momenty na třípodlažním symetrickém rámu.

Příklad 11.4.2.

Vyřešte vnitřní síly na rámu uvedeném na obrázku 11.29. Rám je symetrický a symetricky zatížený rovnoměrným zatížením, v krajních polích je intenzita zatížení 3 kN/m^2 , střední trakt je zatížen 6 kN/m^2 .



Obr. 11.29. Symetrický rám bazilikálního charakteru.

Řešení: Zadaný rám je symetricky zatížený, proto nedojde k vodorovnému posuvu horního patra 3-3' (je prořato osou symetrie), vznikne pouze patrový posun Δ_1 patra 1-2.

Nejprve stanovíme tuhosti prutů, rozdělovací součinitele a momenty v dokonalém vetknutí. Zvolíme-li poměrnou tuhost příčle 1-2 rovnou jedné, bude platit

$$k_{12} = 1 \quad k_{2II} = \frac{0,3^3}{0,4^3} \frac{6}{3} = 0,844 \quad k_{23} = \frac{0,3^3}{0,4^3} \frac{6}{2} = 1,266$$

$$k_{1I}^k = \frac{3}{4} k_{2II} = 0,633 \quad k_{33}^s = \frac{0,6^3}{0,4^3} \frac{6}{8} = 1,266$$

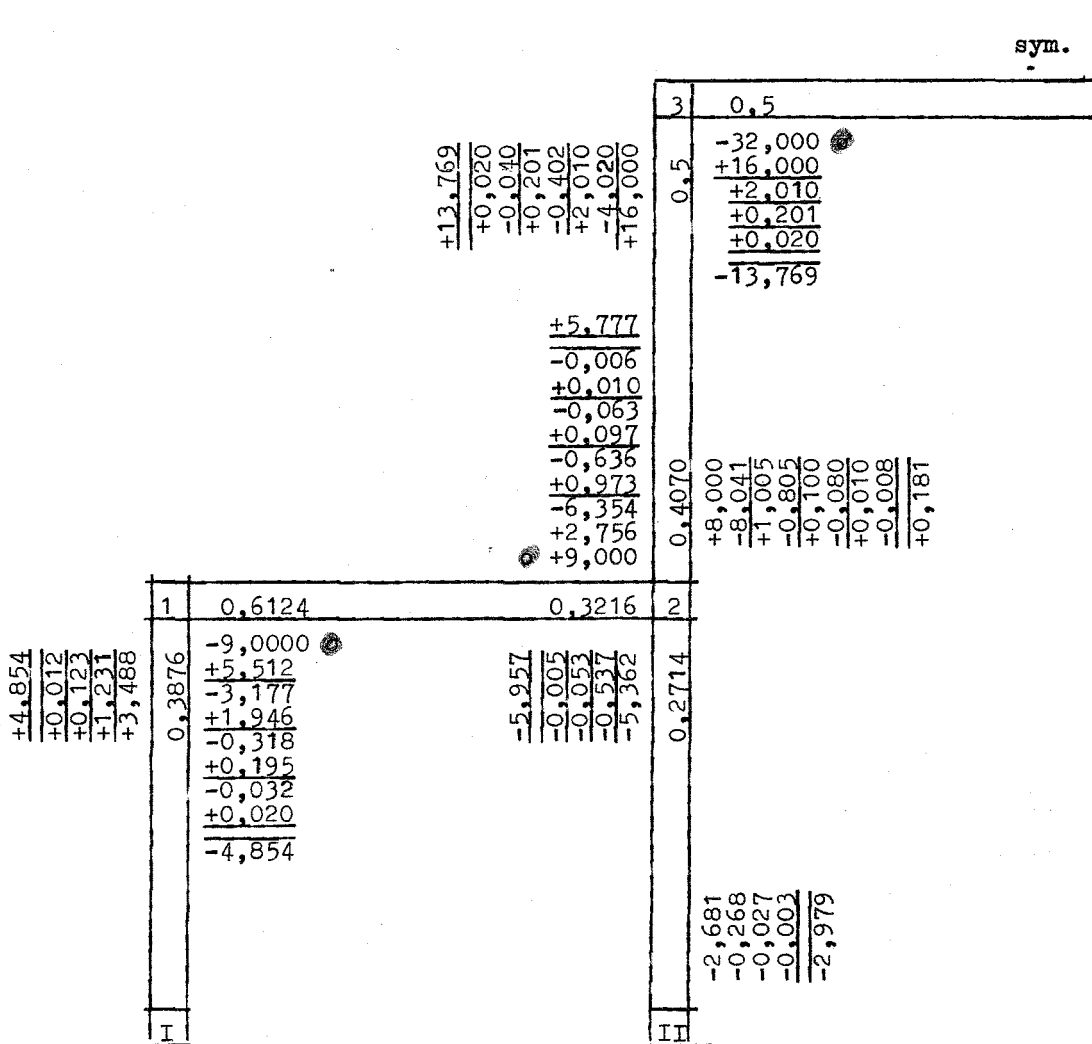
$$\mu_{1I} = \frac{0,633}{1,633} = 0,3876 \quad \mu_{12} = \frac{1}{1,633} = 0,6124$$

$$\mu_{21} = \frac{1}{3,110} = 0,3216 \quad \mu_{2II} = \frac{0,844}{3,110} = 0,2714 \quad \mu_{23} = \frac{1,266}{3,110} = 0,4070$$

$$\mu_{32} = \frac{1,266}{2,532} = 0,5 \quad \mu_{33} = \frac{1,266}{2,532} = 0,5$$

$$S_{12} = -S_{21} = -\frac{1}{12} 3 \cdot 6^2 = -9 \text{ kNm} \quad S_{33} = -\frac{1}{12} 6 \cdot 8^2 = -32 \text{ kNm}$$

Nejprve vyrovnáme ohybové momenty za neposuvnosti styčniců, postupujeme v pořadí vyrovnávání 3-1-2-3- ...



Vyrovnáním momentů stadia za neposuvnosti styčniců jsme získali styčnicové momenty

$$m_{1I} = -m_{12} = 4,854 \text{ kNm}$$

$$m_{21} = 5,777 \text{ kNm}$$

$$m_{II2} = -2,979 \text{ kNm}$$

$$m_{2II} = -5,957 \text{ kNm}$$

$$m_{23} = 0,181 \text{ kNm}$$

$$m_{32} = -m_{33} = 13,769 \text{ kNm}$$



$$M_{23}' = -22,870 \text{ kNm}$$

$$M_{32}' = -M_{33}', = -17,388 \text{ kNm}$$

Posouvající síly ve svislých prutech jsou

$$T_{1I}' = -\frac{4,187}{3} = -1,396 \text{ kN}$$

$$T_{2II}' = -\frac{19,019 + 21,160}{3} = -13,393 \text{ kN}$$

$$T_{23}' = -\frac{-22,870 - 17,388}{2} = 20,129 \text{ kN}$$

a síla v přidané podpoře je rovna

$$H' = T_{23}' - T_{1I}' - T_{2II}' = 20,129 + 1,396 + 13,393 = 34,918 \text{ kN}$$

Součinitel X , jímž je třeba násobit stádium od posunutí patra, dostáváme po dosazení do rovnice /11.24/

$$-8,336 + 34,918 X = 0$$

$$X = 0,2387$$

Výsledné ohybové momenty dostaneme po dosazení do /11.25/ a obdržíme

$$M_{1I} = -M_{12} = 4,854 + 0,2387 \cdot 4,187 = 5,853 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = 5,777 + 0,2387 \cdot 1,710 = 6,185 \text{ kNm}$$

$$M_{II2} = -2,979 + 0,2387 \cdot 19,019 = 1,561 \text{ kNm}$$

$$M_{2II} = -5,957 + 0,2387 \cdot 21,160 = -0,906 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = 0,181 - 0,2387 \cdot 22,870 = -5,278 \text{ kNm}$$

$$M_{32} = -M_{33}' = 13,769 - 0,2387 \cdot 17,388 = 9,618 \text{ kNm}$$

Posouvající a normálové síly získáme opět pomocí vztahů /11.18/, /11.22/ a /11.23/. Dostáváme

$$T_{1I} = T_{1I}' = -\frac{5,853}{3} = -1,951 \text{ kN}$$

$$T_{II2} = T_{2II}' = -\frac{1,561 - 0,906}{3} = -0,218 \text{ kN}$$

$$T_{23} = T_{32}' = -\frac{-5,278 + 9,618}{2} = -2,17 \text{ kN}$$

$$T_{12} = \frac{1}{2} \cdot 3,6 - \frac{-5,853 + 6,185}{6} = 8,945 \text{ kN}$$

$$T_{21} = -\frac{1}{2} \cdot 3,6 - \frac{-5,853 + 6,185}{6} = -9,055 \text{ kN}$$

$$T_{33}' = \frac{1}{2} \cdot 6,8 - \frac{-9,618 + 9,618}{8} = 24 \text{ kN}$$

$$N_{1I} = -T_{12} = -8,945 \text{ kN}$$

$$N_{12} = T_{1I} = -1,951 \text{ kN}$$

$$N_{33}' = T_{32}' = -2,17 \text{ kN}$$

$$N_{32} = -T_{33}' = -24 \text{ kN}$$

$$N_{2II} = N_{23} + T_{21} = -24 - 9,055 = -33,055 \text{ kN}$$

Na konstrukci musí být splněny styčnickové i patrové podmínky rovnováhy, mohou nám tedy tyto podmínky posloužit ke kontrole řešení soustavy rovnic i výpočtu výsledných ohybových momentů. Musí platit

$$M_{1I} + M_{12} = 0$$

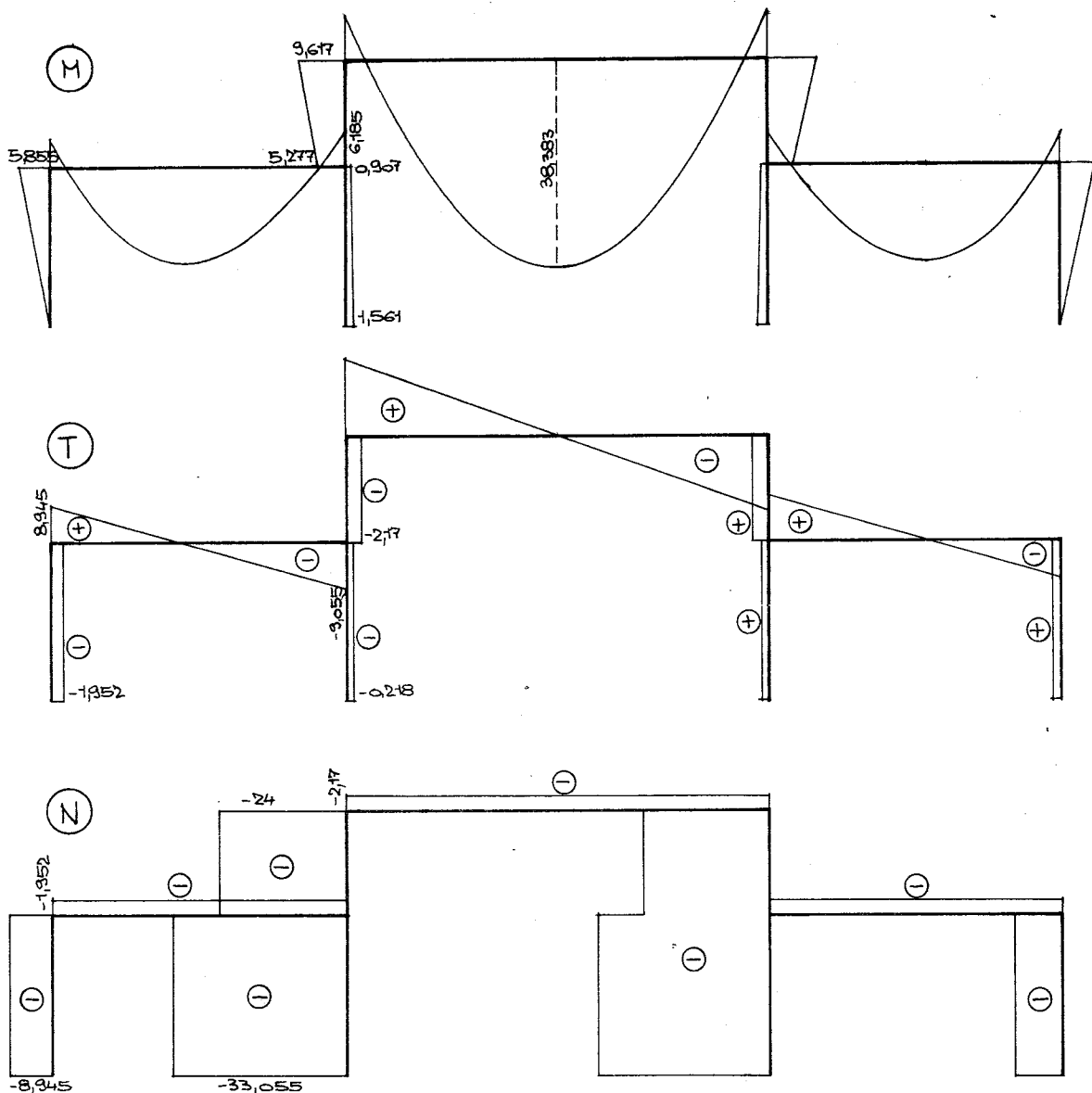
$$M_{21} + M_{2II} + M_{23} = 0$$

$$M_{32} + M_{33}' = 0$$

$$T_{1I} + T_{2II} - T_{23} = 0$$

Dosazením se můžeme přesvědčit, že tyto podmínky jsou splněny.

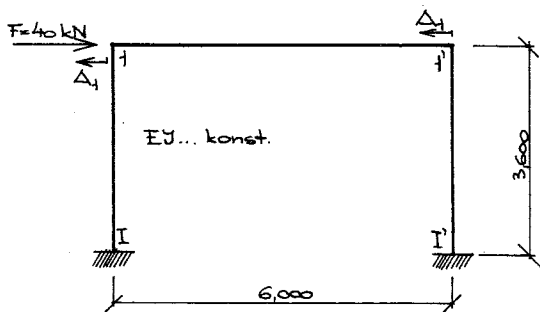
Vypočtené průběhy ohybových momentů, posouvajících a normálových sil jsou vyneseny na obrázku 11.30.



Obr. 11.30. Ohybové momenty, posouvající a normálové síly na rámu.

Příklad 11.4.3.

Vyřešte vnitřní síly na rámu uvedeném na obrázku 11.31.



Obr.11.31. Vodorovně zatížený rámu.

- Výsledky:**
- $M_{I1} = -43,826 \text{ kNm}$
 - $M_{1I} = -28,174 \text{ kNm}$
 - $M_{11'} = 28,174 \text{ kNm}$
 - $T_{I1} = 20 \text{ kN}$
 - $T_{11'} = -9,391 \text{ kN}$
 - $N_{I1} = 9,391 \text{ kN}$
 - $N_{11'} = -20 \text{ kN}$

Výsledné průběhy M , N jsou antisymetrické (s výjimkou $N_{11'}$), průběh T je symetrický.

Příklad 11.4.4.

Stanovte ohybové momenty na Vierendelově nosníku, který je nakreslen na obrázku 11.32. Nosník je konstantního průřezu.

Výsledek: Ohybové momenty na Vierendelově nosníku jsou :

$$M_{12} = 14,176 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = 16,029 \text{ kNm}$$

$$M_{13} = -14,176 \text{ kNm}$$

$$M_{53} = -5,398 \text{ kNm}$$

$$M_{46} = -6,646 \text{ kNm}$$

$$M_{34} = 17,087 \text{ kNm}$$

$$M_{31} = -13,618 \text{ kNm}$$

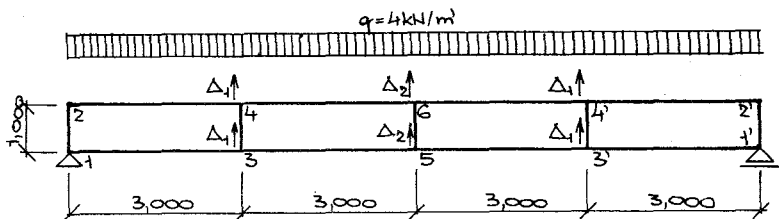
$$M_{24} = -16,029 \text{ kNm}$$

$$M_{64} = -2,486 \text{ kNm}$$

$$M_{43} = 16,823 \text{ kNm}$$

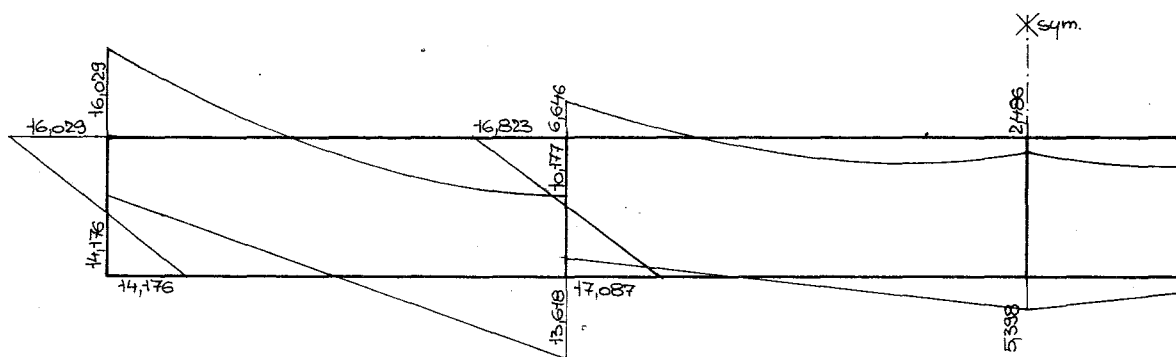
$$M_{35} = -3,470 \text{ kNm}$$

$$M_{42} = -10,177 \text{ kNm}$$



Obr. 11.32. Vierendelův nosník.

Ohybové momenty jsou vyneseny na obrázku 11.33.



Obr. 11.33. Ohybové momenty na Vierendelově nosníku.

Pomoc při řešení : Nosník je symetrický symetricky zatížený, proto posunutí kolmá k ose symetrie jsou nulová a pootočení ve styčnicích 5, 6, ležících na ose symetrie, jsou také nulová. Vyrovnáváme proto pouze styčnice 1, 2, 3 a 4. Konstrukce má dva různé patrové posuvy, na obrázku 9.43 označené Δ_1 , Δ_2 :

Momenty v dokonalém vetknutí :

a) za neposuvnosti styčniců

$$S_{24} = -S_{42} = S_{46} = -S_{64} = -3 \text{ kNm}$$

b) od posunutí Δ_1

$$S_{13} = S_{31} = S_{24} = S_{42} = -S_{35} = -S_{53} = -S_{46} = -S_{64} = 10 \text{ kNm}$$

c) od posunutí Δ_2

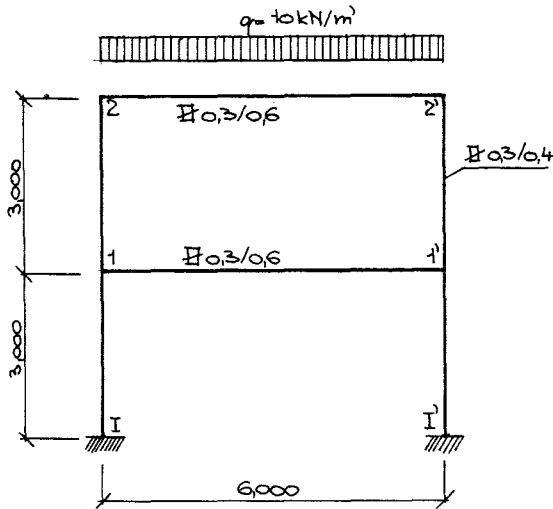
$$S_{35} = S_{53} = S_{46} = S_{64} = 10 \text{ kNm}$$

alt.: čtenář se může přesvědčit, že stejných výsledků dosáhne i tehdy, použije-li ve stadiu b) pouze nenulové momenty

$$S_{13} = S_{31} = S_{24} = S_{42} = 10 \text{ kNm}$$

Příklad 11.4.5.

Vyřešte průběh ohybových momentů, posouvajících a normálových sil na symetrické konstrukci symetricky zatížené /obr.11.34/. Sloupy mají průřez 0,3 x 0,4 m, příčle 0,3 x 0,6 m.



Obr.11.34. Symetrický rám.

Výsledek: $M_{I1} = -1,502 \text{ kNm}$

$$M_{1I} = -3,004 \text{ kNm}$$

$$M_{11} = -2,535 \text{ kNm}$$

$$M_{12} = 5,539 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = -M_{22} = 15,584 \text{ kNm}$$

$$T_{1I} = T_{1I} = 1,502 \text{ kN}$$

$$T_{12} = T_{21} = -7,041 \text{ kN}$$

$$T_{11} = 0 \quad T_{22} = 30 \text{ kN}$$

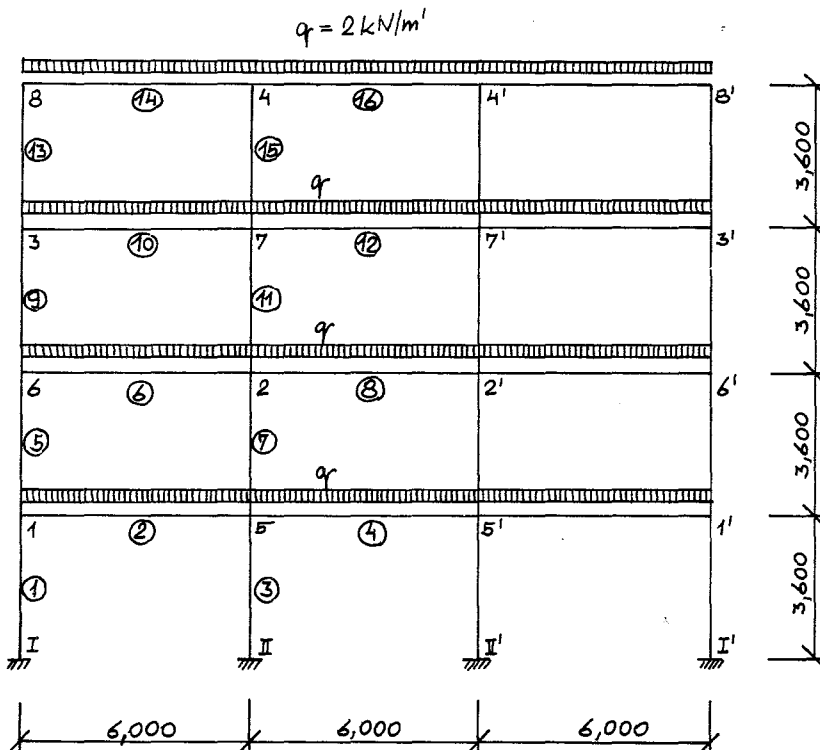
$$N_{21} = N_{12} = N_{1I} = N_{I1} = -30 \text{ kN}$$

$$N_{22} = -7,041 \text{ kN}$$

$$N_{11} = 8,543 \text{ kN}$$

Příklad 11.4.6.

Stanovte průběh ohybových momentů na čtyřpatrovém trojtraktovém symetrickém rámu, zatíženém plným rovnoměrným zatížením intenzity $q = 2 \text{ kN/m}^2$, který je uveden na obrázku 11.35. Rám je železobetonový se sloupy 0,3x0,3 m a příčlemi 0,3 x 0,45 m.



Obr.11.35. Symetrický čtyřpodlažní rám.

Výsledek:

$$M_{I1} = 0,702 \text{ kNm}$$

$$M_{1I} = 1,404 \text{ kNm}$$

$$M_{15} = -3,422 \text{ kNm}$$

$$M_{51} = 6,891 \text{ kNm}$$

$$M_{II5} = -0,131 \text{ kNm}$$

$$M_{5II} = -0,262 \text{ kNm}$$

$$M_{55} = -6,265 \text{ kNm}$$

$$M_{16} = 2,017 \text{ kNm}$$

$$M_{61} = 1,929 \text{ kNm}$$

$$M_{62} = -3,723 \text{ kNm}$$

$$M_{26} = 6,828 \text{ kNm}$$

$$M_{52} = -0,364 \text{ kNm}$$

$$M_{25} = -0,335 \text{ kNm}$$

$$M_{22} = -6,207 \text{ kNm}$$

$$M_{63} = 1,795 \text{ kNm}$$

$$M_{36} = 1,750 \text{ kNm}$$

$$M_{37} = -3,862 \text{ kNm}$$

$$M_{73} = 6,824 \text{ kNm}$$

$$M_{27} = -0,285 \text{ kNm} \quad M_{72} = -0,264 \text{ kNm} \quad M_{77} = -6,163 \text{ kNm} \quad M_{38} = 2,113 \text{ kNm} \quad M_{83} = 2,521 \text{ kNm}$$

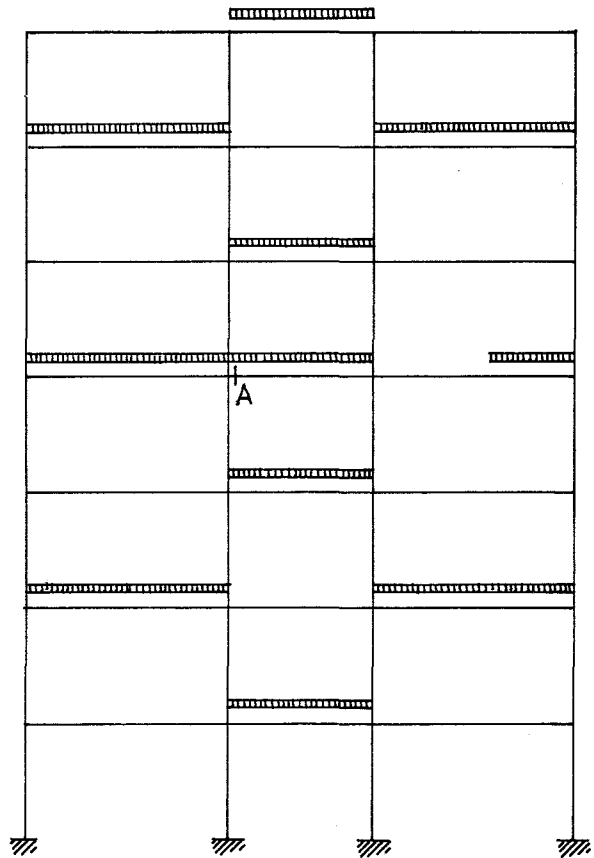
$$M_{84} = -2,521 \text{ kNm} \quad M_{48} = 7,026 \text{ kNm} \quad M_{74} = -0,396 \text{ kNm} \quad M_{47} = -0,550 \text{ kNm} \quad M_{44} = -6,476 \text{ kNm}$$

11.5. Rámové výseky pro svislé zatížení.

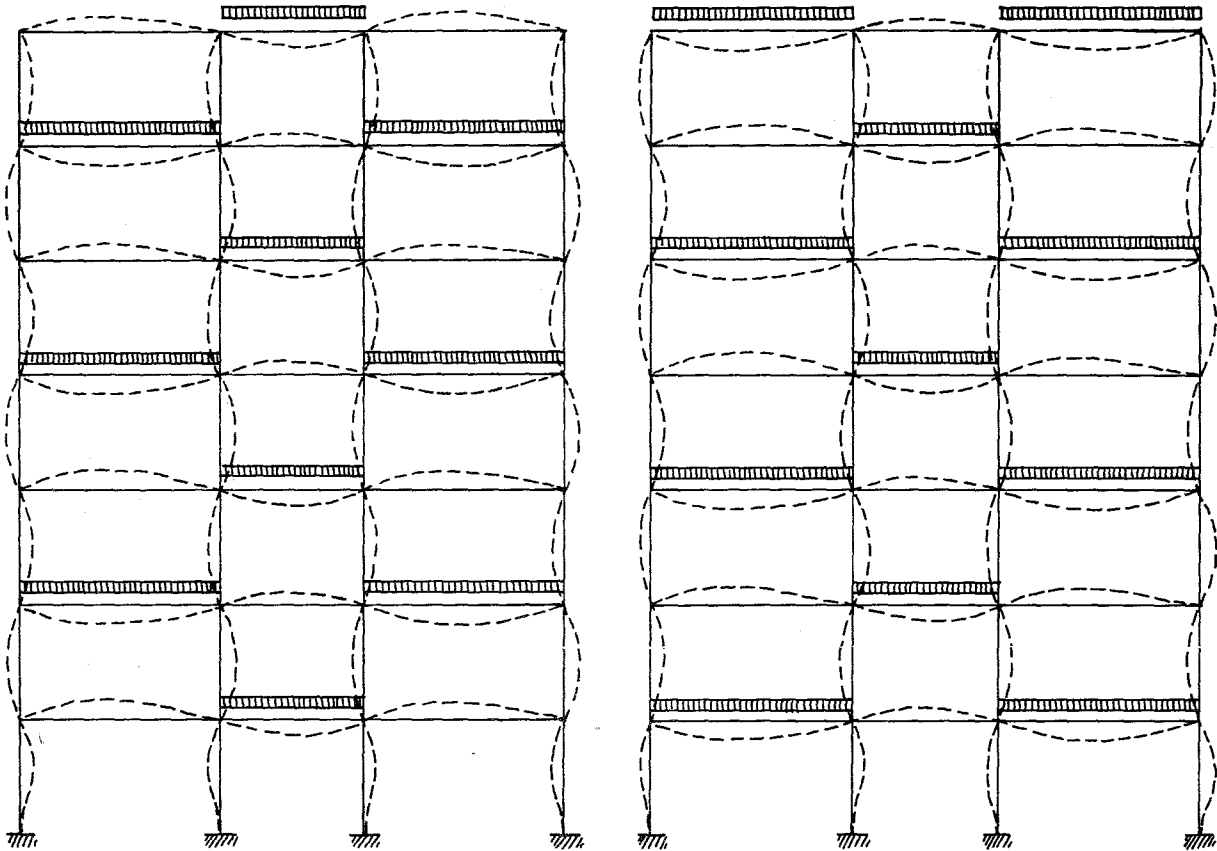
Na rámových soustavách se vyskytuje svislé zatížení dvojího druhu : stálé a nahodilé (zejména užité). Ze statického hlediska spočívá rozdíl mezi těmito dvěma druhy zatížení v tom, že zatížení stálé působí nepřetržitě na celou konstrukci, zatížení užité pak působit může a nemusí, může zatížit konstrukci celou nebo pouze její část. Pro některé části nosné konstrukce může být nepříznivější případ, kdy je užitným zatížením obtížena celá konstrukce, ovšem pro jiné části je nepříznivější případ, kdy jsou obtížena pouze některá pole, nebo dokonce i část polí (viz obr.11.36, který ukazuje nejnepříznivější užité zatížení pro stanovení ohybového momentu v podporovém průřezu A). O tom, které části konstrukce je třeba zatížit, nám říká teorie příčinkových čar, o níž se případný zájemce může dozvědět v literatuře (viz např. /6/).

Účinek užitého zatížení se může s účinkem zatížení stálého sčítat, ale oba účinky mohou být i opačného znaménka. Při přesném výpočtu konstrukce je tedy třeba pro každý průřez stanovit vnitřní síly od zatížení stálého pro celou konstrukci, od částečného užitého zatížení dávajícího maximum a od částečného užitého zatížení dávajícího minimum vnitřních sil (zejména ohybových momentů, ale také normálových i posouvajících sil). Dimenzujeme pak na účinek stálé + maximum užitého a stálé + minimum užitého. To by ovšem znamenalo stanovovat vnitřní síly na konstrukci pro velmi mnoho zatěžovacích stavů - pro každý průřez dva. A jen málo zatěžovacích schémat by se pro různé průřezy shodovalo.

Obvykle proto řešíme vnitřní síly na staticky neurčité konstrukci pouze pro tři zatěžovací případy : zatížení stálé (na všech prutech) a dvě šachnicově rozmístěná zatížení užité /obr.11.37/; součtem obou případů užitných zatížení dostáváme pak vnitřní síly při plném užitém zatížení. Pro vlastní dimenzování potom uvažujeme maximální a minimální (jsou-li opačného znaménka, jinak pouze v absolutní hodnotě větší) účinek z těchto kombinací různých zatížení :



Obr.11.36. Užité zatížení vyvolující extrémní ohybový moment v podporovém průřezu A .



Obr.11.37. Dva zatěžovací stavy užitečného zatížení pro stanovení extrémních vnitřních sil.

- a) zatížení stálé
- b) zatížení stálé + užité 1
- c) zatížení stálé + užité 2
- d) zatížení stálé + užité 1 + užité 2 (tj. zatížení stálé + plné užité)

Tímto způsobem sice nezískáme skutečné maximum a minimum ze všech možností, ale získané hodnoty se nebudou od extrémních téměř lišit a výpočet bude mít postačující přesnost. Dosáhneme takto při zanedbatelném omezení přesnosti značné redukce množství výpočtů vnitřních sil při různých zatěžovacích stavech užitečného zatížení - od téměř nekonečného počtu na dva (+ jeden od zatížení stálého).

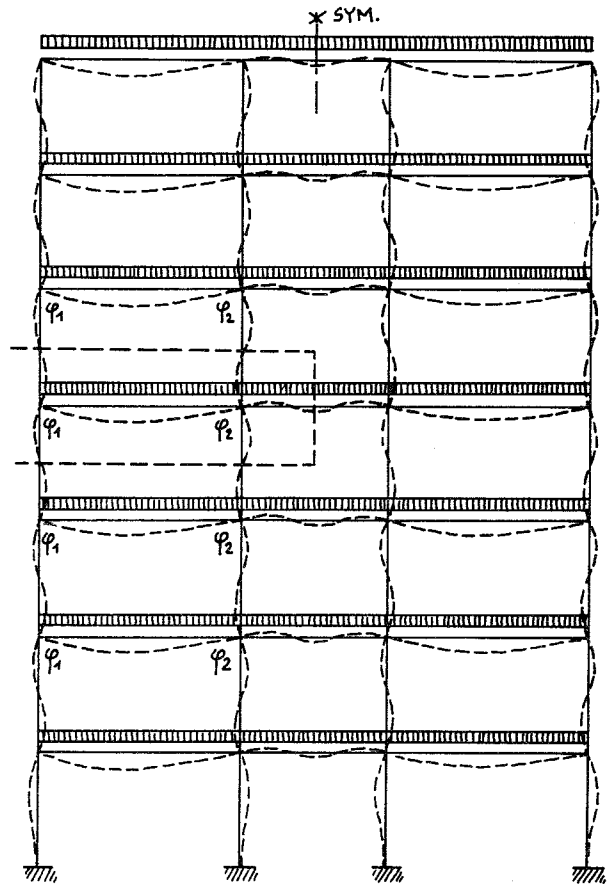
Uvažujme nejprve symetrický mnohapatrový rám zatížený plným rovnoměrným obtížením ve všech patrech, což je případ zatížení stálého. Sloupy i příčně takovýchto rámu se obvykle navrhují stejného průřezu v několika po sobě následujících patrech, někdy i v celé konstrukci; skýtá to mnoho projekčních i technologických výhod, a rozdílnot namáhání dolních a horních podlaží (dole větší normálová síla, nahoře větší ohybové momenty od zatížení svislého) je možno částečně vyrovnat množstvím výztuže.

Protože rám předpokládáme symetrický a je symetricky zatížen, nedochází u něj k posunutím styčniců ani ve svislém (všechny styčniců jsou podepřeny a stlačení prutů zanedbáváme), ani ve vodorovném (symetrie) směru. Jedinými neznámými při řešení Crossovou metodou budou tedy styčnicová pootočení. A protože zatížení i průřezy se v mnoha patrech opakují, lze oprávněně předpokládat, že i deformace v těchto po sobě následujících patrech se budou opakovat. Budou tedy stejná i po

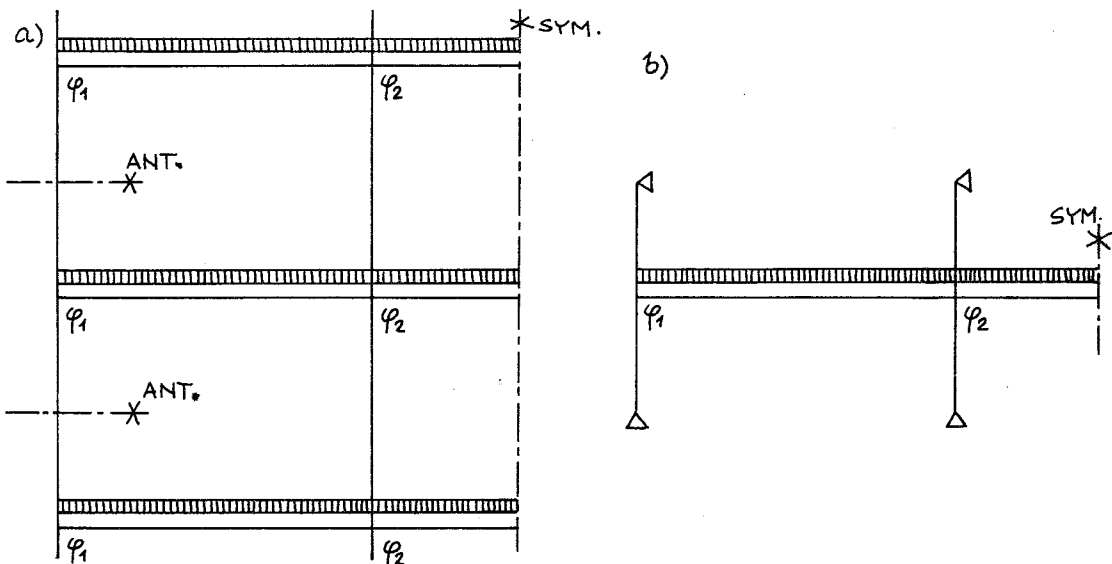
otočení styčniců nad sebou /obr.11.38/. K výraznějším rozdílům dochází pouze v horních patrech vlivem toho, že horní styčnice nejsou již ztuženy sloupy vyššího patra i vlivem odlišného zatížení střechy, a v dolním patře vlivem vetknutí (a tedy i nulového pootočení) sloupů do základů a často i jiné výšky patra.

Můžeme tedy vnitřní síly ve středních patrech určit pouze na tzv. rámovém výseku, který je uveden na obrázku 11.39a. Protože však dvě po sobě následující patra mají styčnicková pootočení stejné velikosti i stejného znaménka, leží vlastně uprostřed každého patra vodorovná osa antisymetrie se všemi jejími důsledky: nulový ohybový moment na ose antisymetrie a nulové posunutí bodu na ose antisymetrie ve směru osy. Můžeme proto osu antisymetrie nahradit vnější kloubovou podporou a řešit rámový výsek uvedený na obrázku 11.39b.

Ohybové momenty v uvedeném rámovém výseku je nejvýhodnější řešit Crossovou metodou, protože pro řešení horního a spodního konce, kde jsou odlišná styčnicková pootočení a tedy i vnitřní síly, je potřebné znát velikosti ohybových momentů typického patra rámové konstrukce.

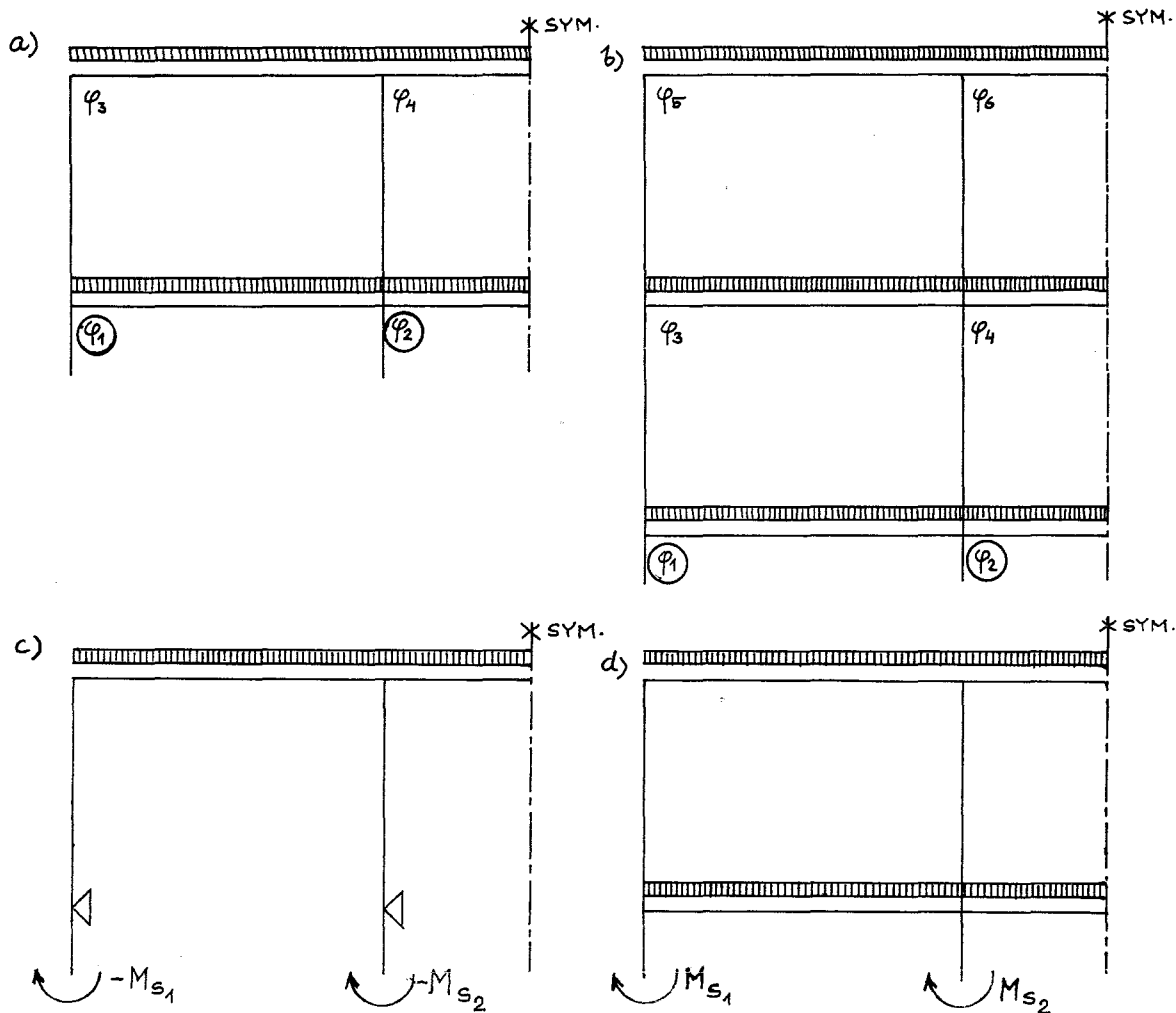


Obr.11.38. Deformace symetrického rámu od zatížení stálého.



Obr.11.39. Rámový výsek pro typické patro od stálého zatížení.

V nejvyšším a v nejnižším patře, jak již bylo řečeno, se ohybové momenty podstatněji liší od ohybových momentů v typickém patře. Je proto třeba pro nejvyšší a nejnižší patro provést opravy těchto průběhů ohybových momentů. Někdy se tento opravný výpočet dělá pouze pro nejvyšší patro a předpokládá se, že v druhém patře shora již můžeme počítat s ohybovými momenty jako v patře typickém - viz obrázek 11.40a, kde jsou (a stejně tak i v dalších obrázcích) zakroužková-



Obr. 11.40. Opravný rámový výsek pro nejvyšší patra.

- a) opraveny vnitřní síly pouze v nejvyšším patře - obvykle nestačí
- b) opraveny vnitřní síly ve dvou nejvyšších podlažích - značně lepší
- c) náhradní rámový výsek pro opravu pouze v nejvyšším patře
- d) náhradní rámový výsek pro opravu ve dvou nejvyšších patrech

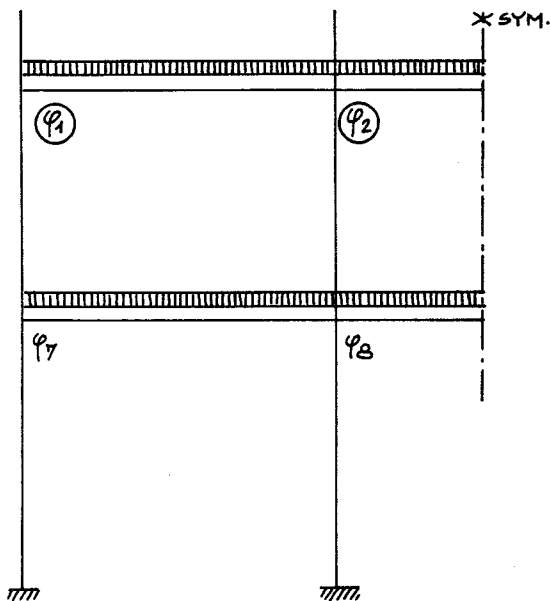
ním označeny již známé deformace. Ovšem výsledky získané takovýmto výpočtem se obvykle značně liší od správných hodnot, což se projeví ve zcela nečekaném a netypickém průběhu ohybových momentů ve sloupech horního patra. Je proto vhodnější uvažovat pro nejvyšší patro rámový výsek, v němž uvažujeme opravu styčnickových pootočení ve dvou horních patrech /obr.11.40b/.

Pro výpočet ohybových momentů Crossovou metodou používáme rámové výseky uvedené na obrázku 11.40c pro opravu pouze v nejvyšším patře nebo na obrázku 11.40d

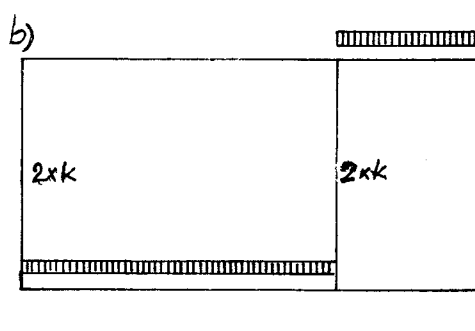
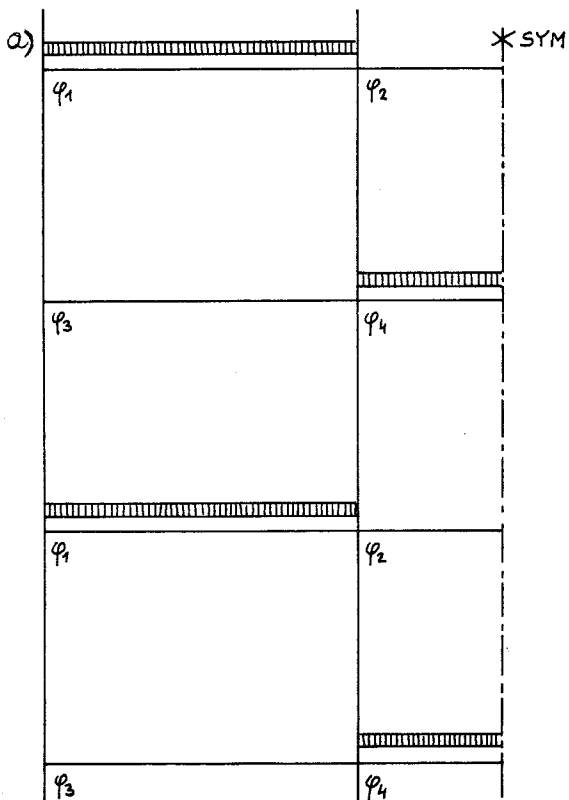
pro opravu ve dvou nejvyšších patrech. Rámový výsek zatěžujeme kromě jeho zatížení ještě momenty na sloupech typického patra, při opravě pouze v nejvyšším podlaží /obr.11.40c/ je třeba u těchto zatěžujících momentů na sloupech obrátit znaménko.

Obdobné zásady platí i pro nejnižší podlaží /obr.11.41/. Ovšem vzhledem k tomu, že spodní patro má obvykle větší konstrukční výšku, je zde větší tuhost vlivem vetknutí do patek částečně eliminována menší ohybovou tuhostí sloupů (jak víme z odstavce 11.3, je ohybová tuhost prutu nepřímo úměrná jeho délce). Postačuje proto obvykle opravný výpočet pouze pro nejnižší podlaží samotné.

Zcela jiná je situace v případě užitého zatížení. Jak již bylo řečeno, užitným zatížením zatěžujeme konstrukci šachovnicově. U symetrického rámu mohou nastat dva případy, podle toho, zda se jedná o rám s lichým nebo sudým počtem traktů. Je-li počet traktů lichý (např. trojtrakt na obrázku 11.37/, je i v pří-



Obr. 11.41. Opravný rámový výsek pro nejnižší patro.



Obr. 11.42. Rámový výsek pro typická patra symetrického rámu s lichým počtem traktů při užitém zatížení.

padě šachovnicového zatížení toto zatížení rozloženo symetricky vzhledem k svislé ose symetrie, a k vodorovným posunutím pater ani v tomto případě nedochází. Prohlédneme-li si obrázek 11.37 podrobněji, zjistíme, že v typických patrech se zatížení i deformace opakují ob jedno patro, dá se proto předpokládat, že ani ohybové momenty se ob jedno patro nebudou příliš lišit. Rámový výsek bude tedy pro užitné zatížení zahrnovat dvě sousední patra /obr.11.42a/. Je samozřejmě zcela lhostejné, zda rámový výsek má nahoře zatíženo krajní nebo střední pole - oba tyto případy jsou zrcadlovým obrazem a vedou ke stejným výsledkům v odpovídajících patrech. Dále je také vidět, že pro obě šachovnicová užitná zatížení (srovnej obrázky 11.37a,b/ můžeme pro typická patra použít téhož rámového výseku, aniž bychom v něm měnili zatížení.

Pro výpočet ohybových momentů Crossovou metodou používáme náhradní rámový výsek uvedený na obrázku 11.42b, kde počítáme s dvojnásobnými tuhostmi sloupů. Výsledné momenty na sloupech je potom nutno dělit dvěma.

Příklad 11.5.1.

Řešte s použitím rámových výseků ohybové momenty v osmipatrovém rámu se třemi trakty, uvedeném na obrázku 11.43. Rám je zatížen kombinací

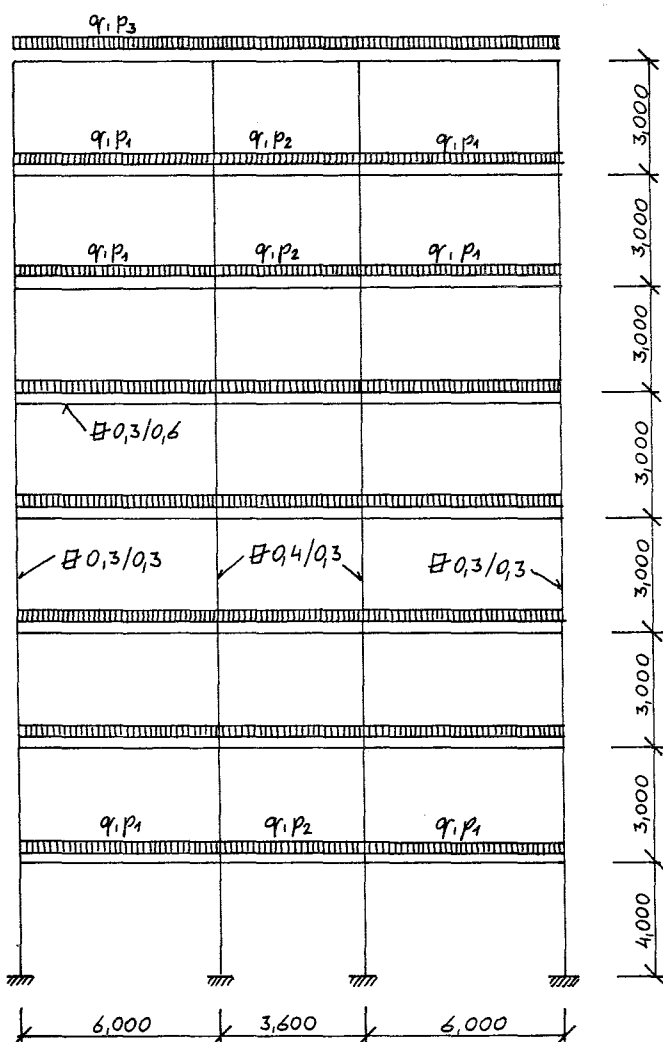
- stálého zatížení $q=20$ kN/m ve všech patrech
- užitného zatížení v krajních traktech $p_1=10$ kN/m, ve středním (chodbovém) traktu $p_2=20$ kN/m; střecha je zatížena spojitým zatížením $p_3=5$ kN/m ve všech traktech.

Vypočtete maximální ohybové momenty pro nejnepríznivější kombinace zatížení stálého a užitného (stačí šachovnicové rozdělení).

Všechny příčle mají průřez $0,3/0,6$ m, krajní sloupy $0,3/0,3$ m, střední sloupy $0,3/0,4$ m. Výšky pater jsou 3 m, spodního patra 4m. Rozpětí krajních polí je 6m a středního pole 3,6 m.

Řešení: Výpočet rámu rozložíme na tři etapy - od zatížení stálého, od nahodilého zatížení šachovnicově rozloženého ("bílá" pole) a od zbyvajících šachovnicového rozloženého nahodilého zatížení ("černá" pole).

Tuhosti jednotlivých prutů jsou následující : tuhost



Obr. 11.43. Osmipatrový symetrický rám.

krajních sloupů v patrech $k_1 = 1$, tuhost krajních sloupů ve spodním patře $k_2 = 3/4 = 0,75$, tuhost středních sloupů v patrech $k_3 = 0,4^3/0,3^3 = 2,37$, tuhost středních sloupů ve spodním patře $k_4 = k_3 \cdot 3/4 = 1,778$, tuhost příčlív v krajních polích $k_5 = 0,6^3/0,3^3 \cdot 3/6 = 4$, tuhost příčlív v středních polích (osa symetrie) $k_6^s = 1/2 \cdot 6/3,6 \cdot k_5 = 3,333$.

K výpočtům využijeme rámových výseků. Rámový výsek pro typické patro při zatížení stálém je uveden na obrázku 11.39b. Momenty v dokonalém vetknutí prutů jsou

$$S_{12} = -S_{21} = -\frac{1}{12} 20 \cdot 6^2 = -60 \text{ kNm} \quad S_{2s} = -\frac{1}{12} 20 \cdot 3,6^2 = -21,6 \text{ kNm}$$

Tuhost sloupů v tomto výseku je (poloviční délka, prut kloubově připojený)

$$k_1' = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 = 1,5 \quad k_3' = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2,37 = 3,556$$

Rozdělovací součinitele jsou

$$\begin{aligned} \mu_{12} &= \frac{4}{7} = 0,5714 & \mu_{11} &= \frac{1,5}{7} = 0,2143 \\ \mu_{21} &= \frac{4}{14,444} = 0,2769 & \mu_{22} &= \frac{3,556}{14,444} = 0,24615 & \mu_{2s} &= \frac{3,333}{14,444} = 0,2308 \end{aligned}$$

	1''			2''	
	0,2143		+63,416	0,24615	
	+12,857		-0,022	-13,672	
	+1,648		+0,087	-0,541	
	+0,065		-0,608	-0,022	
	+0,003		+2,197	-14,235	
	+14,573		-15,381		
			+17,143		
			+60,000		
					sym.
	1	0,5714	0,2769	2	0,2308
					s
+14,573	0,2143	-60,000		0,24615	-21,600
+0,002		+34,286			-12,818
+0,065		-7,691			-0,507
+1,648		+4,395			-0,021
+12,857		-0,304			-34,946
		+0,174			
		-0,011			
		+0,005			
		-29,146			
	1'			2'	

Pro šachovnicové zatížení použijeme rámového výseku uvedeného na obrázku 11.42b.

Momenty v dokonalém vetknutí jsou v tomto případě rovny

$$S_{12} = -S_{21} = -\frac{1}{12} 10 \cdot 6^2 = -30 \text{ kNm} \quad S_{4s} = -\frac{1}{12} 20 \cdot 3,6^2 = -21,6 \text{ kNm}$$

Tuhosti sloupů jsou zdvojnásobeny, tedy

$$k_1'' = 2 \cdot 1 = 2 \quad k_3'' = 2 \cdot 2,37 = 4,74$$

Rozdělovací součinitele jsou

$$\begin{aligned} \mu_{12} &= \mu_{34} = \frac{4}{6} = 0,6667 & \mu_{13} &= \mu_{31} = \frac{2}{6} = 0,3333 \\ \mu_{21} &= \mu_{43} = \frac{4}{12,073} = 0,3313 & \mu_{2s} &= \mu_{4s} = \frac{3,333}{12,073} = 0,2761 \\ \mu_{24} &= \mu_{42} = \frac{4,74}{12,073} = 0,3926 & & \end{aligned}$$

Při vyrovnávání momentů postupujeme opět v pořadí vyrovnávání 1-4-2-3-1 ...

+61,923
 -0,106
 +0,189
 -0,780
+1,654
 -8,554
+25,349
 -15,829
 o +60,000

<u>+18,196</u> <u>+0,014</u> <u>-0,016</u> <u>+0,094</u> <u>-0,082</u> <u>+0,827</u> <u>+0,142</u> <u>+12,674</u> <u>+4,543</u>	0,2000 0,2000 0,2000 +9,085 +6,337 +0,284 +0,414 -0,164 +0,047 -0,032 <u>+15,971</u>	0,8000 -60,000 -7,915 <u>+50,698</u> -4,277 <u>+3,308</u> -0,390 <u>+0,378</u> -0,053 <u>+0,055</u> -18,196	0,4122 -19,265 <u>-0,063</u> <u>+0,068</u> <u>-0,463</u> <u>+0,240</u> <u>-5,069</u> <u>-4,498</u> <u>-9,380</u> +63,909 <u>+0,040</u> <u>-0,065</u> <u>+0,230</u> <u>-0,328</u> <u>+0,810</u> <u>+0,569</u> <u>-15,518</u> <u>+18,171</u> o +60,000	8 0,3435 -21,600 <u>-13,191</u> <u>-7,128</u> <u>-0,651</u> <u>-0,088</u> -42,658 0,2443 0,2443 -4,690 -9,196 -2,534 <u>+0,480</u> <u>-0,231</u> <u>+0,137</u> <u>-0,031</u> <u>+0,023</u> <u>-16,042</u>	s s s
o +14,573	0 0	0,8000 -60,000 <u>+36,342</u> -7,759 <u>+1,138</u> <u>+0,405</u> <u>-0,655</u> <u>+0,115</u> <u>-0,130</u> <u>-30,544</u>	0,4122 -14,235 o	6 0,3435 -21,600 <u>-12,932</u> <u>+0,675</u> <u>+0,192</u> <u>+0,033</u> -33,632	s s

Výpočet nejúčinnějších kombinací zatížení stálého a případně částečného nebo plného užitečného zatížení pro typické patro provedeme v tabulce 11.1.

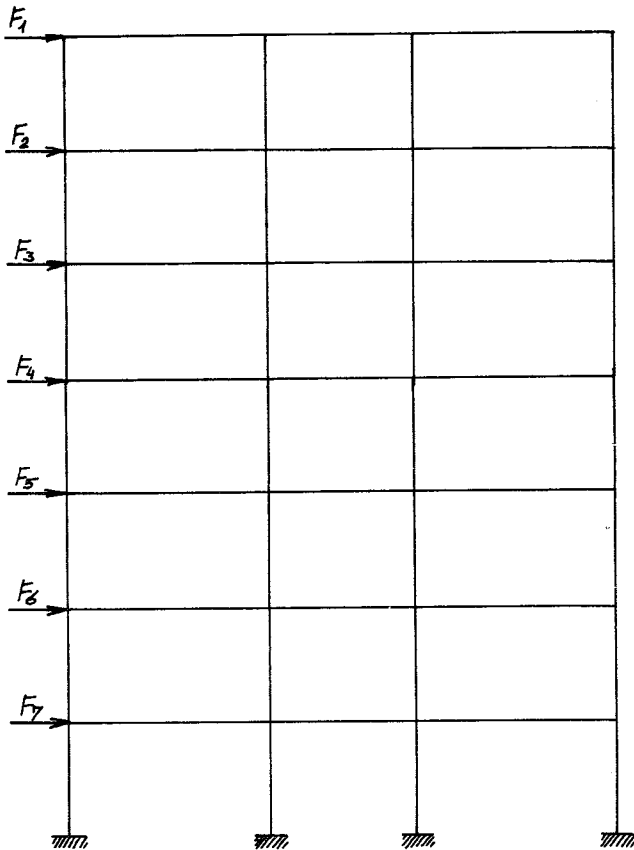
Průřez	stálé	1. užitečné	2. užitečné	M_{max}	M_{min}
1 - 2	-29,146	-11,381	-2,524	-29,146	-43,051
2 - 1	63,416	26,760	7,618	97,794	63,416
2 - s	-34,946	-13,944	-11,734	-34,946	-60,624
1 - 1'	14,573	5,691	1,262	21,526	14,573
2 - 2'	-14,235	-6,408	2,058	-12,177	-20,643

Tabulka 11.1. Výpočet ohybových momentů od nejúčinnější kombinace zatížení.

Pro dimenzování příčlí je třeba určit ještě maximální mezipodporové momenty od nejúčinnější kombinace zatížení. Protože však v každém zatěžovacím stavu nastává maximální mezipodporový moment v jiném průřezu a navíc na nezatíženém prutu (při některém z užitečných zatížení) se o maximálním mezipodporovém momentu nedá vůbec mluvit, je vhodnější místo maximálního mezipodporového momentu počítat ohybový moment uprostřed příčle. Dopouštíme se tím sice jisté nepřesnosti, protože ohybový moment uprostřed příčle není největší mezipodporový moment, ale chyba obvykle nepřesahuje 2%. Pokud by se ohybové momenty na obou koncích příčle (v absolutní hodnotě) lišily o více než asi dvě třetiny momentu v dokonalém vetk-

11.6. Rámové výseky pro zatížení větrem.

Zatížení větrem se předpokládá jako rovnoměrně rozložené po fasádě konstrukce, případně u vysokých staveb s výškou intenzita zatížení vzrůstá. Ovšem při



Obr.11.44. Zatížení rámu vodorovnými silami (vítr).

vlastním výpočtu rámu obvykle toto spojitě zatížení nahrazujeme soustavou osamělých vodorovných břemen působících ve styčnicích konstrukce /obr.11.44/. Tato náhrada někdy zcela přesně vystihuje působení konstrukce, pokud se zatížení větrem přenáší z fasádních elementů právě do těchto styčnic, a v ostatních případech se touto náhradou nedopustíme téměř žádné nepřesnosti.

Zatížení větrem způsobuje v libovolném patru rámu vodorovnou sílu V_k , jejíž velikost je dána součtem vodorovných sil nad uvažovaným patrem

$$V_k = \sum_{i=1}^k F_i.$$

Tuto vodorovnou sílu V_k , nazývanou patrová síla, musí udržovat v rovnováze (výminka rovnováhy ve vodorovném směru) posouvající síly v sloupech patra /obr.11.45/, takže součet posouvajících sil ve sloupech patra musí být roven patrové síle V . Každý sloup patra přenáší tedy část patrové síly V , a je oprávněný předpoklad, že tato

$$T_j = V \cdot \frac{k_j}{\sum_{i=1}^n k_i}.$$

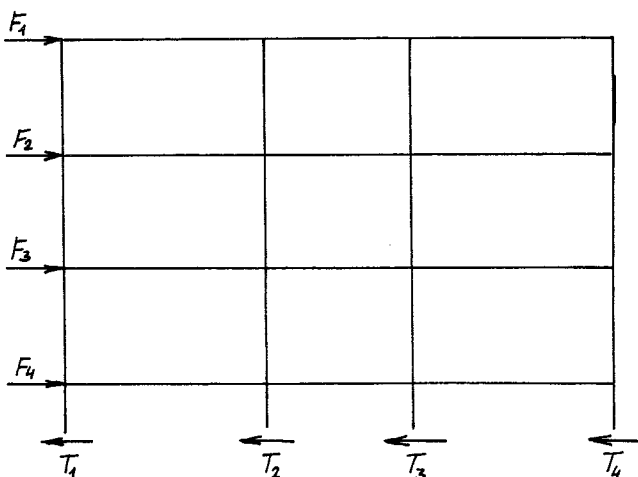
část patrové síly, připadající na sloup, je přímo úměrná ohybové tuhosti tohoto sloupu. Je-li počet sloupů n , je tedy posouvající síla v j -tém sloupu rovna

$$T_x = \frac{M}{l} - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l},$$

Posouvající sílu v prutu vypočteme podle 1. dílu těchto skript pomocí vztahu a protože zatížení prutů je nyní nulové a je tedy nulová i posouvající síla $\frac{M}{l}$, musí být součet ohybových momentů ($M_{ab} + M_{ba}$) na obou koncích j -tého sloupu patra roven (výška patra je h)

$$M_{ab,j} + M_{ba,j} = -T_j \cdot h = -V \cdot h \cdot \frac{k_j}{\sum k}.$$

/11.30/



Obr.11.45. Rovnováha ve vodorovném směru.

Ukazuje se, že ohybové momenty na obou koncích sloupu jsou ve všech patrech s výjimkou spodního patra stejně veliké, je tedy

$$M_{ab,ij} \doteq M_{ba,ij} \doteq \pm 0,5 \cdot V \cdot h \cdot \frac{k_j}{\sum k} \quad /11.31/$$

Znaménko + nebo - určíme podle toho, zda síly působí zleva nebo zprava. Při silách působících zleva jako na obrázku 11.44 jsou ohybové momenty ve sloupech záporné a naopak.

Ve spodním patře jsou dolní konce sloupů vetknuty, takže tyto styčníky jsou tužší než styčníky na horních koncích prutů. To způsobuje, že ve spodním patře jsou ohybové momenty na dolních koncích prutů větší než na horních koncích prutů, a to moment dole je cca 60% ze součinu $V \cdot h$ a moment nahoře cca 40% z tohoto součinu. Označíme-li dolní konec a a horní b , je ve spodním patře

$$M_{ab,ij} \doteq \pm 0,6 \cdot V \cdot h \cdot \frac{k_j}{\sum k} \quad , \quad M_{ba,ij} \doteq \pm 0,4 \cdot V \cdot h \cdot \frac{k_j}{\sum k} \quad /11.32/$$

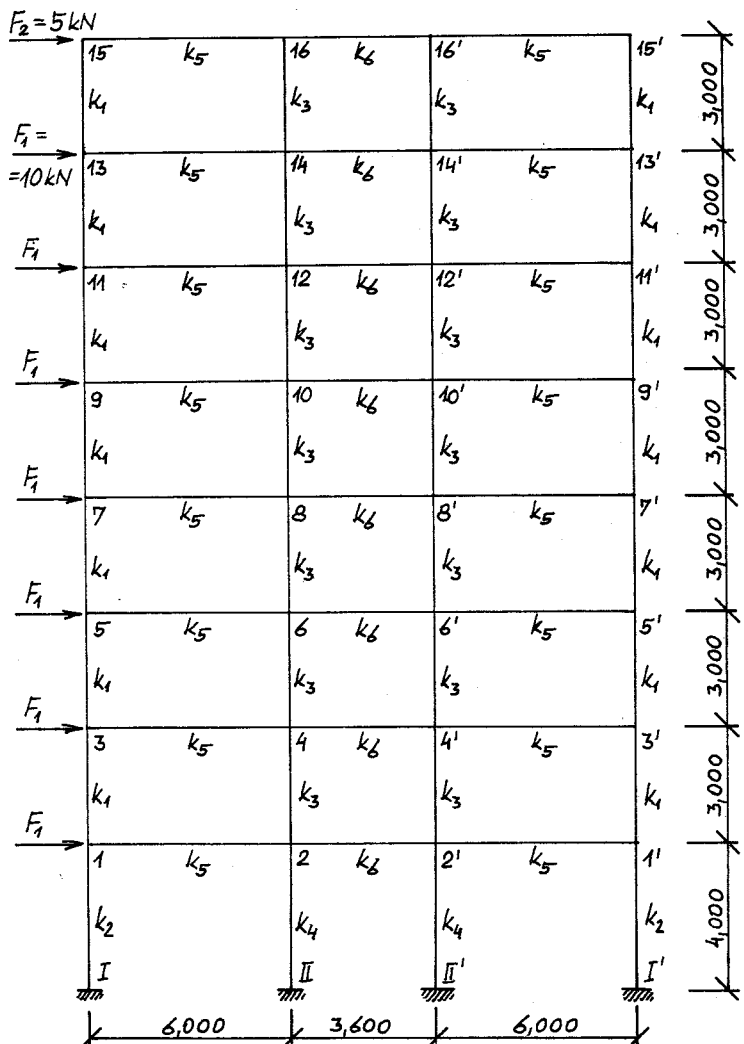
Ohybové momenty v příčlích určíme tak, aby ve styčnicích byla splněna momentová podmínka rovnováhy, neboli nulový součet ohybových momentů. Poblíž krajních sloupů je tedy ohybový moment v příčli roven záporně vzatému součtu ohybových momentů ve sloupech pod a nad příčlí, a poblíž středních sloupů se tento záporně vzatý součet ohybových momentů ve sloupu rozdělí do příčlí v poměru ohybových tuhostí příčlí.

Příklad 11.6.1.

Vyřešte ohybové momenty v rámu z příkladu 11.5.1 od zatížení větrem, které můžeme nahradit ve styčnicích vodorovnými silami, jejichž velikost je 10 kN, v nejvyšším patře 5 kN /obr.11.46/. Určete též maximální ohybové momenty od zatížení stálého s užitným (příklad 11.5.1/ a levostranného nebo pravostranného větru.

Řešení : Tuhosti prutů jsou stejné jako v příkladu 11.5.1, tedy $k_1 = 1$, $k_2 = 0,75$, $k_3 = 2,37$, $k_4 = 1,778$, $k_5 = 4$ a $k_6^s = 3,333$. Ovšem nesmíme přitom zapomenout na to, že tuhosti k_6^s byly vypočteny pro symetrickou konstrukci.

Vzhledem k tomu, že zatíže-



Obr. 11.46. Osmipatrový rám zatížený větrem.

ní větrem je zatížení antisymetrické, budou tuhosti středních částí příčlí tři-krát větší, tedy $k_6^a = 10$. Výpočet ohybových momentů ve sloupech spočívá potom v tom, že

a) určíme patrové síly V_i v jednotlivých patrech, to je součet vodorovných sil odshora až k uvažovanému patru,

b) násobením patrových sil V_i záporně vzatými výškami pater h_i získáme tzv. patrové momenty M_i ,

c) tyto patrové momenty rozdělíme na jednotlivé sloupy v poměru tuhostí jednotlivých prutů, a na dolní konec sloupu a horní konec sloupu přijde 50 % momentu pro sloup, resp. v dolním patře 60 % a 40 % tohoto momentu pro sloup.

To tedy znamená, že ohybové momenty v krajních sloupech budou činit

$$0,5 \cdot \frac{k_1}{2(k_1+k_3)} = 0,5 \cdot \frac{1}{2(1+2,37)} = 0,0742$$

násobky patrových momentů ve vyšších patrech a

$$0,6 \cdot \frac{k_2}{2(k_2+k_4)} = 0,6 \cdot \frac{0,75}{2(0,75+1,778)} = 0,089, \text{ resp. } 0,4 \cdot \frac{0,75}{2(0,75+1,778)} = 0,0593$$

násobky patrového momentu ve spodním patře. Ve středních sloupech pak

$$0,5 \cdot \frac{k_3}{2(k_1+k_3)} = 0,5 \cdot \frac{2,37}{2(1+2,37)} = 0,1758$$

násobky patrového momentu ve vyšších patrech a

$$0,6 \cdot \frac{k_4}{2(k_2+k_4)} = 0,6 \cdot \frac{1,778}{2(0,75+1,778)} = 0,211, \text{ resp. } 0,4 \cdot \frac{1,778}{2(0,75+1,778)} = 0,1407$$

násobky patrového momentu ve spodním patře. Součtem ohybových momentů v krajních sloupech ve dvou po sobě následujících podlažích získáme ohybové momenty v příčlí v průřezech poblíž krajních sloupů a součtem ohybových momentů ve středních sloupech ve dvou po sobě následujících podlažích a rozdělením v poměru tuhostí získáme ohybové momenty v příčlích v průřezech poblíž středních sloupů. Ze součtů momentů ve středních sloupech tedy případně

$$\frac{k_5}{k_5+k_6^a} = \frac{4}{4+10} = 0,2857$$

část pro krajní příčlí a

$$\frac{k_6^a}{k_5+k_6^a} = \frac{10}{4+10} = 0,7143$$

pro střední příčlí. Ohybové momenty v příčlích mají ovšem obrácené znaménko než ohybové momenty ve sloupech (součet ohybových momentů v každém styčnicku musí být nulový). Vlastní výpočet je výhodné provést tabelárně - viz tabulka 11.2.

bod i	síla F_i	pat. síla V_i	pat. mom. M_i	krajní sloupy		střední sloupy		krajní příčle			střed. příčle
				moment dole	moment nahore	moment dole	moment nahore	u kraj. sloupu	u stř. sloupu	střed příčle	
15	5	5	-15	-1,113	-1,113	-2,637	-2,637	1,113	0,753	0,180	1,884
13	10	15	-45	-3,338	-3,338	-7,912	-7,912	4,451	3,014	0,719	7,535
11	10	25	-75	-5,563	-5,563	-13,187	-13,187	8,901	6,028	1,437	15,071
9	10	35	-105	-7,788	-7,788	-18,462	-18,462	13,351	9,043	2,154	22,606
7	10	45	-135	-10,014	-10,014	-23,736	-23,736	17,802	12,057	2,873	30,141
5	10	55	-165	-12,239	-12,239	-29,011	-29,011	22,253	15,071	3,591	37,676
3	10	65	-195	-14,464	-14,464	-34,286	-34,286	26,703	18,085	4,309	45,212
1	10	75	-300	-26,703	-17,802	-63,297	-42,198	32,266	21,853	5,207	54,631

Tabulka 11.2. Ohybové momenty v rámu od zatížení levostranným větrem.

V tabulce 11.3 jsou pak vypočteny extrémní ohybové momenty v několika průřezích od zatížení stálého, užitného a pravostranného nebo levostranného větru. Hodnoty ohybových momentů od zatížení svislého (stálého i užitného) jsou převzaty z příkladu 11.5.1, to je z tabulky 11.1.

průřez	stálé	1. užitné	2. užitné	levý vítr	pr. vítr	M_{max}	M_{min}
9 - 7	14,573	1,262	5,691	-7,788	7,788	29,314	6,785
7 - 9	14,573	5,691	1,262	-7,788	7,788	29,314	6,785
7 - 5	14,573	5,691	1,262	-10,014	10,014	31,540	4,559
5 - 7	14,573	1,262	5,691	-10,014	10,014	31,540	4,559
10 - 8	-14,235	2,058	-6,408	-18,462	18,462	6,285	-39,105
8 - 10	-14,235	-6,408	2,058	-18,462	18,462	6,285	-39,105
8 - 6	-14,235	-6,408	2,058	-23,736	23,736	11,559	-44,379
6 - 8	-14,235	2,058	-6,408	-23,736	23,736	11,559	-44,379
7 - 8	-29,146	-11,381	-2,524	17,802	-17,802	-11,344	-60,853
c	43,719	25,930	-5,071	2,873	-2,873	72,522	35,775
8 - 7	63,416	26,760	7,618	12,057	-12,057	109,851	51,359
8 - s	-34,946	-13,944	-11,734	30,141	-30,141	-4,805	-90,765

Tabulka 11.3. Výpočet ohybových momentů od nejučinnější kombinace zatížení.

Příklad 11.6.2.

Porovnejte výsledky příkladu 11.4.3 s řešením pomocí rámových výsledků.

Řešení: V příkladu 11.4.3 jsme získali tyto výsledky

$$M_{I1} = -43,826 \text{ kNm} \quad M_{1I} = -28,174 \text{ kNm}$$

$$T_{I1} = 20 \text{ kNm} \quad T_{11} = -9,391 \text{ kNm}$$

Použijeme-li k řešení přibližného výpočtu pomocí rámového výseku pro zatížení větrem, rozdělí se vodorovné zatížení v poměru tuhostí a dostáváme

$$T_{I1} = T_{I,1} = \frac{1}{2} 40 = 20 \text{ kN}$$

Pro stanovení ohybových momentů použijeme vztahů pro nejnižší podlaží, to je vztahů /11.32/. Dostáváme

$$M_{I1} = -0,6 \cdot 20 \cdot 3,6 = -43,2 \text{ kNm}$$

$$M_{1I} = -M_{11} = -0,4 \cdot 20 \cdot 3,6 = -28,8 \text{ kNm}$$

Posouvající síla na příčli pak vychází

$$T_{11} = -\frac{28,8 + 28,8}{6} = -9,6 \text{ kN}$$

Vidíme, že rozdíly v ohybových momentech a posouvajících silách na příčli se pohybují okolo 2 % správných hodnot, v posouvajících silách na sloupech jsme díky symetrii konstrukce a antisymetrii zatížení (a z toho vyplývající symetrie posouvajících sil) dosáhli přesných výsledků.

Příklad 11.6.3.

Vypočtete pomocí rámových výseků vnitřní síly na rámu z příkladu 11.4.1 /viz obr. 11.27/ od vodorovného zatížení ve styčnicích 1 a 3 silami $F_1 = F_3 = 20 \text{ kN}$, ve styčnicí 5 silou $F_5 = 10 \text{ kN}$.

Výsledky:

$$M_{I1} = M_{II2} = -27 \text{ kNm}$$

$$M_{1I} = M_{2II} = -18 \text{ kNm}$$

$$M_{13} = M_{31} = M_{24} = M_{42} = -13,5 \text{ kNm}$$

$$M_{35} = M_{53} = M_{46} = M_{64} = -4,5 \text{ kNm}$$

$$M_{12} = +31,5 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = M_{22'} = 15,75 \text{ kNm}$$

$$M_{34} = 18 \text{ kNm}$$

$$M_{43} = M_{44'} = 9 \text{ kNm}$$

$$M_{56} = 4,5 \text{ kNm}$$

$$M_{65} = M_{66'} = 2,25 \text{ kNm}$$

$$T_{12} = -7,875 \text{ kN}$$

$$T_{22'} = -5,25 \text{ kN}$$

$$T_{34} = -4,5 \text{ kN}$$

$$T_{44'} = -3 \text{ kN}$$

$$T_{56} = -1,125 \text{ kN}$$

$$T_{66'} = -0,75 \text{ kN}$$

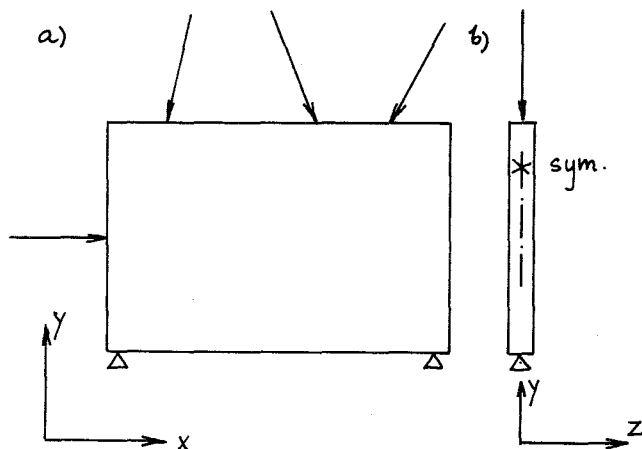
12. STĚNOVÉ KONSTRUKCE

12.1. Nosné stěny.

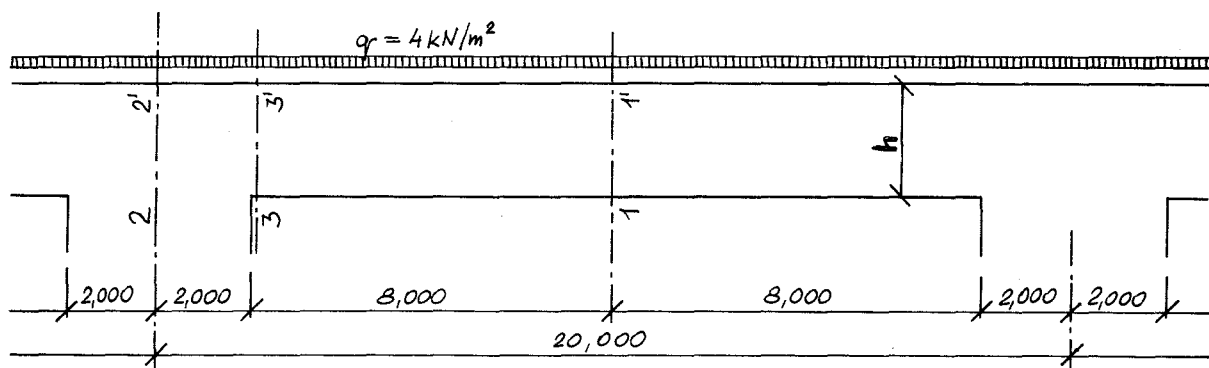
Nosná stěna je rovinný konstrukční prvek malé tloušťky, který je zatížen a současně podepřen ve své střednicové rovině (viz obr. 12.1/. Z obrázku 12.1b vidíme, že střednicová rovina stěnového prvku je současně rovinou symetrie tohoto prvku. Tangenciální napětí působící v rovině symetrie jsou vždy nulová a v bezprostředním okolí roviny symetrie se ve směru kolmém k rovině symetrie napjatost nemění. Mimo to musí být na bočních stranách nosné stěny normálové napětí kolmé k povrchu i tangenciální napětí na povrchu nulové. Protože v bezprostředním okolí roviny symetrie se ve směru kolmém k rovině symetrie napjatost nemění, můžeme předpokládat, že se po tloušťce stěny napjatost vůbec nemění; vzhledem k malé tloušťce stěny se tím nedopustíme žádné velké chyby. Napětí mající index

z , to je $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$, budou tedy v celé stěně nulová, a zbývající napětí, to je $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, budou funkcí pouze proměnných x, y .

Abychom se seznámili s charakterem průběhu napětí v nosné stěně, ukažme si, jak se mění průběh napětí v nekonečném stěnovém nosníku, který je ukázán na obrázku 12.2.



Obr. 12.1. Příklad nosné stěny.



Obr. 12.2. Nekonečný stěnový nosník.

Pro výšku $h=2,5$ m se napjatost téměř přesně shoduje s výsledky získanými podle technické pružnosti (viz kapitola 8/. Průběh normálových napětí σ_x v řezu 1-1' je lineární s maximálními hodnotami $\pm 62,24$ kPa (podle technické pružnosti 64 kPa), tangenciální napětí v řezu 3-3' se mění podle kvadratické paraboly s maximem 17,4 kPa (podle technické pružnosti 19,2 kPa). Je to způsobeno tím, že poměr rozpětí nosníku ku jeho výšce ($20/2,5=8$) je dost veliký a nosník je tedy mož-

no počítat jako prut.

Pro výšku $h=5$ m vychází průběh napětí σ_x v řezu 1-1' také ještě jako podle technické pružnosti (extrémy $\pm 16,1$ kPa oproti 16,0), ovšem průběh tangenciálních napětí v řezu 3-3' již nemá tvar kvadratické paraboly, ale maximum se posunuje dolů (extrém 8,2 kPa oproti 9,6).

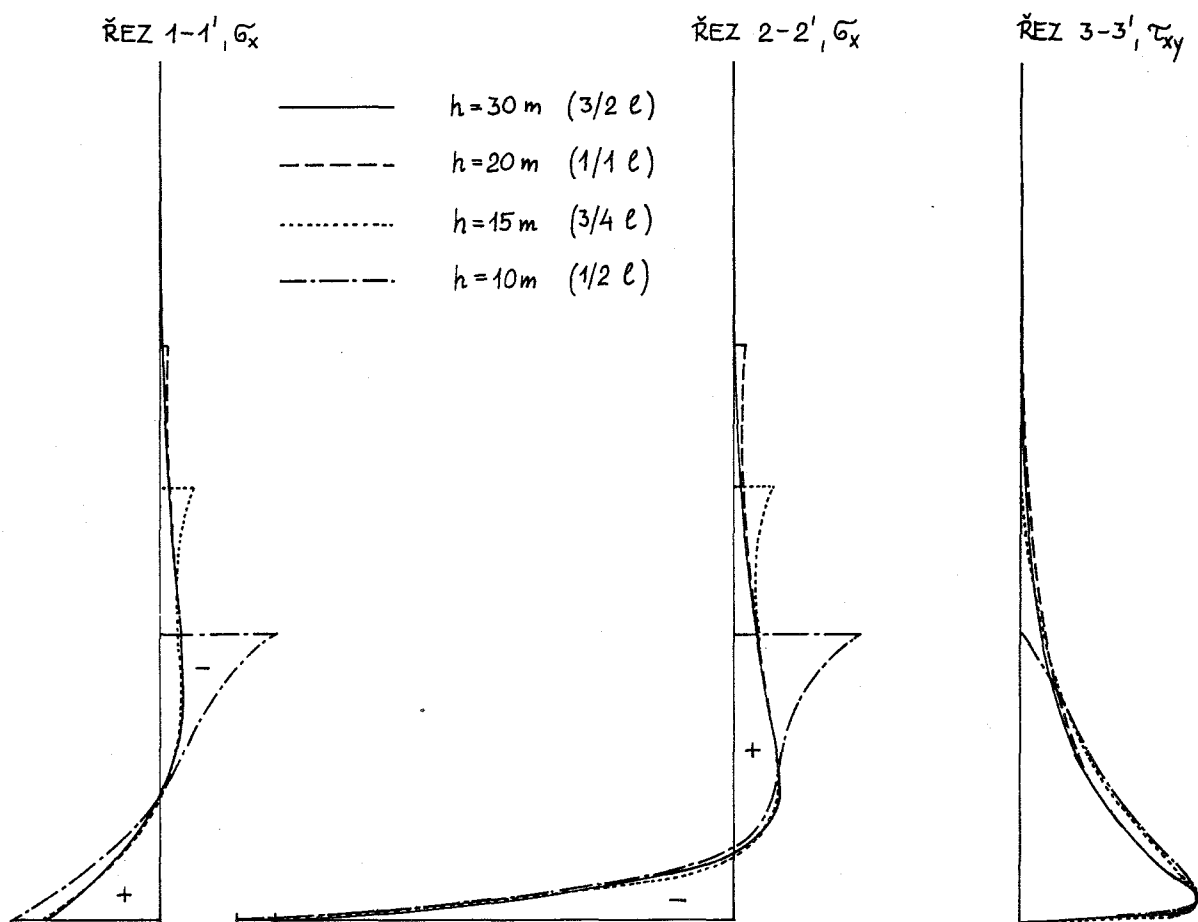
Při výšce nosníku $h=10$ m je již poměr rozpětí a výšky roven dvěma, takže zde již nemůžeme použít vzorců známých z technické pružnosti. Rozdělení vodorovných napětí v mezipodporovém průřezu již ztrácí charakter nosníku (lineární průběh) a začíná nabývat charakteru napětí ve stěnovém nosníku. Maximální hodnota normálového napětí σ_x v řezu 1-1' je 5,2 kPa, podle technické pružnosti bychom získali 4 kPa, což je přibližně o dvacet procent méně, tedy v neprospěch bezpečnosti. Také tlak nad podporou, který by podle technické pružnosti vycházel 8 kPa, je ve skutečnosti 17,2 kPa, tedy více než dvojnásobný. I smyk v líci podpory je ve skutečnosti 6,2 kPa, tedy podstatně větší než podle technické pružnosti, to je 4,8 kPa.

Zvětšíme-li výšku h na 15 m, tak ačkoliv ji zvětšíme o polovinu, neklesne napětí také podle toho, ale pouze o přibližně čtvrtinu, na 4,102 kPa (vodorovné napětí uprostřed rozpětí). Ostatní napětí se zmenší ještě podstatně méně. Začíná se při tomto poměru rozpětí a výšky stěnového nosníku již projevovat základní vlastnost stěnových nosníků, že totiž veškerá napjatost se obdívá pouze ve spodní části nosníku, a část nosníku poblíž horního okraje se na průběhu napětí nijak výrazně nepodílí.

Zvýšení nosníku o dalších pět metrů, to je pro $h=20$ m, se projeví poklesem tahu uprostřed rozpětí o pouhých 2,5 % a ostatní napětí se téměř nezmění. Je vidět, že materiál použitý na zvýšení nosníku není ze statického hlediska vynaložen účelně.

Mezi napjatostí při výšce nosníku $h=20$ m a $h=30$ m, to je při poměru mezi výškou stěnového nosníku a jeho rozpětím $h:l=1$ a poměrem $h:l=1,5$, nejsou téměř žádné rozdíly. Napjatost se liší pouze v okolí horního okraje stěnového nosníku, ovšem je tam v obou případech velmi malá a nemá tudíž žádný význam při dimenzování. O výpočtu podle zásad technické pružnosti se již vůbec nedá při tomto poměru hovořit. Podle zásad technické pružnosti bychom uprostřed rozpětí dostali v dolních vláknech tah velikosti 0,444 kPa, a ve skutečnosti bude tah velikosti 3,99 kPa, tedy téměř devítinásobný. Podle technické pružnosti je celá dolní polovina stěnového nosníku tažená, a zatím se tah vyskytuje pouze ve čtyřech metrech, tedy necelé osmině stěny. Obdobně v průřezu nad podporou bychom podle technické pružnosti dostali v dolních vláknech tlak velikosti 0,889 kPa, a zatím je zde tlak 16 kPa, tedy téměř dvacetinásobný. Podle technické pružnosti se tah vyskytuje v horní polovině stěny, a zatím jsou již vlákna ve výšce 3 m tažena, maximální tah velikosti 1,601 kPa je ve výšce okolo 5 m nad spodním okrajem stěnového nosníku. Ani rozdělení smykových napětí neodpovídá ani zdaleka kvadratické parabole podle technické pružnosti, smyk je ve skutečnosti soustředěn v dolní části podlíz okraje. Jeho velikost okolo 6 kPa je také podstatně větší než podle technické pružnosti (to je pouze 1,6 kPa), téměř čtyřnásobek. Mimo to by podle technické pružnosti byl smyk soustředěn hlavně ve středu nosníku, zatímco ve skutečnosti je horní polovina nosníku téměř nenapjatá.

Průběhy napětí ve zvolených řezech při různých poměrech výšky a rozpětí nosníku jsou vyneseny ve shodném měřítku na obrázku 12.3. Pro jinou šířku sloupů než pětina osově vzdálenosti budou průběhy napětí odlišné, ale charakter se nezmění.

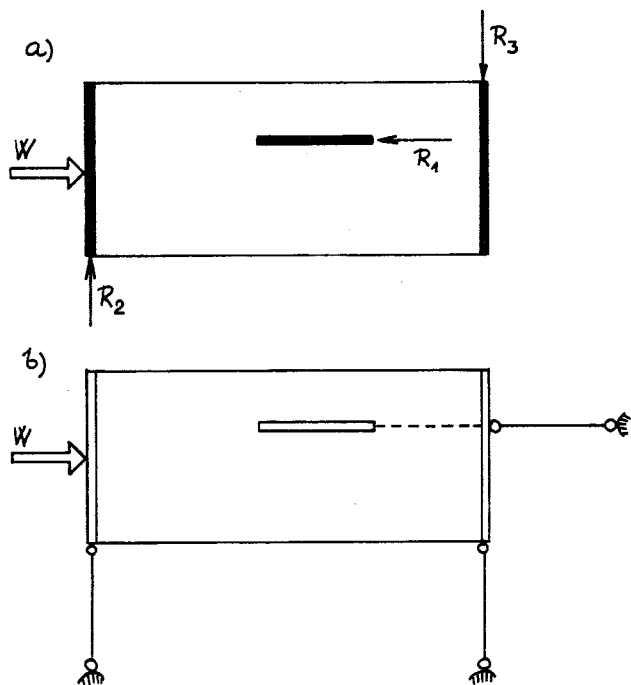


Obr. 12.3. Průběhy napětí při různých poměrech h/l .

12.2. Vodorovné ztužení výškových budov.

Nosný systém výškových budov bývá obvykle tvořen stropními deskami (monolitickými nebo zmonolitněnými) a svislými sloupy. Ovšem u výškových budov má značnou důležitost zatížení větrem, a toto vodorovné zatížení by sloupy nebyly schopny přenést. Je proto nutno do konstrukční soustavy umístit prvky, které mají při vodorovném zatížení velikou únosnost. Takovými prvky jsou stěny (tzv. zavětrovací stěny) nebo zalomené stěnové systémy, např. kolem schodišť, výtahových šachet, instalačních jader apod.

Vzhledem k průběžným stropním deskám je oprávněný předpoklad, že ve vodorovném směru je budova v úrovni každého podlaží nekonečně tuhá, takže zatížení větrem vzdoruje jako celek. Můžeme tedy stropní tabuli uvažovat jako tuhou desku, která je v místě zavětrovacích stěn a ostatních ztužujících prvků podepřena (obr. 12.4/). Protože zavětrovací stěny jsou schopny přenášet zatížení pouze ve své rovině (pro zatížení kolmé ke své střednicové rovině jsou měkké oproti kolmým stěnám), můžeme pro zjednodušené statické schéma nosnou stěnu nahradit kyvným prutem. Síla, kterou je nosná stěna zatížena, je potom dána reakcí v tomto kyvném prutu. Jak víme z elementární statiky, tuhá deska má v rovině tři stupně volnosti, musí být tedy podepřena nejméně třemi pruty, které se neprotínají v jednom



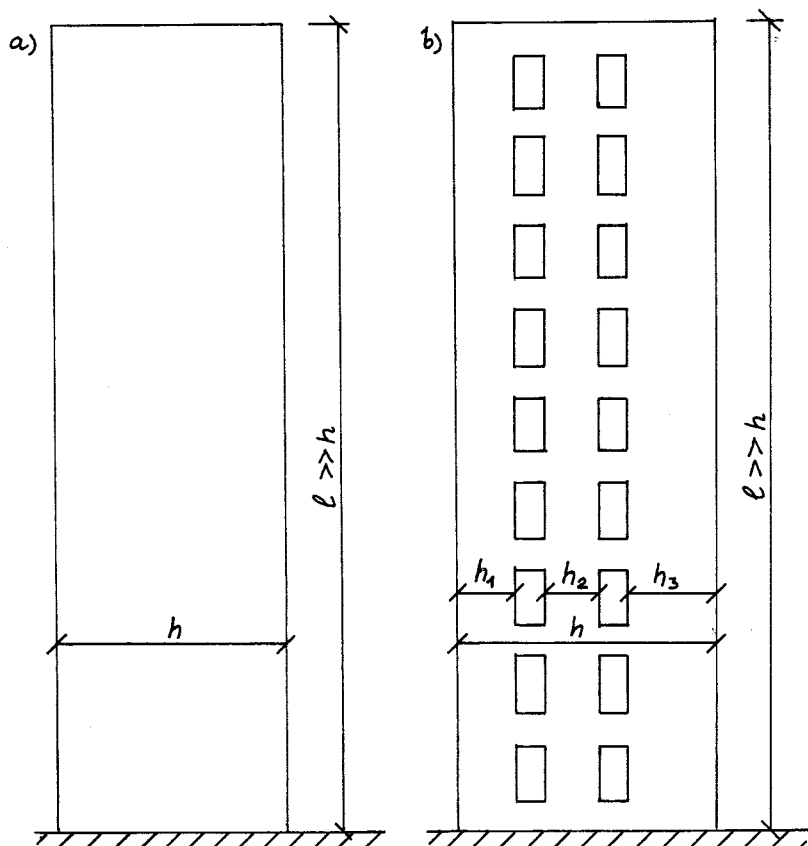
Obr. 12.4. Reakce od zatížení větrem a statické schéma.

bodů. Zrovna tak i výšková budova, která je ztužena samostatnými stěnami, musí být ztužena nejméně třemi těmito stěnami, jejichž roviny se neprotínají v jedné přímce (ani nejsou rovnoběžné).

Je-li budova ztužena třemi stěnami (obr. 12.4/, je to vlastně podepření staticky určité, reakce je možno stanovit přímo z podmínek rovnováhy a jsou nezávislé na ohybových tuhostech jednotlivých stěn. V případě, že budova je podepřena větším počtem stěn než třemi, je třeba náhradní pruty zavádět tak, aby jejich tuhost v tlaku (poměr EA/l) byla úměrná ohybové tuhosti nosných stěn, tedy síle, která způsobí jednotkový průhyb horního konce stěny.

Nejjednodušší situace je u stěny bez otvorů. Vzhledem k tomu, že výška stěny bývá u výškových budov několiknásobek jejího vodorovného rozměru, můžeme stěny uvažovat jako pruty, takže tu-

host je pak úměrná momentu setrvačnosti průřezu stěny, tedy výrazu $bh^3/12$ (obr. 12.5a/, kde b je tloušťka stěny.

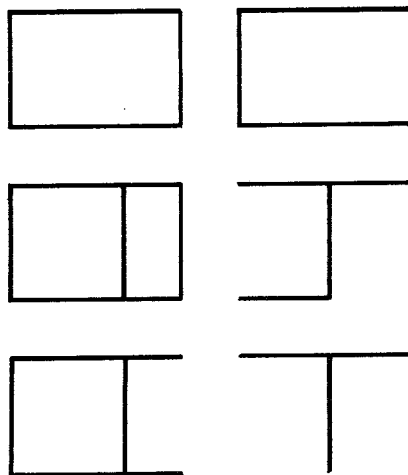


Obr. 12.5. Ztužující stěna bez otvorů a s otvory.

Nepoměrně složitější případ nastává, když je stěna oslabena jedním nebo několika sloupci velkých otvorů (dveřních nebo okenních) jako na obrázku 12.5b. Přesný výpočet ohybové tuhosti takovéto stěny je velmi složitý a provádí se dnes obvykle s pomocí číslicových počítačů. Proto se zde omezíme pouze na to, že si určíme, v jakých hranicích se tato ohybová tuhost pohybuje. Největší možná tuhost stěny na obráz-

ku **12.5b** by byla tehdy, kdyby překlady nad otvory byly nekonečně tuhé. Potom by se stěna chovala jako celek a ohybová tuhost by byla přímo úměrná momentu setrvačnosti celé stěny, tedy opět $bh^3/12$. Druhý krajní případ by nastal tehdy, kdyby překlady byly nekonečně měkké. Stěna by se pak chovala jako několik samostatných konzol navzájem propojených kyvnými pruty v úrovni překladů, a ohybová tuhost by byla úměrná součtu momentů setrvačnosti jednotlivých konzol. Tedy výrazu $bh_1^3/12 + bh_2^3/12 + bh_3^3/12 + \dots$. Skutečná ohybová tuhost stěny bude někde mezi těmito krajními hodnotami, podle tuhosti překladů.

Dalším typem ztužujících prvků jsou uzavřené průřezy, např. stěny výtahových šachet, instalační šachty apod, nebo navzájem se protínající stěny (tzv. otevřené průřezy), jako na příklad schodišťové stěny. Příklady otevřených i uzavřených průřezů jsou uvedeny na obrázku **12.6**. Tyto průřezy mají kromě své ohybové tuhosti i jistou tuhost v kroucení, zejména uzavřené průřezy. Výpočtem tuhosti v kroucení se nebudeme zabývat, výpočet je značně složitý a nabývá většího významu pouze u velkých průřezů. Omezíme se zde na tuhost ohybovou. Na rozdíl od stěn, které ztužují budovu pouze ve své rovině, mají uzavřené i otevřené průřezy ohybovou tuhost ve všech rovinách procházejících těžišťovou osou. Nahradíme je tedy dvěma navzájem kolmými kyvnými pruty, a tyto pruty umístíme do hlavních centrálních os setrvačnosti průřezu (připomeňme si, že osa souměrnosti je vždy současně jednou z hlavních centrálních os setrvačnosti). Tuhost náhradních prutů bude zřejmě dána hlavními centrálními momenty setrvačnosti průřezu.



Obr. **12.6**. Uzavřené a otevřené průřezy.

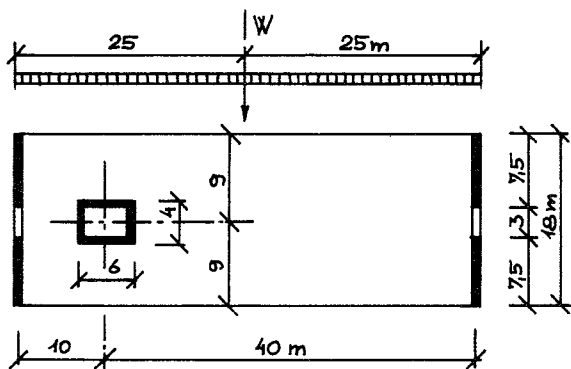
Když jsme si takto nahradili ztužující prvky pomocí kyvných prutů, přistoupíme k výpočtu sil v těchto prutech, což jsou současně i síly zatěžující jednotlivé ztužující prvky. Půdorys budovy při tomto výpočtu uvažujeme jako tuhou desku. Pokud kyvné pruty jsou pouze tři, výpočet je jednoduchý (staticky určité podpora), při větším počtu prutů řešíme osově síly v prutech jako ve staticky neurčitém případě tahu a tlaku (viz odstavec **8.2/**).

Reakcí v kyvném prutu (případně ve dvou prutech v uzavřených nebo otevřených průřezích) nyní zatížíme ztužující prvek, který při výpočtu uvažujeme jako konzolu na dolním okraji vetknutou. Zatížení větrem působí v úrovni všech nadzemních podlaží, a při výpočtu předpokládáme, že ve všech patrech se do jednotlivých ztužujících prvků rozděluje stejným poměrem.

Závěrem tohoto odstavce bych ještě jednou rád upozornil, že zde uvedený výpočet je pouze orientační a získané výsledky jsou přibližné. Mimo již dříve uvedených nepřesností ve výpočtu (stěny oslabené otvory, zanedbání tuhosti v kroucení) způsobuje nepřesnost výpočtu i to, že neuvažujeme s ohybovou tuhostí stropních desek. Pokud výška budovy není několiknásobek půdorysného rozměru stěny, přistupuje navíc i nepřesnost vyplývající z rozdílné deformace prutu a nosné stěny (účinek posouvajících sil, rozdělení napětí).

Příklad 12.2.1.

Jak se rozdělí zatížení příčným větrem na jednotlivé ztužující prvky výškové budovy uvedené na obrázku 12.7. Překlady ve štítových stěnách neuvažujte. Tloušťka všech stěn je 0,2 m.



Obr. 12.7. Ztužení výškové budovy.

Řešení : Budova je proti působení větru ztužena dvěma štítovými stěnama a vnitřním jádrem. Moment setrvačnosti každé štítové stěny, protože překlady uvažujeme nekonečně měkké, se rovná

$$J_1 = J_2 = 2 \cdot \frac{1}{12} 0,2 \cdot 7,5^3 = 14,0625 \text{ m}^4.$$

Moment setrvačnosti jádra v příčném směru je roven

$$J_3 = \frac{1}{12} 6 \cdot 4^3 - \frac{1}{12} 5,6 \cdot 3,6^3 = 10,2272 \text{ m}^4$$

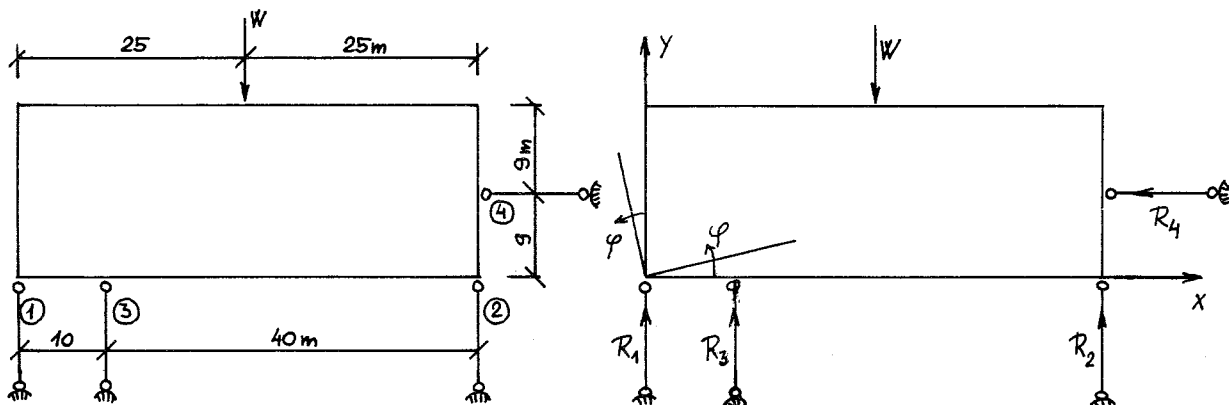
a v podélném směru

$$J_4 = \frac{1}{12} 4 \cdot 6^3 - \frac{1}{12} 3,6 \cdot 5,6^3 = 19,3152 \text{ m}^4.$$

Při nahrazování ztužujících prvků kyvnými pruty použijeme všechny pruty stejné délky a plochy prutů pak budou přímo úměrné momentům setrvačnosti, tedy

$$A_1 = A_2 = 14,0625 \text{ m}^2, \quad A_3 = 10,2272 \text{ m}^2, \quad A_4 = 19,3152 \text{ m}^2.$$

Náhradní soustava je uvedena na obrázku 12.8.



Obr. 12.8. Náhrada vodorovného ztužení a základní soustava.

Jedná se o soustavu jedenkrát staticky neurčitou. Označme síly v prutech jako R_1, R_2, R_3, R_4 . Mezi těmito silami musí platit tři statické podmínky rovnováhy, na příklad dvě směrové ve směrech os X, Y a momentová k průsečíku paprsků prutů 2 a 4. Dostáváme

$$\begin{aligned} R_4 &= 0 & R_1 + R_2 + R_3 - W &= 0 \\ -R_1 \cdot 50 - R_3 \cdot 40 + W \cdot 25 &= 0 \end{aligned}$$

Půdorys budovy se chová jako tuhá deska, která se posune ve směru osy X o vzdálenost Δx , ve směru osy Y o vzdálenost Δy a pootočí se okolo počátku souřadného systému o úhel $\Delta \varphi$. Při těchto přemístěních tuhé desky se jednotlivé pruty protáhnou o vzdálenosti rovné posunutím přípojovacího bodu prutu ve směru osy prutu (vzhledem k malým velikostem deformací můžeme položit $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$)

$$\Delta_1 = \Delta y$$

$$\Delta_2 = \Delta y + 50 \Delta \varphi$$

$$\Delta_3 = \Delta y + 10 \Delta \varphi$$

$$\Delta_4 = -\Delta x + 9 \Delta \varphi$$

Tato posunutí způsobí v prutech síly

$$R_i = \frac{E_i A_i \Delta_i}{l_i}$$

Protože E_i , l_i jsou ve všech prutech konstantní a ve výsledných rovnicích se vykrátí, můžeme je položit rovné jedné. Tak dostáváme závislosti

$$R_1 = A_1 \cdot \Delta y$$

$$R_2 = A_2 (\Delta y + 50 \Delta \varphi)$$

$$R_3 = A_3 (\Delta y + 10 \Delta \varphi)$$

$$R_4 = A_4 (-\Delta x + 9 \Delta \varphi)$$

Tyto rovnice spolu se třemi statickými podmínkami rovnováhy tvoří soustavu sedmi rovnic o sedmi neznámých R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , Δx , Δy , $\Delta \varphi$. Řešením dostáváme osově síly v prutech

$$R_1 = \frac{25 A_1 A_2 - 3 A_1 A_3}{50 A_1 A_2 + 2 A_1 A_3 + 32 A_2 A_3} W$$

$$R_2 = \frac{25 A_1 A_2 + 12 A_2 A_3}{50 A_1 A_2 + 2 A_1 A_3 + 32 A_2 A_3} W$$

$$R_3 = \frac{5 A_1 A_3 + 20 A_2 A_3}{50 A_1 A_2 + 2 A_1 A_3 + 32 A_2 A_3} W$$

$$R_4 = 0$$

a po dosazení číselných hodnot ploch získáme

$$R_1 = 0,3054 W$$

$$R_2 = 0,4513 W$$

$$R_3 = 0,2433 W$$

$$R_4 = 0$$

Z číselných výsledků řešení vyplývá, že při uvažování velmi měkkých překladů ve stěnách přebírá levá štítová stěna 30,54 % zatížení větrem, pravá štítová stěna 45,13 % a jádro 24,33 % zatížení.

Příklad 12.2.2.

Jak se rozdělí zatížení příčným větrem na jednotlivé ztužující prvky výškové budovy z příkladu 12.2.1 za předpokladu, že překlady ve štítových stěnách jsou nekonečně tuhé.

Řešení: Momenty setrvačnosti jádra se nemění, momenty setrvačnosti štítových stěn jsou při tuhých překladech

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{12} 0,2 \cdot 18^3 = 97,2 \text{ m}^4$$

Další postup je stejný jako v příkladu 12.2.1. Dosadíme-li nyní do výrazů pro R_i hodnoty $A_1 = A_2 = 97,2 \text{ m}^2$, $A_3 = 10,2272 \text{ m}^2$, $A_4 = 19,3152 \text{ m}^2$, dostáváme

$$R_1 = 0,4607 W$$

$$R_2 = 0,4902 W$$

$$R_3 = 0,0491 W$$

$$R_4 = 0$$

Oproti příkladu s nulovou tuhostí překladů přebírají nyní štítové stěny větší část příčného větru. Levá štítová stěna přebírá nyní 46,07 % zatížení příčným větrem, to je o polovinu více než při nulové tuhosti překladů, pravá štítová stěna přebírá 49,02 % tlaku, tedy téměř celou polovinu větru. Jádro přebírá nyní pouze 4,91 % příčného větru.

Výsledky příkladů 12.2.1 a 12.2.2 jsou krajními hodnotami zatížení jednotlivých ztužujících prvků, skutečné rozdělení příčného větru bude mezi těmito hraničními hodnotami v závislosti na skutečné tuhosti překladů.

Podélný vítr přebírá vždy celý pouze jádro, a protože je umístěno na podélné ose symetrie, nebudou při podélném větru štítové stěny zatíženy, bude tedy při podélném větru velikosti W'

$$R_1 = R_2 = R_3 = 0$$

$$R_4 = W'$$

13. STROPNÍ KONSTRUKCE

Plošnými konstrukcemi označujeme takové stavební prvky, jejichž tloušťka je oproti ostatním rozměrům velmi malá. Plochu, která je proložena uprostřed mezi omezujícími povrchy, nazýváme střednicová plocha. Plošné konstrukce mohou být tvarovány se střednicovou plochou rovinnou nebo zakřivenou. Plošné konstrukce se zakřivenou střednicovou plochou nazýváme skořepinami, plošné konstrukce s rovinnou střednicovou plochou jsou podle zatížení nosné stěny nebo nosné desky.

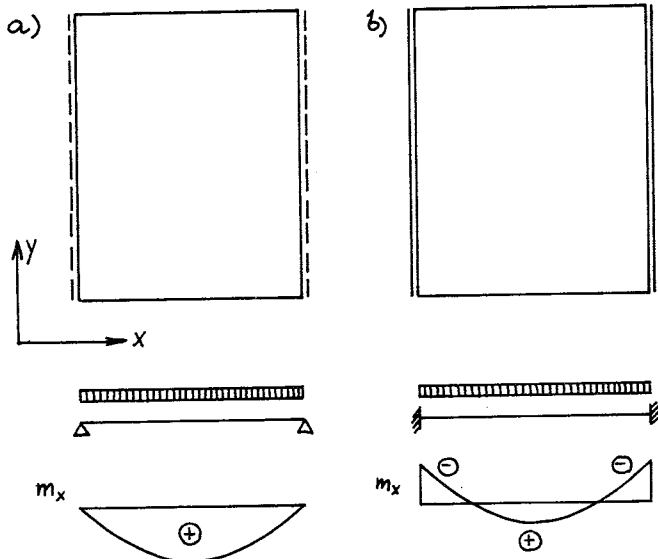
Nosné stěny jsou takové plošné konstrukce s rovinnou střednicovou plochou, které jsou zatíženy silami, jejichž paprsky leží vesměs ve střednicové ploše stěny, naproti tomu nosné desky jsou zatíženy kolmo ke své střednicové ploše. Je třeba zdůraznit, že statické rozlišování na nosné stěny a desky nemusí být zcela totožné s označováním stavebních prvků jako stěna a deska. Nosná stěna nemusí být vždy vertikální prvek a nosná deska horizontální. Na příklad okenní tabule zatížená tlakem větru se chová jako nosná deska, naproti tomu stropní tabule (nazývaná běžně stropní deska) se při vodorovném zatížení (větrem, tlakem zeminy apod.) chová jako nosná stěna. Ovšem při nejčastějším způsobu zatížení stavebních konstrukcí, při zatížení svislém, se běžné stavební názvosloví kryje se statickým. Stropní deska svisle zatížená se vyšetřuje jako nosná deska a zavětrovací stěna zatížená svisle (i vodorovně ve své střednicové rovině) se vyšetřuje jako nosná stěna.

13.1. Nosné desky.

Jak bylo řečeno výše, jako nosná deska označujeme takovou rovinnou konstrukci (o malé tloušťce), která je zatížena kolmo ke své střednicové rovině. Vnitřní síly (ohybové a kroutící momenty, posouvající síly) uvažujeme v nosných deskách na 1 m šířky desky a označujeme je malým písmenem. Nazýváme je měrné momenty a měrné posouvající síly. Měrný ohybový moment je nutno dále označit indexem, aby se od sebe odlišily momenty působící v různých směrech. Užívání indexů se v literatuře různí. V těchto skriptech bude index u ohybového momentu i posouvající síly důsledně označovat rovinu, v níž tento moment (posouvající síla) působí. Osa kolmá ke střednicové rovině desky je z , takže měrný ohybový moment m_x znamená měrný ohybový moment, který působí v rovině xz , tedy otáčí kolem osy y atd. Jednotkou měrného momentu je $\text{Nm/m}'$, příp. $\text{kNm/m}'$ nebo $\text{MNm/m}'$. Měrný kroutící moment působící v rovinách xz a yz je v důsledku zákona o vzájemnosti tangenciálních napětí stejný a označujeme jej m_{xy} . Jednotky jsou stejné jako u měrných ohybových momentů.

Přesné řešení nosných desek je ve většině případů relativně obtížné a vede k nutnosti řešit parciální diferenciální rovnici čtvrtého řádu (v jednodušším případě tzv. tenkých desek). Případní zájemci o tuto ohybovou teorii tenkých desek se s ní mohou seznámit v různé odborné literatuře, např. /7/. Zde se omezíme na zjednodušené řešení nosných desek u takových případů, které se ve stavební praxi nejčastěji vyskytují.

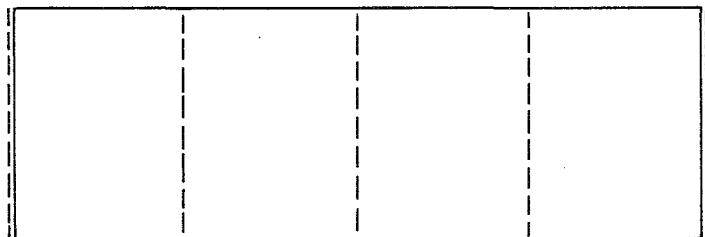
Nejjednodušším případem ze statického hlediska, i když ne nejvhodnějším, je obdélníková deska podepřená podél dvou rovnoběžných stran (obr. 13.1/. Takováto deska se podle způsobu podepření řeší jako prostý nosník nebo nosník vetknutý,



Obr.13.1. Deska podepřená podél rovnoběžných stran.

měrné ohybové momenty m_x jsou tedy rovny $+ql^2/8$, resp. $-ql^2/12$ a $+ql^2/24$. Měrné ohybové momenty m_y a měrné kroutící momenty m_{xy} jsou nulové. Protože ohybové momenty jsou úměrné čtverci vzdálenosti podpor, je výhodnější, pokud tomu nebrání jiné důvody, podepřít desku podél delších stran (na kratší rozpětí); zmenšíme tím rozpětí, čímž zmenšíme i měrné ohybové momenty, což má za následek zmenšení nutné tloušťky desky a tedy zpětně i zatížení desky. Dosáhneme tak značných úspor materiálu.

Jestliže obdélníková deska je podepřena větším počtem navzájem rovnoběžných podpor, vzniká tak deska spojitá /obr.13.2/, na níž měrné ohybové momenty řešíme jako na spojitém nosníku. Je



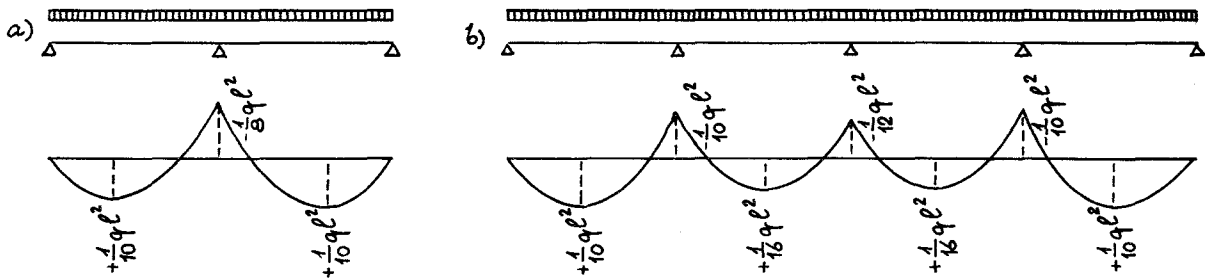
Obr.13.2. Deska jako spojitý nosník.

třeba upozornit na to, že nahodilé zatížení je nutno uvažovat v nejnepříznivější kombinaci, tak jak je uvedeno v odstavci "Rámové výseky pro zatížení svislé". Zatížení spojitého nosníku nahodilým zatížením ob jedno pole má význam zejména u ohybových momentů mezipodporových, protože zatížení sousedních polí mezipodporový moment zmenšuje.

Při přibližném řešení spojitých desek je možno uvažovat tyto hodnoty ohybových momentů :

- a) mezipodporový ohybový moment
 - v krajním poli $+ql^2/10$
 - ve vnitřních polích $+ql^2/16$
- b) podporový ohybový moment, jsou-li jen dvě pole $-ql^2/8$
- c) podporový ohybový moment při větším počtu polí
 - nad první vnitřní podporou $-ql^2/10$
 - nad ostatními vnitřními podporemi $-ql^2/12$

Nejsou-li pole spojitě desky stejně dlouhá, dosazuje se při výpočtu podporových ohybových momentů do vzorců za l aritmetický průměr rozpětí obou přilehlých polí. Tyto přibližné hodnoty ohybových momentů jsou schematicky uvedeny na obrázku 13.3.



Obr. 13.3. Přibližné průběhy ohybových momentů spojitě desky.

Značného zmenšení měrných ohybových momentů můžeme dosáhnout tím, že desku podepřeme podél celého obvodu. Ovšem je nutno uvést, že podepření celého obvodu má význam pouze u desek čtvercových nebo s obrysem blízkým čtvercovému. U obdélníkových je třeba, aby délka delší strany byla maximálně rovna dvojnásobku délky kratší strany. Desky s větším poměrem stran počítáme jako podepřené pouze podél delších stran (neboli na kratší rozpětí). Přibližně můžeme měrné ohybové momenty na desce čtvercové nebo obdélníkové blízké čtvercové počítat tak, že desku nahradíme dvěma navzájem kolnými soustavami nosníků s rozpětím rovným délkám stran desky a s týmž podepřením jako deska původní. Zatížení se na obě soustavy nosníků rozloží tak, aby střed desky měl v obou soustavách stejný průhyb. Připomínám ještě, že průhyb středu prostého nosníku zatíženého plným rovnoměrným zatížením je roven $5ql^4/384EI$, nosníku oboustranně vetknutého je $ql^4/384EI$ a nosníku na jedné straně prostě podepřené a na druhé vetknutého je $2ql^4/384EI$. Protože obě soustavy nosníků počítáme o stejné šířce, je člen $384EI$ u obou soustav stejný a ve vzorcích pro rozdělení zatížení se vykrátí. Jednoduchým výpočtem zjistíme, že u desky v obou směrech stejně podepřené, tedy podél celého obvodu prostě podepřené, podél celého obvodu vetknuté nebo podél dvou kolných stran vetknuté a podél zbyvajících dvou prostě podepřené, se zatížení do proužků ve směru x a y rozloží

$$q_x = q \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4}, \quad q_y = q \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4}.$$

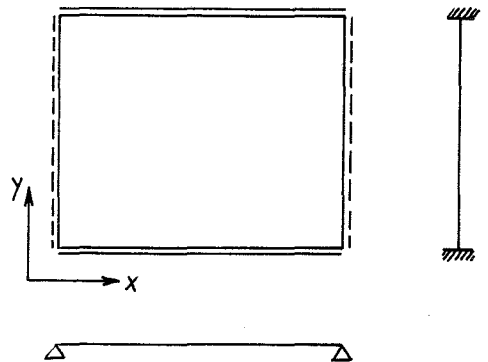
V těchto vzorcích značí q zatížení desky, l_x je rozpětí ve směru x a l_y je rozpětí ve směru y , q_x je část zatížení připadající na směr x a q_y je část zatížení připadající na směr y . Obdobně zjistíme, že u desky, jejíž strany rovnoběžné s osou y jsou prostě podepřené a strany rovnoběžné s osou x jsou vetknuté (viz obr.13.4/, se zatížení na základě podmínky

$$\frac{5q_x l_x^4}{384EI} = \frac{q_y l_y^4}{384EI}, \quad q_y = q - q_x$$

rozdělí takto :

$$q_x = q \frac{l_y^4}{5l_x^4 + l_y^4}, \quad q_y = q \frac{5l_x^4}{5l_x^4 + l_y^4}.$$

Jestliže proužek rovnoběžný s osou x je prostě podepřené, potom měrný ohybový mo-



Obr. 13.4. Deska ve směru x prostě podepřená a ve směru y vetknutá.

ment uprostřed rozpětí vypočteme jako na prostém nosníku ze vztahu

$$m_x = + \frac{1}{8} q_x l_x^2,$$

kam za q_x dosadíme příčinný díl zatížení q . U proužku oboustranně vetknuté-
ho je měrný ohybový moment ve vetknutí roven

$$m_x = - \frac{1}{12} q_x l_x^2$$

a uprostřed rozpětí

$$m_x = + \frac{1}{24} q_x l_x^2.$$

Je-li proužek na jedné straně vetknut a na druhé prostě podepřen, potom měrný o-
hybový moment ve vetknutí je roven

$$m_x = - \frac{1}{8} q_x l_x^2$$

a uvnitř pole (přibližně uprostřed rozpětí) je

$$m_x = + \frac{9}{128} q_x l_x^2 \doteq + \frac{1}{14} q_x l_x^2.$$

Rozklad zatížení a měrné ohybové momenty mezipodporové i podporové jsou pro růz-
né případy podepření desky přehledně uvedeny v tabulce 13.1.

Podepření		zatížení		měrný ohybový moment			
		q_x	q_y	m_x		m_y	
				mezipodp.	podp.	mezipodp.	podp.
		$q \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4}$	$q \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4}$	$\frac{1}{8} q l_x^2 \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4}$		$\frac{1}{8} q l_y^2 \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4}$	
		$q \frac{5l_y^4}{2l_x^4 + 5l_y^4}$	$q \frac{2l_x^4}{2l_x^4 + 5l_y^4}$	$\frac{1}{14} q l_x^2 \frac{5l_y^4}{2l_x^4 + 5l_y^4}$	$-\frac{1}{8} q l_x^2 \frac{5l_y^4}{2l_x^4 + 5l_y^4}$	$\frac{1}{8} q l_y^2 \frac{2l_x^4}{2l_x^4 + 5l_y^4}$	
		$q \frac{5l_y^4}{l_x^4 + 5l_y^4}$	$q \frac{l_x^4}{l_x^4 + 5l_y^4}$	$\frac{1}{24} q l_x^2 \frac{5l_y^4}{l_x^4 + 5l_y^4}$	$-\frac{1}{12} q l_x^2 \frac{5l_y^4}{l_x^4 + 5l_y^4}$	$\frac{1}{8} q l_y^2 \frac{l_x^4}{l_x^4 + 5l_y^4}$	
		$q \frac{2l_y^4}{5l_x^4 + 2l_y^4}$	$q \frac{5l_x^4}{5l_x^4 + 2l_y^4}$	$\frac{1}{8} q l_x^2 \frac{2l_y^4}{5l_x^4 + 2l_y^4}$		$\frac{1}{14} q l_y^2 \frac{5l_x^4}{5l_x^4 + 2l_y^4}$	$-\frac{1}{8} q l_y^4 \frac{5l_x^4}{5l_x^4 + 2l_y^4}$
		$q \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4}$	$q \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4}$	$\frac{1}{14} q l_x^2 \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4}$	$-\frac{1}{8} q l_x^2 \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4}$	$\frac{1}{14} q l_y^2 \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4}$	$-\frac{1}{8} q l_y^4 \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4}$
		$q \frac{2l_y^4}{l_x^4 + 2l_y^4}$	$q \frac{l_x^4}{l_x^4 + 2l_y^4}$	$\frac{1}{24} q l_x^2 \frac{2l_y^4}{l_x^4 + 2l_y^4}$	$-\frac{1}{12} q l_x^2 \frac{2l_y^4}{l_x^4 + 2l_y^4}$	$\frac{1}{14} q l_y^2 \frac{l_x^4}{l_x^4 + 2l_y^4}$	$-\frac{1}{8} q l_y^4 \frac{l_x^4}{l_x^4 + 2l_y^4}$
		$q \frac{l_y^4}{5l_x^4 + l_y^4}$	$q \frac{5l_x^4}{5l_x^4 + l_y^4}$	$\frac{1}{8} q l_x^2 \frac{l_y^4}{5l_x^4 + l_y^4}$		$\frac{1}{24} q l_y^2 \frac{5l_x^4}{5l_x^4 + l_y^4}$	$-\frac{1}{12} q l_y^4 \frac{5l_x^4}{5l_x^4 + l_y^4}$
		$q \frac{l_y^4}{2l_x^4 + l_y^4}$	$q \frac{2l_x^4}{2l_x^4 + l_y^4}$	$\frac{1}{14} q l_x^2 \frac{l_y^4}{2l_x^4 + l_y^4}$	$-\frac{1}{8} q l_x^2 \frac{l_y^4}{2l_x^4 + l_y^4}$	$\frac{1}{24} q l_y^2 \frac{2l_x^4}{2l_x^4 + l_y^4}$	$-\frac{1}{12} q l_y^4 \frac{2l_x^4}{2l_x^4 + l_y^4}$
		$q \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4}$	$q \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4}$	$\frac{1}{24} q l_x^2 \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4}$	$-\frac{1}{12} q l_x^2 \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4}$	$\frac{1}{24} q l_y^2 \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4}$	$-\frac{1}{12} q l_y^4 \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4}$

Tab.13.1. Rozklad zatížení a měrné ohybové momenty na obdélníkové desce.

Pro čtvercovou desku platí $l_x = l_y = l$. Pro tento zvláštní případ obdélníka jsou rozklad zatížení a měrné ohybové momenty uvedeny v tabulce 13.2.

podpěření	zatížení		měrný ohybový moment			
	q_x	q_y	m_x		m_y	
			mezipodp.	podp.	mezipodp.	podp.
			$\frac{1}{16} q l^2$		$\frac{1}{16} q l^2$	
			$\frac{1}{19,6} q l^2$	$-\frac{1}{11,2} q l^2$	$\frac{1}{28} q l^2$	
			$\frac{1}{28,8} q l^2$	$-\frac{1}{14,4} q l^2$	$\frac{1}{48} q l^2$	
			$\frac{1}{28} q l^2$		$\frac{1}{19,6} q l^2$	$-\frac{1}{11,2} q l^2$
			$\frac{1}{28} q l^2$	$-\frac{1}{16} q l^2$	$\frac{1}{28} q l^2$	$-\frac{1}{16} q l^2$
			$\frac{1}{36} q l^2$	$-\frac{1}{18} q l^2$	$\frac{1}{42} q l^2$	$-\frac{1}{24} q l^2$
			$\frac{1}{48} q l^2$		$\frac{1}{28,8} q l^2$	$-\frac{1}{14,4} q l^2$
			$\frac{1}{42} q l^2$	$-\frac{1}{24} q l^2$	$\frac{1}{36} q l^2$	$-\frac{1}{18} q l^2$
			$\frac{1}{48} q l^2$	$-\frac{1}{24} q l^2$	$\frac{1}{48} q l^2$	$-\frac{1}{24} q l^2$

Tab.13.2. Rozklad zatížení a měrné ohybové momenty na čtvercové desce.

Hodnoty měrných ohybových momentů uvedené v tabulkách 13.1 a 13.2 musíme uvažovat za předpokladu, že na desce není nijak zabráněno nadzvedávání rohů. Pokud vhodnou stavební úpravou tomuto nadzvedávání rohů desky zabráníme, vzniknou v desce také kroutící momenty a velikost ohybových momentů se podstatně zmenší. Označíme-li jako α součinitel

$$\alpha = \frac{5}{6} \frac{1}{\left(\frac{l_x}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{l_y}{l_x}\right)^2}$$

potom můžeme podle Marcuse ohybový moment uprostřed desky prostě podepřené zmenšit vynásobením součinitelem $(1 - \alpha)$, u desky po obvodě částečně vetknuté součinitelem $(1 - 2\alpha/3)$ a u desky po obvodě vetknuté součinitelem $(1 - \alpha/3)$. Na příklad u čtvercové desky po celém obvodě prostě podepřené se ohybové momenty takto zmenšují z hodnoty $ql^2/16$ na cca $ql^2/27,4$.

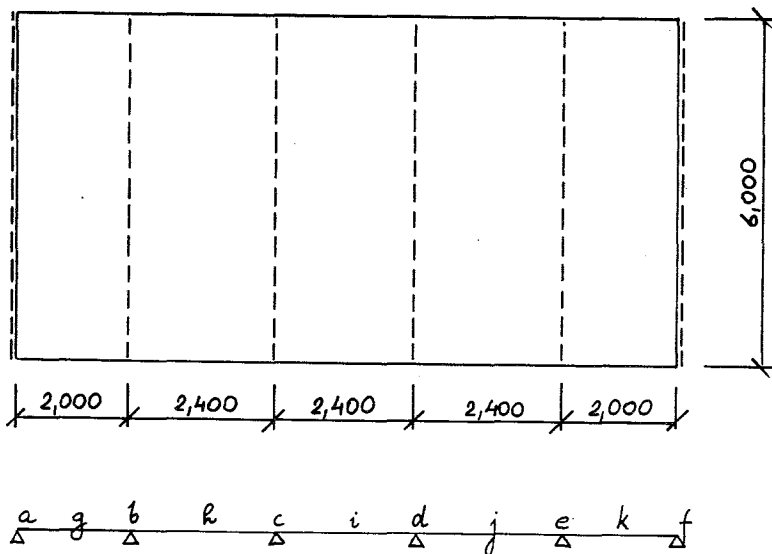
Příklad 13.1.1.

Určete přibližné hodnoty měrných ohybových momentů na spojitě desce uvedené na obrázku 13.5. Deska je obtížena rovnoměrným zatížením intenzity $q = 4 \text{ kN/m}^2$.

Řešení: Označme průřezy nad podporami a až f a mezipodporové průřezy g až k (viz obr. 13.5). Podporové měrné ohybové momenty vypočtené podle přibližných vzorců jsou

$$m_a = m_f = 0,$$

$$m_b = m_e = -\frac{1}{10} 4 \left(\frac{2,0 + 2,4}{2}\right)^2 = -1,936 \text{ kNm/m}^2,$$

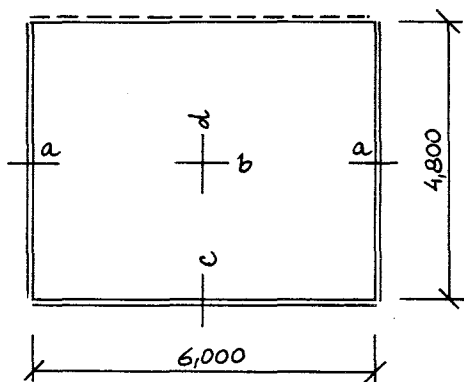


Obr. 13.5. Spojitá deska.

$m_g = m_k = 1,141 \text{ kNm/m'}$, $m_h = m_j = 0,945 \text{ kNm/m'}$, $m_i = 0,968 \text{ kNm/m'}$,
 takže vidíme, že chyba způsobená přibližností výpočtu nepřesahuje u podporových ohybových momentů 1,1 %. Rezerva u mezipodporových momentů je proto, protože nejsou uvažovány nejneprůzračnější kombinace užitečného zatížení.

Příklad 13.1.2.

Určete hodnoty největších podporových a mezipodporových měrných ohybových momentů na desce podél tří stran vetknuté a podél čtvrté strany kloubově podepřené /obr.13.6/. Deska je zatížena rovnoměrným zatížením intenzity $q = 6 \text{ kN/m}^2$. Nadzvedávání rohů je zabráněno.



Obr.13.6. Deska podepřená podél celého obvodu.

Řešení : Hodnoty měrných ohybových momentů určíme pomocí šestého řádku tabulky 13.1. Po dosazení $q = 6 \text{ kN/m}^2$, $l_x = 6,0 \text{ m}$ a $l_y = 4,8 \text{ m}$ dostáváme :

$$\begin{aligned}
 m_a &= -\frac{1}{12} \cdot 6 \cdot 6^2 \cdot \frac{2 \cdot 4,8^4}{6^4 + 2 \cdot 4,8^4} = -8,106 \text{ kNm/m' } \\
 m_b &= \frac{1}{24} \cdot 6 \cdot 6^2 \cdot \frac{2 \cdot 4,8^4}{6^4 + 2 \cdot 4,8^4} = 4,053 \text{ kNm/m' } \\
 m_c &= -\frac{1}{8} \cdot 6 \cdot 4,8^2 \cdot \frac{6^4}{6^4 + 2 \cdot 4,8^4} = -9,499 \text{ kNm/m' } \\
 m_d &= \frac{1}{14} \cdot 6 \cdot 4,8^2 \cdot \frac{6^4}{6^4 + 2 \cdot 4,8^4} = 5,428 \text{ kNm/m' }
 \end{aligned}$$

Na desce je zabráněno nadzvedávání rohů, stanovíme tedy velikost Marcusova součinitele

$$\alpha = \frac{\frac{5}{6}}{\left(\frac{6,0}{4,8}\right)^2 + \left(\frac{4,8}{6,0}\right)^2} = 0,378.$$

Na desce kloubově podepřené by se merné mezipodporové momenty krátily vynásobením $(1 - \alpha) = (1 - 3\alpha/3)$, na desce vetknuté vynásobením $(1 - \alpha/3)$.

Protože zde jsou tři strany vetknuté a jedna podepřená kloubově, použijeme násobení členem

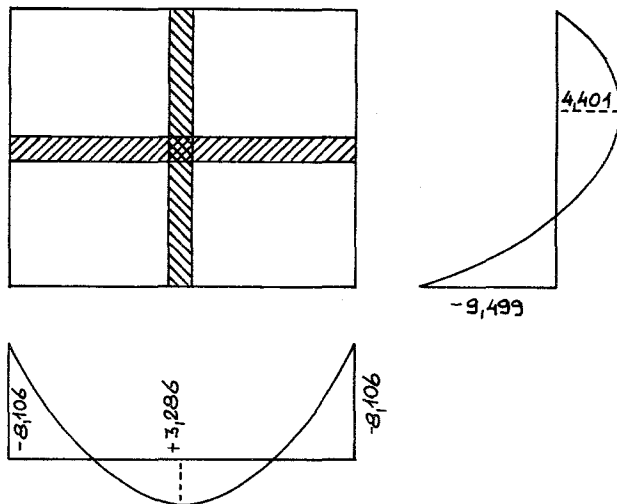
$$(1 - 1,5 \frac{h}{3})$$

Mezipodporové měrné ohybové momenty budou tedy mít opravenou velikost

$$m_b^* = 4,053 \left(1 - \frac{1,5 \cdot 0,378}{3}\right) = 3,286 \text{ kNm/m}$$

$$m_d^* = 5,428 \left(1 - \frac{1,5 \cdot 0,378}{3}\right) = 4,401 \text{ kNm/m}$$

Průběhy měrných ohybových momentů ve středních pásech desky jsou uvedeny na obrázku 13.7.



Obr. 13.7. Měrné ohybové momenty na desce.

13.2. Roštové konstrukce.

Pojmem rošty označujeme systém navzájem kolmých (někdy též šikmých) prímých nosníků prostých nebo vetknutých. Nosníky roštu jsou tedy umístěny všechny v jedné rovině a zatížení je k této rovině kolmé. Nejčastějším případem roštů jsou stropní konstrukce nad čtvercovým nebo obdélníkovým půdorysem, zatížení je svislé (vlastní tíha, tíha konstrukce podlahy, užitné zatížení ...). Mohou být ovšem také rošty ve svislé rovině, např. obvodové stěny budov, zatížené tlakem větru nebo zeminy.

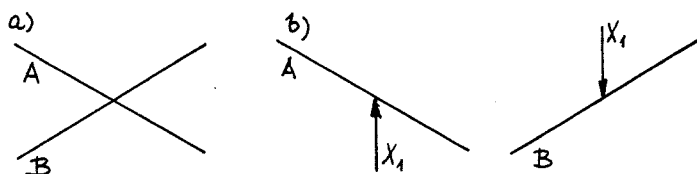
Rošty jsou tedy staticky prostorové soustavy. Nalézají se sice v jedné rovině, ale zatížení je k této rovině kolmé. Pokud zatížení je šikmé, můžeme je rozložit na složku kolmou k rovině a na složku v rovině konstrukce. Na zatížení v rovině reaguje konstrukce jako rovinný rám, na zatížení kolmé k rovině jako rošt. Oba účinky vyšetřujeme odděleně a získaná napětí superponujeme.

Jak již bylo řečeno, rošty obvykle sestavujeme nad čtvercovým nebo obdélníkovým půdorysem. Aby ovšem mělo význam soustavu nosníků uvažovat jako rošt, je třeba, aby kolmé nosníky byly řádově stejných průřezů a aby poměr stran obdélníkového půdorysu nebyl větší než 2 : 1. Jinak uvažujeme nosníky na kratší rozpětí jako nosné, které podpírají nosníky na delší rozpětí. Při řešení potom uvažujeme tyto delší nosníky jako spojité, podpírané na okrajích a kratšími nosníky; reakcemi pak zatěžujeme kratší nosníky (průvlaky).

Roštové konstrukce vyšetřujeme dvojím způsobem: buďto neuvažujeme, že v nosnících kroucení vzniká a má vliv na velikost vnitřních sil, nebo s tímto kroucením počítáme. Kterou z variant pro řešení zvolíme, to záleží na mnoha okolnostech. Nejdůležitější je konstrukční detail křížení nosníků, zejména jedná-li se o rošty kovové; jde o to, zda v místě křížení mají oba nosníky pouze společný průhyb, nebo zda pootočení jednoho nosníku vyvolá kroucení druhého nosníku. Druhou důležitou okolností je to, zda nosníky mají dostatečnou tuhost v kroucení: u ocelových nosníků mají mnohem větší tuhost v kroucení uzavřené průřezy než otevřené (otevřené průřezy mají tuhost v kroucení téměř nulovou a kroucení u nich tedy zanedbáváme), u železobetonových nosníků je tuhost v kroucení tím větší, čím více se průřez blíží čtvercovému, navíc je třeba na kroucení konstruovat i výztuž

nosníku. Je samozřejmé, že výpočet s vyloučením vlivu kroutících momentů je mnohem jednodušší, kratší a přehlednější, ovšem uvažování kroutících momentů vede k přesnějším výsledkům.

V těchto skriptech se budeme zabývat pouze řešením roštů bez uvažování vlivu kroutících momentů na tuhost konstrukce. Předpokládáme zde, že nosníky nejsou navzájem tuze spojeny, že mají pouze v místě styku společný průhyb. Při řešení



Obr. 13.8. Křížení prutů roštu a základní soustava.

roštů bez uvažování kroucení volíme za základní soustavu izolované přímé nosníky. Uvažujme na příklad křížení dvou prutů A, B (obr. 13.8a). Předpokládejme, že nosník A je podpírán nosníkem B. Je zřejmé, že síla, kterou je nosník A nadlehčován, je stejná jako síla, která nosník B zatěžuje. Jako neznámou veličinu X_1 zavedeme tedy sílu, která na nosník A v místě křížení působí vzhůru a na nosník B v místě křížení působí dolů (pokud by ve skutečnosti byl nosník B podpírán nosníkem A, bude výsledná síla X_1 záporná). Musíme tedy jako neznámou veličinu v místě křížení prutů zavést vždy dvě stejné síly, které jsou navzájem v rovnováze. Je to důsledek toho, že síla v místě křížení je vnitřní síla. Neznámou X_1 potom určíme z podmínky společného průhybu nosníků A, B v místě křížení.

Postupujeme při tom tak, že vypočteme průhyby obou nosníků v závislosti na X_1 . Označme průhyb nosníku A z obrázku 13.8b v místě křížení, který způsobuje pouze vnější zatížení nosníku A, jako $w_{A,p}$, obdobně na nosníku B jako $w_{B,p}$. Označme dále průhyb nosníku A v místě křížení způsobený silou $X_1 = 1$ působící dolů jako $w_{A,1}$ a na nosníku B jako $w_{B,1}$. Podmínka stejného průhybu v místě křížení pro X_1 různou od jedné pak zní (obr. 13.8b/

$$w_{A,p} - w_{A,1} X_1 = w_{B,p} + w_{B,1} X_1$$

$$X_1 = \frac{w_{A,p} - w_{B,p}}{w_{A,1} + w_{B,1}}$$

Pokud se v roštu kříží více prutů, dostáváme k vyřešení soustavu lineárních rovnic pro X_1 .

Při větším počtu křížení se tento způsob řešení roštů jeví značně nevýhodný. Ovšem při značně velkém množství trámů roštu v obou směrech je možno řešení zjednodušit tím, že využijeme vztahů pro křížový ohyb desek, odvozených v odstavci 13.1. Pokud by obě soustavy roštů měly odlišný průřez, bylo by třeba vztahy upravit a dosadit do nich odlišné momenty setrvačnosti pro obě soustavy (při křížovém ohybu desek se momenty setrvačnosti navzájem vykrátí).

Závěrem si řekněme, jaké jsou výhody roštů a proč jsou roštové konstrukce používány. Ze statického hlediska je rošty vhodné použít nad půdorysem čtvercovým nebo blízkým čtvercovému (ovšemže též nad kruhovým půdorysem, půdorysem ve tvaru pravidelného n-úhelníka ap.). Zatížení se potom rozdělí do obou směrů nosníků, takže dostáváme menší výšku stropní konstrukce. Mimo to stropní deska nad každým polem roštové konstrukce je podepřena po celém obvodu, může tedy být kří-

žem pnutá a při stejné únosnosti podstatně tenčí. Tím se zmenšuje spotřeba materiálu, tíha konstrukce, náklady na dopravu atd. Zanedbatelné nejsou ani architektonické možnosti využít takovýto strop jako kazetový.

Při všech úvahách o roštích jsme automaticky předpokládali, že soustava nosníků roštu je ortogonální, neboli že se pruty kříží pod pravými úhly. Jistěže si můžeme představit i rošty, v nichž jsou tři soustavy nosníků vytvářející rovnostranné trojúhelníky nebo jiné soustavy. Takovéto soustavy, i kdy nejsou zcela obvyklé, se řeší obdobným způsobem jako rošty ortogonální. Pouze v případě, že se v jednom místě kříží větší počet prutů, na příklad tři, budeme v tomto místě uvažovat větší počet neznámých X_1 (pro tři křížící se pruty to budou dvě neznámé síly apod.).

Příklad 13.2.1.

Určete ohybové momenty na roštu uvedeném na obrázku 13.9. Všechny pruty roštu jsou čtvercového průřezu $0,6 \times 0,6 \text{ m}$. Neuvažujte vliv krouticích momentů.

Řešení: Jako základní soustavu volíme při řešení roštu soustavu přímých nosníků. Vzhledem k dvojí souměrnosti konstrukce budou všechny síly v kříženích prutů stejné. Základní soustava je vykreslena na obrázku 13.10.

Ke stanovení dílčích průhybů v místě křížení využijeme statických tabulek, při čemž místo průhybů v místě křížení lze v tomto příkladu použít průhybů uprostřed nosníků.

Jak lze podrobným výpočtem prokázat, dopustíme se zde chyby v určení síly v křížení X_1 pouze okolo 0,7 %.

Po dosazení do vzorců ze statických tabulek dostáváme

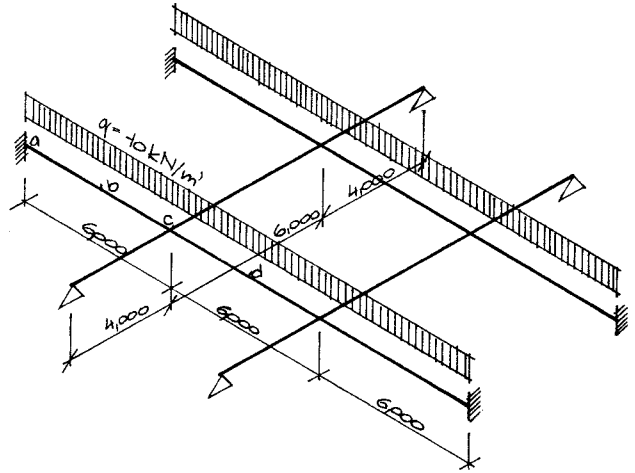
$$\begin{aligned} w_{A,p} &= \frac{1}{384} \frac{q l^4}{E I} = \\ &= \frac{1}{384} \frac{10 \cdot 18^4}{E I} = \\ &= \frac{2733,75}{E I} \end{aligned}$$

$$w_{B,p} = 0$$

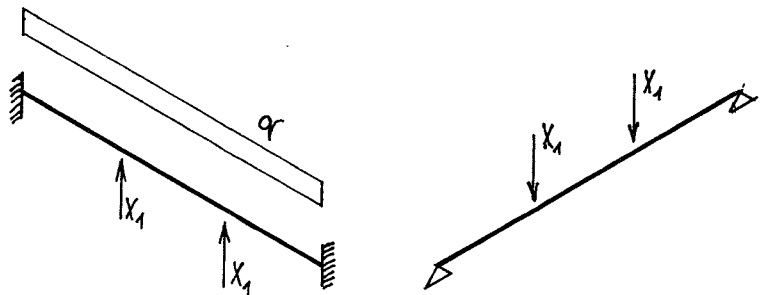
$$\begin{aligned} w_{A,1} &= \frac{5}{648} \frac{F l^3}{E I} = \\ &= \frac{5}{648} \frac{1 \cdot 18^3}{E I} = \frac{45}{E I} \end{aligned}$$

$$w_{B,1} = \frac{F c}{24 E I} (3 l^2 - 4 c^2) = \frac{1 \cdot 4}{24 E I} (3 \cdot 18^2 - 4 \cdot 4^2) = \frac{87,333}{E I}$$

Podmínka společného průhybu dává (po násobení součinem EI , který je pro oba nosníky konstantní)



Obr. 13.9. Ortogonální rošt.

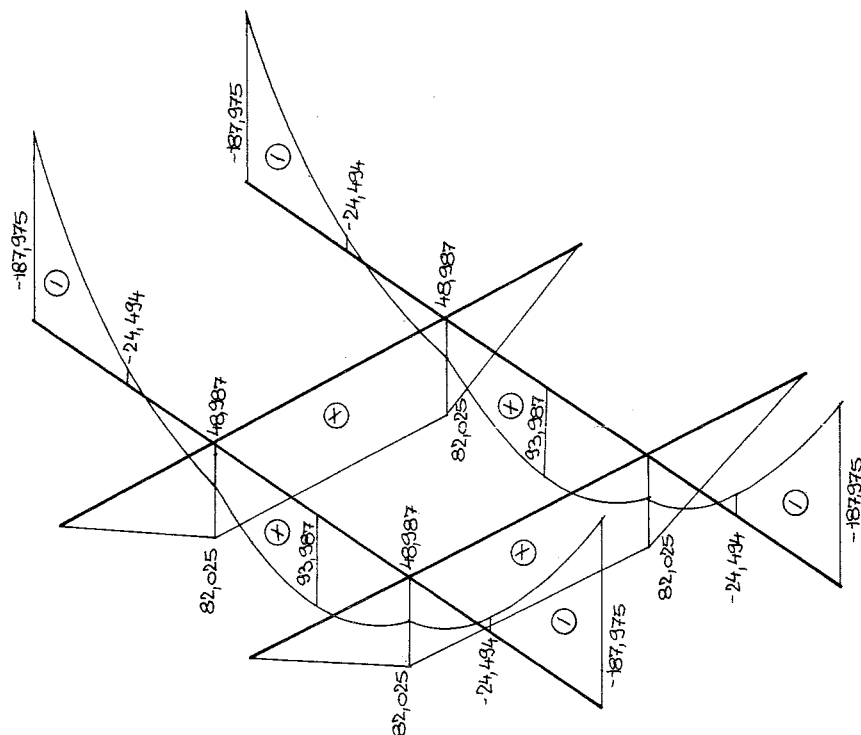


Obr. 13.10. Základní soustava ortogonálního roštu.

$$2733,75 - 45 X_1 = 87,333 X_1$$

$$X_1 = \frac{2733,75}{132,333} = 20,658 \text{ kN}$$

Výsledné ohybové momenty jsou uvedeny na obrázku 13.11.



Obr. 13.11. Výsledné ohybové momenty na roštu.

14. KONSTRUKCE ZAKŘIVENÉ

Mezi zakřivené konstrukce, se kterými jsme se seznamovali v předešlých kapitolách, můžeme zařadit lanové konstrukce a prostorové příhradové konstrukce - bane /kupole/. V této kapitole se seznámíme s dalšími ve stavebnictví používanými konstrukcemi, tedy oblouky, klenbami a skořepinami.

Obecně platí zásada, že zakřivené konstrukce mají podstatně větší únosnost než konstrukce přímé nebo rovinné. Je to způsobeno tím, že přímé /rovinné/ konstrukce přenášejí zatížení převážně pomocí ohybových momentů, kdežto u konstrukcí zakřivených je velká část zatížení přenášena pomocí normálových sil /tahových nebo tlakových/, což představuje podstatně výhodnější způsob namáhání konstrukce.

Normálové síly se ovšem na přenosu zatížení významně podílejí jen tehdy, když jim to umožníme vhodným podepřením zakřivené konstrukce. Je tedy pro podepření třeba volit takové vazby, u nichž může vzniknout reakce ve směru tečném ke křivce /střednicové ploše/, tedy zejména kyvné pruty mající směr tečný ke střednici /střednicové ploše/.

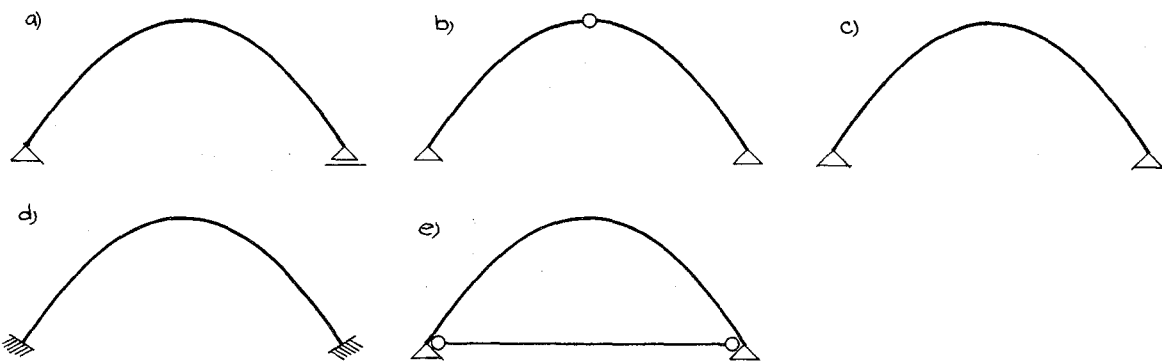
Ve střední části zakřivené konstrukce vznikají větší ohybové momenty zejména v místech zatížených osamělými břemeny. Abychom tyto ohybové momenty omezili, je vhodné použít takovou střednici nebo střednicovou plochu, která se v místech osamělých břemen lomí, takže se v místě působení osamělého břemene nachází v konstrukci hrot.

U většiny zakřivených konstrukcí platí, že symetrické zatížení je pro konstrukci "příjemnější" než zatížení jednostranné, při kterém vznikají větší ohybové momenty. Na toto je třeba pamatovat zejména u klenb a při rekonstrukcích je odlehčovat symetricky.

14.1. Oblouky.

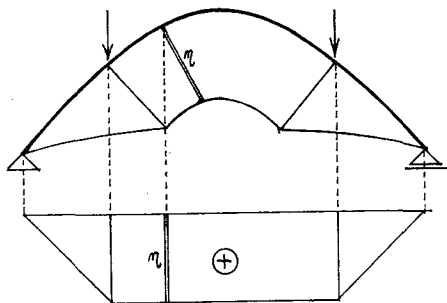
Oblouky, se kterými se ve stavební praxi setkáváme, můžeme rozdělit do čtyř skupin: oblouk podepřený jako prostý nosník, trojkloubový oblouk, dvoukloubový oblouk a oblouk vetknutý. Oblouk s táhlem je v podstatě obdoba dvoukloubového oblouku a řeší se velmi podobně, jen je třeba navíc počítat s protažením táhla. Typy oblouků jsou uvedeny na obrázku 14.1.

První dva typy, oblouk jako prostý nosník a oblouk trojkloubový, jsou staticky určité případy oblouků a jejich řešení bylo již částečně probíráno v od-



Obr. 14.1. Oblouk a) jako prostý nosník, b) trojkloubový, c) dvoukloubový
d) vetknutý e) s táhlem

stavcích 4.5 a 6.4. Reakce na oblouku podepřeném jako prostý nosník se vypočtou stejně jako na prostém nosníku, rovněž tak i ohybové momenty. Navíc je-li zatížení pouze svislé, potom průběh ohybových momentů se podél vodorovné osy mění shodně s průběhem ohybových momentů na prostém nosníku stejně zatíženém (obr. 14.2/. Při výpočtu posouvajících a normálových sil musíme mít na paměti, že posouvající síla je průmět zatížení po jedné straně průřezu do směru kolmého k ose prutu, normálová síla je průmět do osy prutu. Mění se tedy posouvající a normálová síla nejen podle zatížení, ale i podle směru osy prutu.



Obr. 14.2. Ohybové momenty na obloukovém prostém nosníku.

Při výpočtu reakcí na trojkloubových obloucích máme čtyři složky vnějších reakcí, a pro tyto složky můžeme napsat pouze tři podmínky rovnováhy na oblouku jako celku. Jsou-li na příklad klouby a , b ve stejné výšce (obr.

14.3/, můžeme z momentové podmínky k bodu b určit složku A_y a z momentové podmínky k bodu a složku B_y . Třetí podmínka - směrová ve vodorovném směru - nám dává pouze jedinou podmínku pro dvě neznámé A_x , B_x , při pouze svislém zatížení platí $A_x = B_x$. K tomu, abychom určili velikost A_x a B_x , musíme napsat ještě další podmínku, a tou je podmínka, že v kloubu c je ohybový moment nulový. Označíme-li ohybový moment v obecném bodu na prostém nosníku jako m (reakce A_y , B_y jsou stejně velké jako na prostém nosníku ab), budou se ohybové momenty M na trojkloubovém oblouku od těchto momentů lišit o člen $-A_x \cdot y$, tedy

$$M = m - A_x \cdot y \quad /14.1/$$

A protože v kloubu c je ohybový moment M_c nulový, musí platit pro velikost vodorovné reakce v bodu a vztah

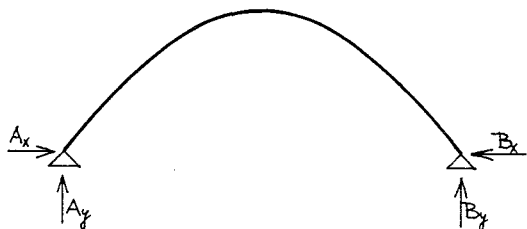
$$A_x = \frac{m_c}{y_c} \quad /14.2/$$

Vodorovnou složku reakce, tak zvanou rozháněcí sílu oblouku, určíme na trojkloubovém oblouku tedy jako podíl ohybového momentu na prostém nosníku stejně zatíženém a výšky středního kloubu (tzv. vzepětí oblouku). Po určení vodorovné složky reakce určíme ohybové momenty oblouku podle vztahu /14.1/.

Trojkloubové oblouky jsou poměrně často používány, zejména na poddolovaném území. Na rozdíl od obloukových nosníků si trojkloubové oblouky zachovávají charakter oblouků pokud jde o vnitřní síly (tj. malé hodnoty ohybových momentů a velké normálové síly), a přitom se jedná o konstrukce staticky určité. Ve staticky určitých konstrukcích nevznikají totiž žádné vnitřní síly vlivem různých poklesů podpor, oteplení konstrukce nebo její části, smrštění betonu apod. Je proto třeba tam, kde různé sedání nemůžeme předem vyloučit, volit konstrukce staticky určité, anebo naopak velmi tuhé. Tato situace nastává zejména na poddolo-

vaném území a tam, kde nemůžeme založit konstrukci dostatečně hluboko s ohledem na blízkou stávající zástavbu. Proto je např. krajní novoměstské pole Jiráskova mostu v Praze zhotoveno jako trojkloubový oblouk.

Řešení oblouků dvoukloubových (a také oblouků s táhlem) má mnoho společného s trojkloubovými oblouky. I zde máme totiž čtyři neznámé složky vnějších reakcí, z nichž dvě - A_y a B_y - můžeme určit přímo z podmínek rovnováhy (momentových



Obr. 14.4. Reakce na dvoukloubovém oblouku.

k bodům a , b - viz obrázek 14.4/. Pro zbyvající dvě neznámé složky reakcí máme pouze jedinou podmínku - směrovou ve vodorovném směru. Z té určíme pouze závislost mezi vodorovnými složkami reakcí, např. při svislém zatížení víme jen to, že obě složky jsou stejně veliké (rozhánecí síla oblouku). Pro ohybové momenty zde platí obdobně jako na trojkloubovém oblouku rovnice /14.1/, kde ovšem nyní představuje A_x neznámou veličinu - označme ji X_1 (oblouk je jedenkrát staticky neurčitý). Neznámou X_1 určíme z deformační podmínky, podle které musí být vodorovné složky reakcí tak velké, aby vodorovné roztažení podporových kloubů bylo nulové. Postupujeme tedy tak, že vypočteme na oblouku podepřeném jako prostý nosník vodorovné roztažení oblouku, dále vypočteme stlačení podpor oblouku při zatížení reakcí $B_x = 1$. Skutečnou velikost reakce B_x získáme pak jako podíl těchto posunutí.

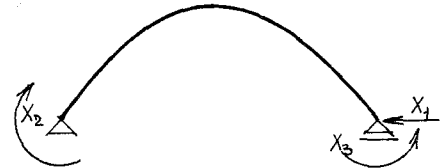
Přibližnou velikost rozhánecí síly H , která nám pro orientační výpočet většinou postačuje, můžeme získat výhodněji pomocí věty o minimu přetvárné práce. Podle této věty "reakce na staticky neurčitě konstruovanou mají takovou velikost, aby činily přetvárnou práci minimální". Velikost přetvárné práce závisí zejména na velikosti ohybových momentů, na jejich druhé mocnině. Takže správná velikost vodorovných reakcí bude taková, při které součet čtverců ohybových momentů na oblouku (přesněji součet M^2/EI) bude minimální, což znamená takový průběh, který se co nejvíce přimyká ke střednici oblouku.

Graficky postupujeme tak, že nejprve stanovíme velikost vodorovné síly jako na trojkloubovém oblouku, v této vzdálenosti zvolíme pól a vykreslíme výslednicovou čáru, která má začátek v kloubu a ; pól je ovšem nutno volit nalevo od složkového obrazce. A nyní posunujeme pól blíž nebo dál od složkového obrazce a sledujeme, pro jakou polohu pólu se výslednicová čára co nejvíce přimkne ke střednici oblouku. Volíme-li pól blíž k složkovému obrazci, pořadnice výslednicové čáry se zvětšují a naopak. Z tohoto grafického řešení můžeme také určit velikost ohybových momentů a normálových sil na oblouku. Normálové síly jsou rovny délkám pólových paprsků (přesněji průmětům pólových paprsků do směrů tečných ke střednici), ohybový moment je roven součinu normálové síly a vzdálenosti výslednicové čáry od střednice.

Nejmenší možná hodnota přetvárné práce je tehdy, jsou-li ohybové momenty nulové, to znamená když se výslednicová čára kryje se střednicí oblouku. Taková situace nastává na příklad u parabolického oblouku zatíženého rovnoměrně po střednici, obecně vždy tehdy, když průběh ohybových momentů na prostém nosníku stejně zatíženém má při vhodném měřítku stejný tvar jako střednice oblouku. Pak jsou o-

ohybové momenty po celé délce oblouku nulové a oblouk můžeme řešit jako trojkloubový (je to řešení přesné).

Při řešení oblouků vetknutých platí to, co bylo řečeno o obloucích dvoukloubových, navíc přistupují jako neznámé složky reakcí momenty ve vetknutích a jako deformační podmínky nulová pootočení vetknutí (obr. 14.5/. I pro oblouky vetknuté můžeme použít přibližné řešení, při němž postupujeme stejně jako u oblouků dvoukloubových, ale kromě hledání nejvýhodnější polohy pólu je třeba hledat i nejvýhodnější počátek výslednicové čáry. Ta totiž nezačíná v bodu a, ale poblíž a opět tak, aby se ohybové momenty co nejvíce přimykaly ke střednici. Podrobněji je řešení oblouků vetknutých probráno v následujícím odstavci "Klenby".



Obr. 14.5. Základní soustava pro vetknutý oblouk.

Má-li průběh ohybových momentů na prostém nosníku stejně zatíženém stejný tvar se střednicí oblouku, jsou i na vetknutém oblouku po jeho celé délce ohybové momenty nulové, takže jedinou vnitřní silou jsou pak normálové síly.

Příklad 14.1.1.

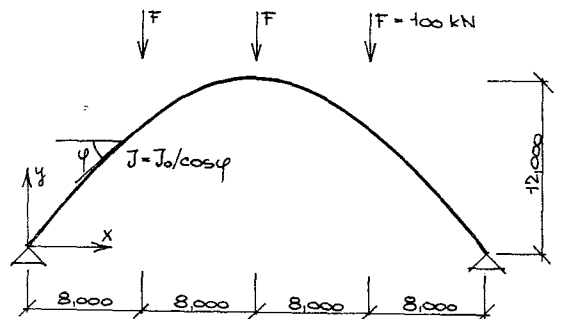
Určete průběh ohybových momentů na parabolickém dvoukloubovém oblouku, zatíženém třemi osamělými břemeny. Rozměry oblouku a jeho zatížení jsou uvedeny na obrázku 14.6.

Řešení: Použijeme přibližného grafického řešení, při němž zvolíme výchozí polohu pólu jako na trojkloubovém oblouku. Na něm platí z důvodu symetrie

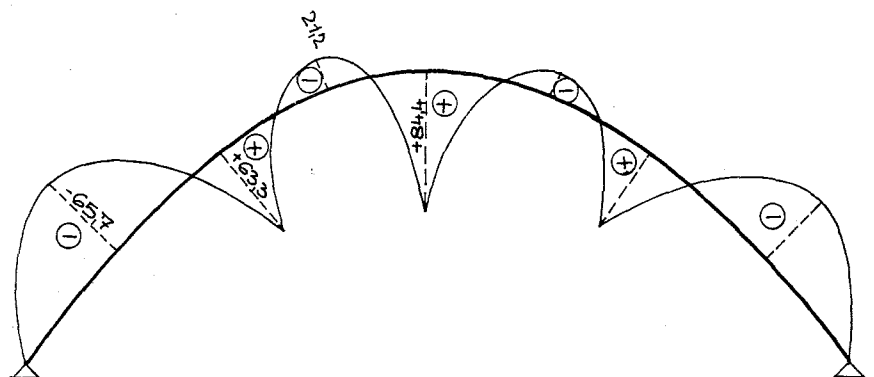
$$A_y = B_y = \frac{1}{2} 3 F = 150 \text{ kN}$$

$$A_x = B_x = \frac{150.16 - 100.8}{12} = 133,3 \text{ kN}$$

Výchozí pól se tedy bude nalézat na ose symetrie složkového obrazce, a to nalevo ve vzdálenosti 133,3 kN. Při nakreslení výslednicové čáry z tohoto pólu zjistíme, že se nachází převážně pod střednicí oblouku. Je tedy třeba zvolit pól blíže ke složkovému obrazci. Nejvíce se výslednicová čára bude přimykát ke střednici při pólové vzdále-



Obr. 14.6. Dvoukloubový oblouk.



Obr. 14.7. Ohybové momenty na dvoukloubovém oblouku.

nosti 126,3 kN , což je skutečná velikost rozháněcí síly na tomto dvoukloubovém oblouku. Při této rozháněcí síle obdržíme průběh momentů, který je vykreslen na obrázku 14.7.

Příklad 14.1.2.

Stanovte ohybové momenty na parabolickém vetknutém oblouku od jednostranného rovnoměrného zatížení - viz obrázek 14.8.

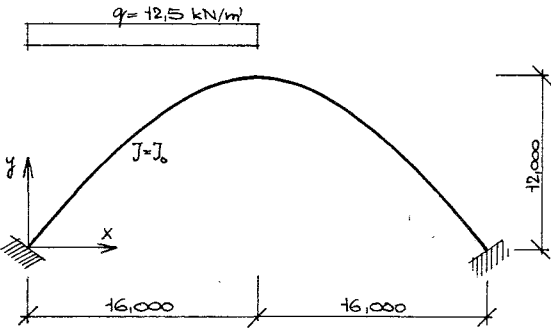
Řešení: Na trojkloubovém oblouku stejných rozměrů i zatížení bychom dostali

$$A_y = \frac{3}{4} 12,5 \cdot 16 = 150 \text{ kN}$$

$$B_y = \frac{1}{4} 12,5 \cdot 16 = 50 \text{ kN}$$

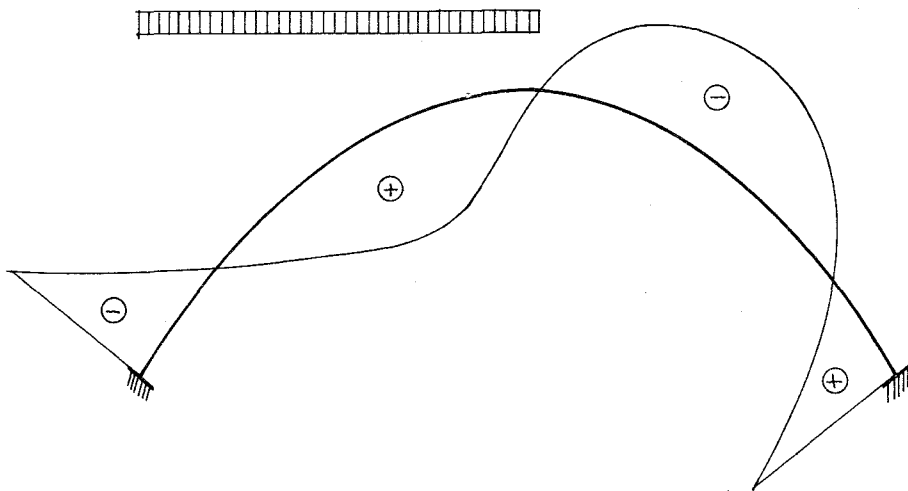
$$A_x = B_x = \frac{50 \cdot 16}{12} = 66,67 \text{ kN}$$

což nám udává výchozí polohu pólu ve třech čtvrtinách výšky náhradního břemene a 66,67 kN nalevo. Z tohoto pólu rýsovaná výslednicová čára dává přesné hodnoty ohybových momentů nejen pro oblouk trojkloubový, ale v tomto případě i pro dvoukloubový. Pro oblouk vetknutý se ukazuje, že nejvíce se výslednicová čára přimyká ke střednici



Obr. 14.8. Parabolický vetknutý oblouk.

při volbě pólu ve vzdálenosti $A_x = 66,67 \text{ kN}$, výšce shora $A_y = 161,2 \text{ kN}$, začneme-li výslednicovou čáru rýsovat z bodu $M_a = -179,1 \text{ kNm}$ (obr. 14.9/).



Obr. 14.9. Ohybové momenty na vetknutém oblouku.

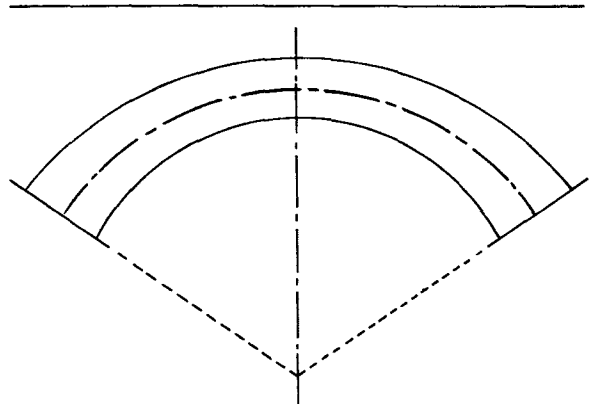
14.2. Klenby.

Budeme se zde zabývat pouze klenbami valenými, to je takovými klenbami, u nichž střednicová plocha je plocha válcová. Řešení jiných typů kleneb se provádí podle podobných zásad jako u kleneb valených, ovšem je podstatně komplikovanější a přesahovalo by rámec těchto skript.

Klenby (obr. 14.10/ jsou vlastně oblouky, nejčastěji vetknuté, ale protože se obvykle zhotovují z materiálů špatně odolávajících tahu (kámen, cihly, pros-

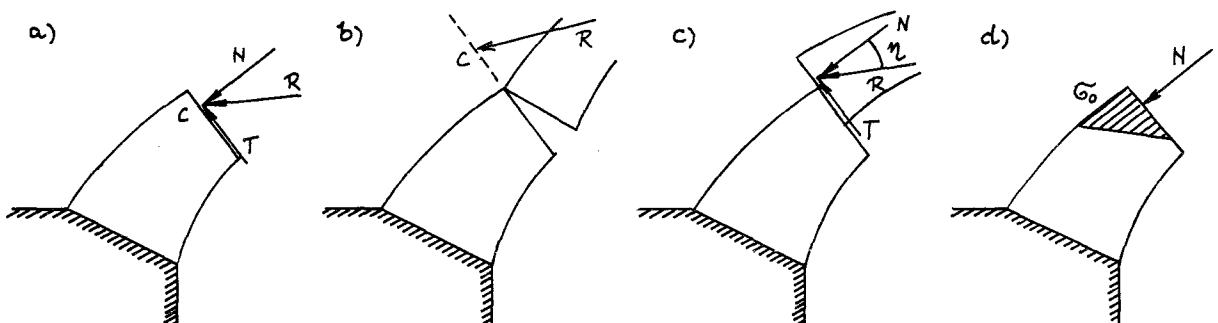
tý beton), můžeme si řešení velmi podstatně zjednodušit.

Odejmeme-li část klenby po jedné, např. pravé, straně libovolného průřezu, můžeme účinek této odňaté části na zbytek nahradit výslednicí R , která protíná průřez v tzv. tlakovém centru c (obr. 14.11a/. Poloha a velikost výslednice stanovené pro libovolný průřez musí splňovat tři podmínky, platné pro každou zděnou konstrukci :



Obr. 14.10. Valená klenba.

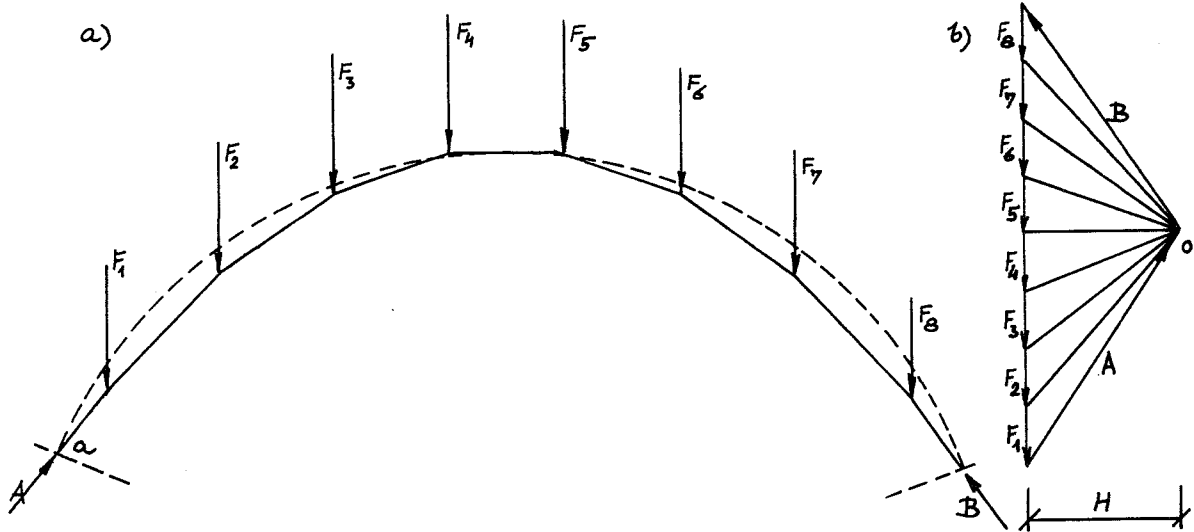
1. Podmínka rovnováhy co do po-
otočení /obr.14.11b/, podle které nesmí tlakové centrum vystoupit ze spá-
ry. Splnění této podmínky vyžaduje, aby výslednicová čára, nazývaná u
klenby také tlaková čára, byla všude uvnitř klenby.
2. Podmínka rovnováhy co do posunutí, podle které je nutno, aby úhel η
sevřený výslednicí R a kolmicí k průřezu byl menší než úhel tření za
klidu φ_0 , tedy $\eta \leq \varphi_0$ (obr. 14.11c/. Úhel φ_0 pro zdivo na vlhké
maltě je přibližně $22,5^\circ$, pro vyschlé zdivo cca 37° .
3. Podmínka bezpečné pevnosti, podle níž největší napětí ve spáře nesmí pře-
stoupit povolenou mez. Jestliže se tlakové centrum nachází v jádře prů-
řezu, to je ve vnitřní třetině, počítáme napětí podle kombinace tlaku a
ohybu, pokud tlakové centrum leží mimo jádro, počítáme napětí podle vy-
loučeného tahu.



Obr. 14.11. Tlakové centrum výslednice a způsoby porušení klenby.

Vidíme, že pro posouzení napjatosti v klenbě je zapotřebí znát polohu výslednicové čáry klenby /obr.14.12/. Ovšem k tomu, abychom mohli výslednicovou čáru vykreslit, je třeba nejprve určit polohu pólu o a výchozí bod a výslednicové čáry. Vzdálenost pólu o od paprsků sil F_i ve složkovém obrazci (obr. 14.12b/ udává současně velikost vodorovné síly H klenby, neboli velikost vodorovné složky reakcí. Jsou-li zatížení i střednice klenby symetrické, bude i pól ležet na ose symetrie složkového obrazce, ovšem velikost vodorovné síly H a výchozí bod a výslednicové čáry předem neznáme.

Vzdálenost výslednicové čáry od střednice klenby dává (po vynásobení normálovou silou) hodnotu ohybového momentu v tomto místě. Uvědomíme-li si, že podle

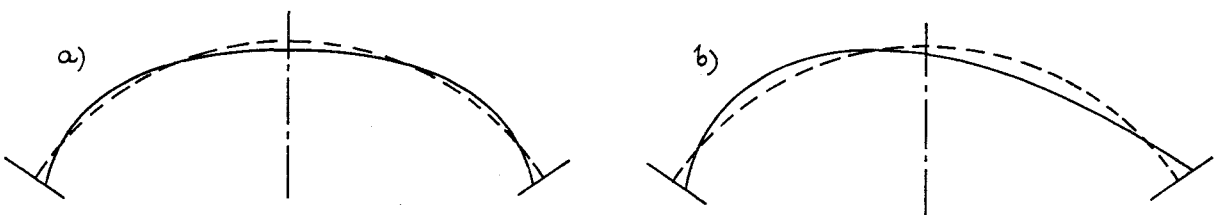


Obr. 14.12. Výslednicová čára klenby.

věty o minimu přetvárné práce (viz odst. 14.1/ musí mít reakce ve staticky neurčitě konstrukci takovou hodnotu, aby přetvárná práce byla minimální, a že přetvárná práce je dána druhými mocninami ohybových momentů (zanedbáváme-li stlačené střednice), můžeme odvodit tyto Winklerovy věty :

- Je-li střednice jednou z možných výslednicových čar, je i skutečnou výslednicovou čarou.
- Není-li střednice možnou výslednicovou čarou, pak se skutečná výslednicová čára odchyluje od střednice co nejméně (ve smyslu metody nejmenších čtverců).

Z těchto vět plyne, že se výslednicová čára vždy co nejvíce přimyká ke střednici, při čemž za souměrného zatížení ji protíná nejméně ve čtyřech bodech (obr. 14.13a/, za nesouměrného nejméně ve třech bodech (obr. 14.13b/.

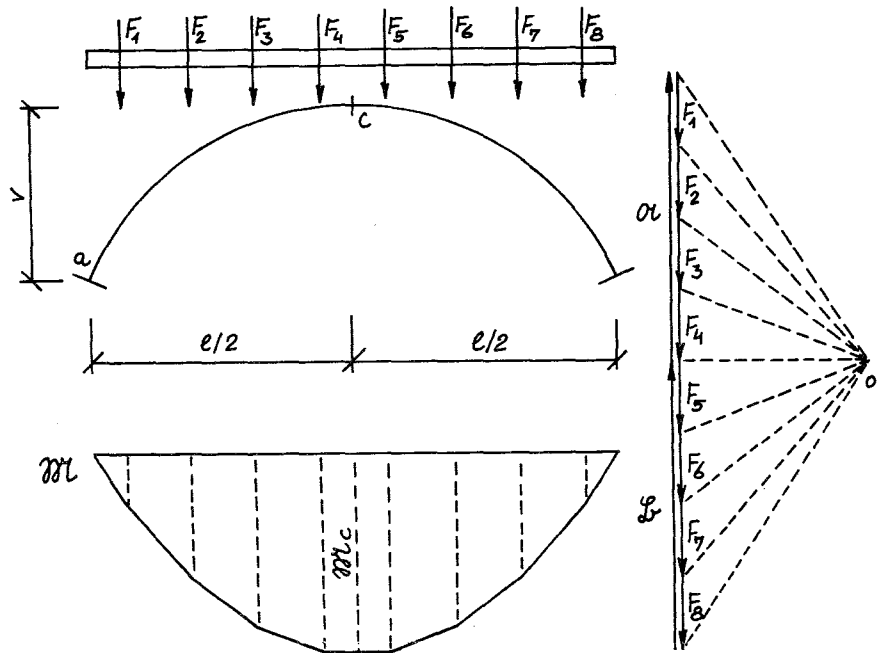


Obr. 14.13. Vztah výslednicové čáry a střednice - a) symetrické zatížení
b) nesymetrické zatížení.

Na této vlastnosti je založeno i přibližné řešení klenby. Spojité zatížení nahradíme soustavou osamělých břemen a vyřešíme průběh ohybových momentů M na prostém nosníku stejného rozpětí /obr.14.14/. Velikost vodorovné síly H bude přibližně rovna velikosti vodorovné síly na trojkloubovém oblouku, tedy

$$H \doteq \frac{M_c}{v}.$$

Pól zvolíme ve vzdálenosti rovné H proti dělicímu bodu mezi reakcemi α a β , a vykreslíme výslednicovou čáru vedenou z levého podporového bodu a (jako na trojkloubovém oblouku). Jestliže se tato výslednicová čára kryje se střednicovou křivkou anebo se k ní co nejvíce přimyká, jedná se o skutečnou výslednicovou čáru, ji-



Obr. 14.14. Ohybové momenty na prostém nosníku.

nak je třeba zvolit novou polohu pólu nebo nový výchozí bod výslednicové čáry. Jak vyplývá ze vztahu mezi pólovou vzdáleností a velikostí pořadnic výslednicové čáry, větší pólová vzdálenost odpovídá plošší výslednicové čáře, menší pólová vzdálenost strmější výslednicové čáře.

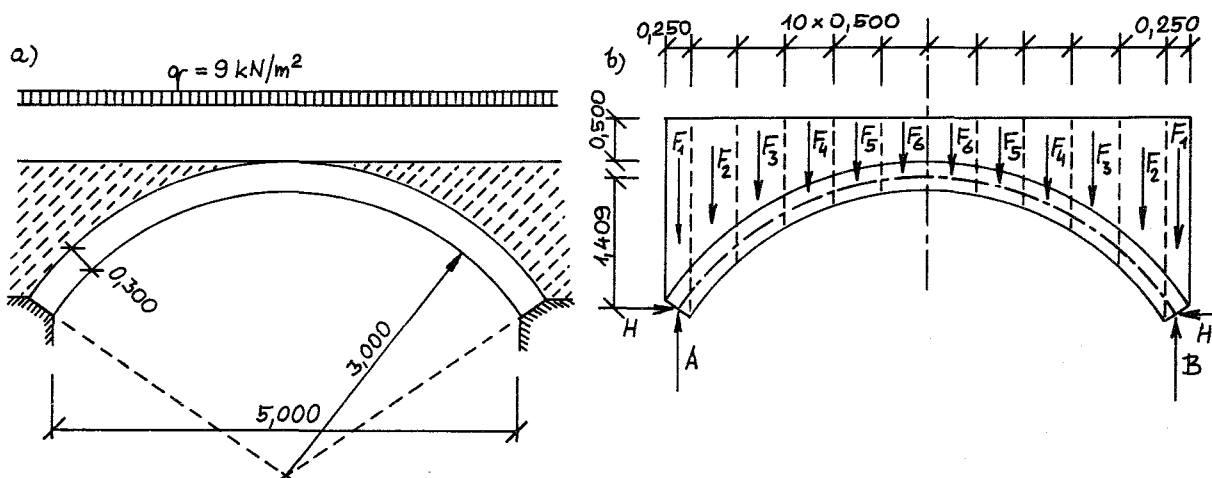
Při posuzování je třeba určit napjatost ve vrcholu klenby, v patkách a pak v těch průřezech, v nichž se výslednicová čára co nejvíce blíží k rubu nebo líci klenby (tak zvané nebezpečné průřezy). Pokud v celé klenbě prochází výslednicová čára střední třetinou tloušťky, je celá klenba tlačaná. Pokud někde vystoupí ze střední třetiny, je nutno toto místo vyšetřovat za vyloučeného tahu (neplatí pro klenby železobetonové), a v líci na opačné straně od těžiště průřezu než je tlakové centrum vznikají v klenbě trhliny. Tyto trhliny, pokud nejsou hlubší než je polovina tloušťky klenby (šířka "tahové" oblasti průřezu), nejsou na závalu statického působení klenby, ovšem mohou působit nepříznivě psychicky.

Nejvýhodnějším tvarem klenby je ten tvar, u něhož se střednice ztotožňuje s výslednicovou čarou vnějších sil působících na klenbu, protože potom je každý průřez namáhán pouze prostým tlakem. Protože ovšem při návrhu zatěžovací plochu ještě neznáme (výška násypu závisí na tvaru oblouku), je třeba tvar oblouku odhadnout, narýsovat výslednicovou čáru příslušející tomuto tvaru a podle ní upravit nový tvar oblouku. Uvedený postup je možno opakovat, ale zpravidla postačí již tato jediná oprava.

Tvar klenby požadujeme obvykle symetrický, proto klenbu navrhujeme pro maximální zatížení symetrické. Ovšem protože jednostranné užité zatížení může mít nepříznivější účinky (vyvozuje větší excentricitu, ovšem menší síly), je třeba posuzovat klenbu nejen na zatížení plné, ale i na plné zatížení stálé a jednostranné nahodilé.

Příklad 14.2.1.

Stanovte napjatost v cihelné klenbě tvaru kruhového segmentu o poloměru líce $r = 3 \text{ m}$, světlost klenby je 5 m (obr. 14.15a/. Tloušťka klenby je $0,3 \text{ m}$, klen-



Obr. 14.15. Cihelná klenba a její zatížení.

ba je do vodorovné úrovně zarovnána zásypem o měrné hmotnosti $1,8 \text{ t/m}^3$. Horní povrch je rovnoměrně zatížen, intenzita zatížení je $q = 9 \text{ kN/m}^2$.

Řešení : Nejprve je třeba stanovit zatížení klenby. Spojité zatížení nahradíme soustavou osamělých břemen, a pro toto nahrazení rozdělíme klenbu na pruhy. Šířku pruhů zvolíme $0,5 \text{ m}$ (obr. 14.15b/, velikost sil bude rovna zatěžovací ploše násobené měrnou tíhou zásypu i zdiva $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$. Rovnoměrné zatížení klenby nahradíme zvýšením násypu o výšku

$$h_1 = \frac{q}{\gamma} = \frac{9}{18} = 0,5 \text{ m.}$$

Síly působí v těžištích zatěžovacích pruhů, ovšem nedopustíme se veliké chyby, necháme-li je působit ve středech pruhů. Šířka krajního pruhu je dána zhlavím klenby a rovná se z úměry

$$d_1 = 2,5 \frac{0,3}{3} = 0,25 \text{ m.}$$

Z obrázku 14.15b zjistíme rozměry zatěžovacích ploch (uvažujeme je jako lichoběžníky), takže na klenbu působí síly

$$F_1 = 18 \cdot 0,25 \frac{1,976 + 2,142}{2} = 9,265 \text{ kN/m,}$$

$$F_2 = 18 \cdot 0,5 \frac{2,142 + 1,564}{2} = 16,677 \text{ kN/m,}$$

$$F_3 = 18 \cdot 0,5 \frac{1,564 + 1,202}{2} = 12,446 \text{ kN/m,}$$

$$F_4 = 18 \cdot 0,5 \frac{1,202 + 0,972}{2} = 9,781 \text{ kN/m,}$$

$$F_5 = 18 \cdot 0,5 \frac{0,972 + 0,842}{2} = 8,161 \text{ kN/m},$$

$$F_6 = 18 \cdot 0,5 \frac{0,842 + 0,8}{2} = 7,389 \text{ kN/m}.$$

Velikost ohybového momentu uprostřed prostého nosníku stejného rozpětí, to je $l = 4,25 \text{ m}$, je

$$\mathcal{M}_c = F_2 \cdot 0,375 + F_3 \cdot 0,875 + F_4 \cdot 1,375 + F_5 \cdot 1,875 + F_6 \cdot 2,375 = 63,444 \text{ kNm/m},$$

takže vodorovná síla klenby (rozháněcí síla) je přibližně rovna

$$H = \frac{\mathcal{M}_c}{v} = \frac{63,444}{1,409} = 45,028 \text{ kN/m}.$$

Protože velikost reakcí je

$$A = B = \frac{1}{2} \sum F = 63,719 \text{ kN/m},$$

budou ohybové momenty na oblouku v místech působení sil (při $H = 45,028 \text{ kN/m}$ a $m_1 = 0$)

$$m_2 = (A - F_1) \cdot 0,375 - H \cdot 0,463 = -0,442 \text{ kNm/m},$$

$$m_3 = (A - F_1) \cdot 0,875 - F_2 \cdot 0,5 - H \cdot 0,878 = -0,226 \text{ kNm/m},$$

$$m_4 = (A - F_1) \cdot 1,375 - F_2 \cdot 1 - F_3 \cdot 0,5 - H \cdot 1,150 = 0,192 \text{ kNm/m},$$

$$m_5 = (A - F_1) \cdot 1,875 - F_2 \cdot 1,5 - F_3 \cdot 1 - F_4 \cdot 0,5 - H \cdot 1,319 = 0,357 \text{ kNm/m},$$

$$m_6 = (A - F_1) \cdot 2,375 - F_2 \cdot 2 - F_3 \cdot 1,5 - F_4 \cdot 1 - F_5 \cdot 0,5 - H \cdot 1,399 = 0,450 \text{ kNm/m}.$$

Tento průběh ohybových momentů na klenbě jako trojkloubovém oblouku je uveden na obrázku 14.16a.

Aby se ohybové momenty ještě blíže přimkly ke střednici, zvětšíme vodorovnou sílu (tím se zmenší ohybové momenty) na $H' = 45,5 \text{ kN/m}$ a moment ve vetknutí odhadneme na $m_1' = 0,26 \text{ kNm/m}$ (aby byla nejmenší kvadratická odchylka). Ohybové momenty budou mít pak velikost

$$m_1' = 0,260 \text{ kNm/m},$$

$$m_2' = 0,26 + (A - F_1) \cdot 0,375 - H' \cdot 0,463 = -0,340 \text{ kNm/m},$$

$$m_3' = 0,26 + (A - F_1) \cdot 0,875 - F_2 \cdot 0,5 - H' \cdot 0,878 = -0,292 \text{ kNm/m},$$

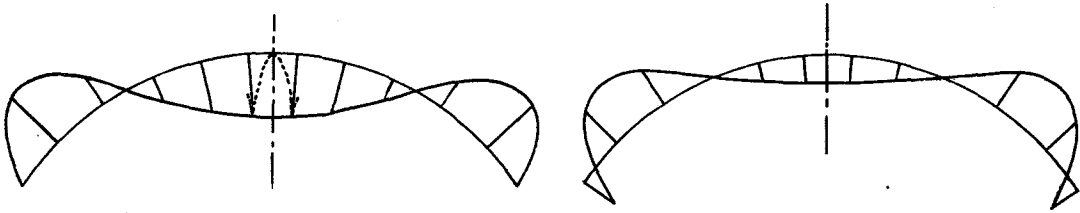
$$m_4' = 0,26 + (A - F_1) \cdot 1,375 - F_2 \cdot 1 - F_3 \cdot 0,5 - H' \cdot 1,150 = 0,024 \text{ kNm/m},$$

$$m_5' = 0,26 + (A - F_1) \cdot 1,875 - F_2 \cdot 1,5 - F_3 \cdot 1 - F_4 \cdot 0,5 - H' \cdot 1,319 = 0,127 \text{ kNm/m},$$

$$m_6' = 0,26 + (A - F_1) \cdot 2,375 - F_2 \cdot 2 - F_3 \cdot 1,5 - F_4 \cdot 1 - F_5 \cdot 0,5 - H' \cdot 1,399 = 0,189 \text{ kNm/m}.$$

Průběh je vynesena na obrázku 14.16b. Vidíme, že se ohybové momenty zmenšily jak co do extrémních hodnot, tak i pokud jde o průměr; přetvárná práce je tedy menší a tudíž získané výsledky jsou blíže ke skutečným.

Tlakové centrum je vždy na opačné straně střednice než jsou tažená vlákna, tedy než jsou vykresleny ohybové momenty. Tlaková čára je tedy přibližně zrcadlový obraz podle střednice k průběhu ohybových momentů. Vzdálenost tlakového centra od těžiště průřezu určíme pomocí vzorce



Obr.14.16. Průběhy ohybových momentů na klenbě a) trojkloubový oblouk
b) vetknutý oblouk.

$$c = -\frac{m}{n}$$

(viz odst. 10.2/. Největší excentricita je v těch průřezech, kde je ohybový moment extrémní, což je v průřezech 1, 2 a 6. V těchto průřezech posoudíme velikosti napětí. Tlakovou sílu v průřezu obloukového nosníku stanovíme jako součet svislých sil násobených sinem úhlu mezi tečnou ke střednici a vodorovnou, k němuž přičteme rozháněcí sílu násobenou kosinem téhož úhlu, tedy

$$n = -\sum F_y \cdot \sin \varphi - H \cdot \cos \varphi.$$

V průřezu 1 tedy dostáváme

$$n_1 = -A \cdot \sin \varphi_1 - H \cdot \cos \varphi_1 = -63,719 \cdot 0,833 - 45,028 \cdot 0,553 = -78,195 \text{ kN/m}$$

a poloha tlakového centra je

$$c_1 = -\frac{m_1}{n_1} = -\frac{0,26}{-78,195} = -0,003 \text{ m},$$

což je menší než $0,3/6 = 0,05 \text{ m}$, tlakové centrum je uvnitř jádra. Extrémní napětí je tedy podle tlaku za ohybu

$$\sigma_1 = \frac{n_1}{A} - \frac{|m_1|}{W} = \frac{-78,195}{0,3 \cdot 1,0} - \frac{0,26}{\frac{1}{8} \cdot 1,0 \cdot 3^2} = -278,0 \text{ kPa}.$$

V průřezu 2 vychází

$$n_2 = -(A - F_1) \sin \varphi_2 - H \cdot \cos \varphi_2 = -(63,719 - 9,265) \cdot 0,714 - 45,028 \cdot 0,700 = -70,669 \text{ kPa},$$

poloha tlakového centra je

$$c_2 = -\frac{m_2}{n_2} = -\frac{-0,340}{-70,669} = -0,005 \text{ m},$$

je tedy opět uvnitř jádra, a extrémní napětí má hodnotu

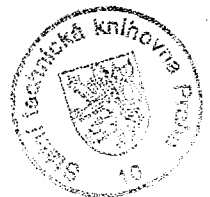
$$\sigma_2 = \frac{n_2}{A} - \frac{|m_2|}{W} = \frac{-70,669}{0,3} - \frac{0,340}{0,015} = -258,2 \text{ kPa}.$$

V průřezu 6 dostáváme

$$n_6 = -(A - F_1 - F_2 - F_3 - F_4 - F_5) \sin \varphi_6 - H \cos \varphi_6 = -45,843 \text{ kN/m},$$

$$c_6 = -\frac{m_6}{n_6} = -\frac{0,189}{-45,843} = 0,004 \text{ m},$$

$$\sigma_6 = \frac{n_6}{A} - \frac{|m_6|}{W} = -\frac{45,843}{0,3} - \frac{0,189}{0,015} = -165,4 \text{ kPa}.$$



Extrémní napětí v klenbě vzniká tedy v podporovém průřezu a jeho velikost je $\sigma = -0,278$ MPa. Vzhledem k tomu, že tlakové centrum se nachází vždy uvnitř jádra průřezu, jsou všechny průřezy klenby tlačeny a v klenbě při tomto zatížení nevznikají žádné trhlinky.

Mezní napětí cihelného zdiva závisí na druhu použitých cihel a na použité maltě, ovšem u kleneb by nemělo být menší než 0,7 MPa. Vidíme, že napětí v klenbě této hodnoty zdaleka nedosahují.

Kdybychom zmenšili tloušťku klenby na 0,15 m, zatížení by se zmenšilo nepatrně (ponecháme-li polohu střednice) nebo by zůstalo stejné (ponecháme-li spodní líc). V nejnamáhanějších průřezech 1, 2 a 6 bychom potom obdrželi tyto velikosti napětí :

$$\sigma_1 = \frac{-78,195}{0,15 \cdot 1,0} - \frac{1}{6} \frac{0,260}{1,0 \cdot 0,15^2} = -\frac{78,195}{0,15} - \frac{0,26}{0,00375} = -590,6 \text{ kPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{-70,669}{0,15} - \frac{0,340}{0,00375} = -561,8 \text{ kPa}$$

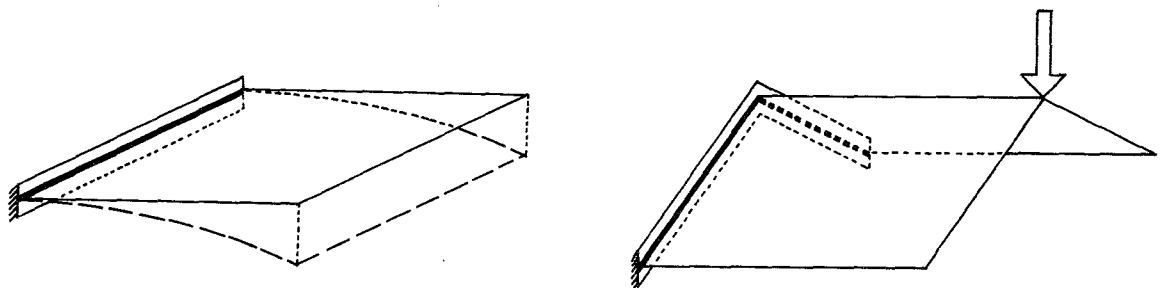
$$\sigma_6 = \frac{-45,843}{0,15} - \frac{0,189}{0,00375} = -356,0 \text{ kPa}$$

což je ve všech případech menší než mezní napětí v tlaku $R = 0,7$ MPa. Tloušťka klenby 0,15 m by tedy byla pro toto zatížení postačující.

14.3. Skořepiny.

Pojmem skořepiny označujeme plošné tenkostěnné konstrukce se zakřivenou střednicovou plochou. Střednicová plocha skořepiny může být zakřivená buďto pouze v jednom směru (na příklad u válcové skořepiny) nebo v obou směrech (příkladem může být skořepina kulová). Obecně můžeme říci, že únosnost skořepin s dvojitou křivostí je větší než u skořepin s jednou křivostí.

Ovšem i únosnost skořepin s jednou křivostí je podstatně větší než únosnost nosných desek stejné tloušťky. O tom se může každý sám přesvědčit na listu papíru.



Obr. 14.17. Únosnost listu papíru rovinného a zalomeného.

ru. Ponecháme-li jej jako rovinný prvek, neunes list papíru ani svou vlastní tíhu, ovšem když jej ohneme nebo zalomíme (obr. 14.17/, potom se jeho únosnost mnohonásobně zvětší.

Skořepiny obvykle zhotovujeme o velmi malé tloušťce, u železobetonových skořepin je tloušťka často dána pouze nutným krytím prutů výztuže. Vzhledem k malé tloušťce skořepin je jejich schopnost přenášet ohybové momenty velmi malá, a zatížení se přenáší převážně normálovými silami v rovině skořepiny. Obdobou jsou oblouky, u nichž se zatížení také přenáší většinou normálovými silami a ohybové momenty jsou velmi malé. Takovýto stav skořepin, kdy ohybové i kroutící momenty a posouvající síly ve směru kolmém ke střednicové ploše předpokládáme nulové, se nazývá membránový stav napjatosti. Podmínkou ovšem je u skořepin stejně tak jako u oblouků, že podepření musí být takové, aby membránový stav napjatosti dovolovalo. V opačném případě dochází k tzv. poruše membránového stavu, v blízkosti okraje vznikají ve skořepině ohybové momenty, na které je pak třeba okraj skořepiny dimenzovat (obvykle je nutno podstatně zvětšit tloušťku). Nevhodné ze statického hlediska je proto většinou vetknutí okraje, které okraji zabraňuje ve volném potočení a tak způsobuje poruchy membránového stavu. Obdobně dovází k poruchám membránového stavu napjatosti v okolí působišť osamělých břemen.

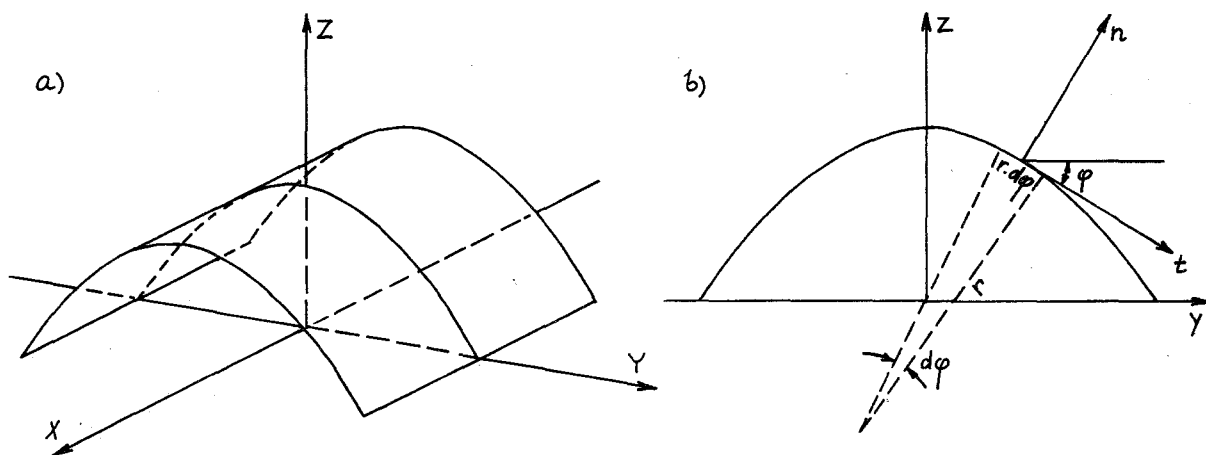
Stejně tak jako u nosných desek, i u skořepin obvykle nepočítáme hodnoty napětí, ale tak zvané měrné normálové a posouvající síly, což jsou síly na jednotku délky řezu. Označujeme je n , resp. t , a platí pro ně

$$n_x = G_x \cdot d, \quad n_y = G_y \cdot d, \quad t_{xy} = \tau_{xy} \cdot d,$$

kde d je tloušťka skořepiny (vzhledem k zanedbávání ohybových a kroutících momentů jsou všechna napětí po tloušťce skořepiny konstantní).

Skořepiny můžeme podle způsobu řešení rozdělit na válcové, rotační, ploché a obecné. V těchto skriptech se blíže seznámíme s řešením skořepin válcových a rotačních, a to za membránového stavu napjatosti. Řešení skořepin plochých, u kterých je nutno uvažovat i ohyb, a řešení obecných skořepin ponecháme statikovi - specialistovi, zrovna tak jako stanovení poruch membránového stavu napjatosti skořepin válcových a rotačních.

Nejprve se budeme zabývat řešením membránového stavu napjatosti válcové skořepiny. Zvolme souřadnou soustavu skořepiny jako na obrázku 14.18. Osa x má směr povrchových přímk, osa y je na ní kolmá vodorovná osa a osa z je svislá. Označme dále r poloměr křivosti v rovině yz a φ úhel sevřený mezi vodo-



Obr. 14.18. Souřadný systém válcové skořepiny.

rovnou osou y a tečnou t k ploše v rovině yz . Směr n je normálový k ploše. Vyjměme ze skořepiny prvek o stranách Δx a $r \cdot \Delta \varphi$ /obr.14.19/. Plocha prvku je $\Delta A = \Delta x \cdot r \cdot \Delta \varphi$. Na strany prvku v rovině xn působí síly normálová $n_t \Delta x$ a posouvající $t_{tx} \Delta x$, v rovině vzdálené o $r \Delta \varphi$ pak tyto síly zvětšené o přírůstky. V rovině nt na strany prvku působí síly normálová $n_x r \Delta \varphi$ a posouvající $t_{xt} r \Delta \varphi$; podle zákona o vzájemnosti tangenciálních napětí, který platí i v křivočaré ortogonální soustavě xtn , jsou posouvající síly stejné, tedy

$$t_{xt} = t_{tx}.$$

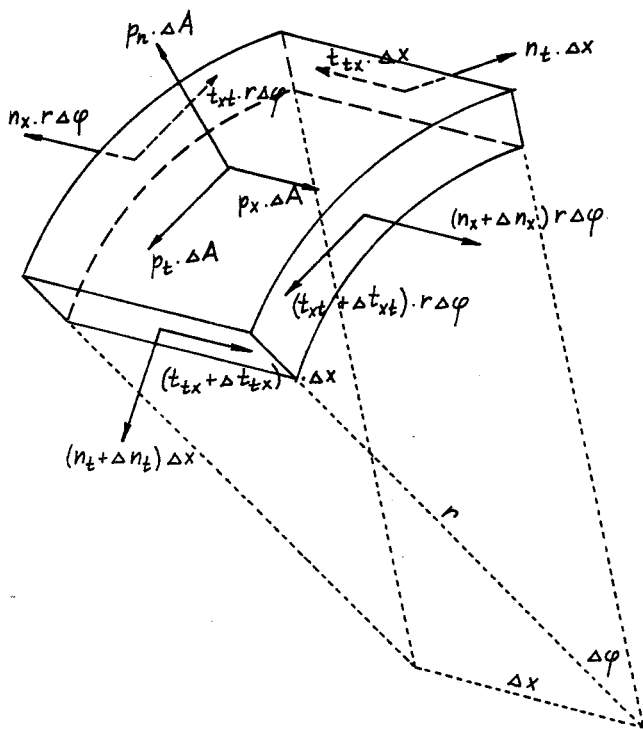
Vnější zatížení prvku můžeme rozložit do směrů x , t a n , takže ve směru osy x působí na prvek síla $p_x \cdot \Delta A$, ve směru tečném k řídicí křivce síla velikosti $p_t \cdot \Delta A$ a ve směru normály k ploše síla $p_n \cdot \Delta A$. Napišme podmínky rovnováhy ve směrech x , t a n . Dostáváme postupně tyto podmínky (vzhledem k velmi malým rozměrům prvku můžeme v podmínce pro směr t předpokládat, že síla n_t se do směru t promítá plnou hodnotou, protože $\cos(\Delta \varphi / 2)$ je téměř roven jedné):

$$\begin{aligned} -n_x r \Delta \varphi + (n_x + \Delta n_x) r \Delta \varphi - t_{tx} \Delta x + (t_{tx} + \Delta t_{tx}) \Delta x + p_x \Delta A &= 0, \\ -n_t \Delta x + (n_t + \Delta n_t) \Delta x - t_{xt} r \Delta \varphi + (t_{xt} + \Delta t_{xt}) r \Delta \varphi + p_t \Delta A &= 0, \\ -n_t \Delta x \frac{\Delta \varphi}{2} - (n_t + \Delta n_t) \Delta x \frac{\Delta \varphi}{2} + p_n \Delta A &= 0. \end{aligned}$$

Dělíme-li všechny podmínky plochou prvku $\Delta A = \Delta x \cdot r \cdot \Delta \varphi$, dostáváme po zrušení se členů stejně velikých a opačného znaménka

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n_x}{\Delta x} + \frac{\Delta t_{tx}}{r \Delta \varphi} + p_x &= 0, \\ \frac{\Delta n_t}{r \Delta \varphi} + \frac{\Delta t_{xt}}{\Delta x} + p_t &= 0, \\ \frac{n_t}{r} + \frac{1}{2} \frac{\Delta n_t}{r} - p_n &= 0. \end{aligned}$$

Jestliže se Δx i $\Delta \varphi$ blíží k nule, zmenšují se příslušně i přírůstky měrných sil. V limitě pak poměry přírůstků přecházejí v derivace, a ve třetí rovnici můžeme druhý člen jako nekonečně malý oproti zbyvajícím zanedbat. Dostáváme potom,



Obr. 14.19. Síly působící na prvek válcové skořepiny.

obrátime-li pořadí rovnic, po jednoduchých úpravách

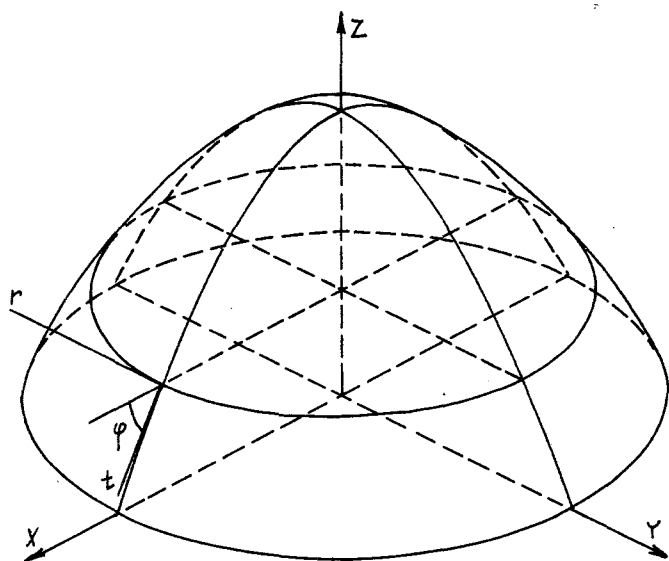
$$n_t = r \cdot p_n, \quad /14.3/$$

$$\frac{\partial t_{xt}}{\partial x} = -p_t - \frac{1}{r} \frac{\partial n_t}{\partial \varphi}, \quad /14.4/$$

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} = -p_x - \frac{1}{r} \frac{\partial t_{tx}}{\partial \varphi} \quad /14.5/$$

Rovnice /14.3/, /14.4/ a /14.5/ představují podmínky k stanovení měrných normálových a posouvajících sil válcové skořepiny. Při řešení postupujeme tak, že z rovnice /14.3/ určíme měrnou normálovou sílu n_t , dosadíme ji do rovnice /14.4/ a integrováním této rovnice podle x dostaneme měrnou posouvající sílu t_{xt} . Nesmíme při tom zapomenout, že po integrování se v podmínce pro t_{xt} objeví integrační konstanta, resp. funkce $F_1(\varphi)$ (její derivace podle x je nulová). Tuto funkci $F_1(\varphi)$ určíme z okrajových podmínek daných podepřením skořepiny. Je-li na příklad skořepina symetrická a symetricky zatížená, musí být na ose symetrie měrná posouvající síly nulová. Po dosazení nyní již známé měrné síly $t_{tx} = t_{xt}$ do rovnice /14.5/ můžeme integrováním rovnice podle x vypočíst měrnou normálovou sílu n_x , opět s integrační funkcí $F_2(\varphi)$. I tuto funkci určíme z okrajových podmínek podepření skořepiny, při prostém podepření v čelech je zde (to je pro $x = \pm l/2$, kde l je délka skořepiny ve směru x) $n_x = 0$. S postupem výpočtu válcové skořepiny se můžeme blíže seznámit na příkladech, které jsou uvedeny na konci tohoto odstavce.

Rotační skořepiny jsou takové, jejichž střednicová plocha je rotační, tedy taková, která vznikne rotací rovinné křivky kolem svislé osy z . Celá konstrukce i zatížení uvažujeme rotačně symetrické kolem osy z , bude tedy i napjatost kolem této osy rotačně symetrická. Zavedeme-li na rotační skořepině souřadný systém jako na obrázku



Obr. 14.20. Souřadný systém rotační skořepiny.

14.20, je z důvodu rotační symetrie napjatost podél libovolné rovnoběžky konstantní. Označíme-li jako směr r směr tečný k rovnoběžkové kružnici a jako směr t směr tečný k poledníku (to je průsečnici střednicové plochy skořepiny a svislé roviny proložené osou z), budou v obecném místě jednoznačně určeném úhlem φ (úhel mezi směrem t a průměrem rovnoběžkové kružnice) působit pouze dvě měrné vnitřní síly, a to normálové síly n_t a n_r - posouvající síla $t_{tr} = t_{rt} =$

$= 0$. Měrná normálová síla n_r se nazývá "rovnoběžková síla" a měrná normálová síla n_t se označuje "poledníková síla". Zatížení p na jednotku plochy obecného bodu skořepiny musí kvůli rotační symetrii působit v poledníkové rovině. Může-

me je tedy rozložit do dvou složek - do svislé složky p_z a vodorovné p_v (obr. 14.21/).

Poledníkovou sílu n_t můžeme stanovit přímo ze směrové podmínky rovnováhy ve svislém směru na vrchlíku skořepiny, odděleném rovnoběžkovou kružnicí o poloměru r (obr. 14.22/). Označme Q_r výslednici vnějšího zatížení na tento vrchlík. Tuto výslednici vypočteme ze známé hodnoty svislého zatížení p_z tak, že na vrchlíku vyjme ve vzdálenosti x proužek vodorovné šířky dx . Tečna v místě x je od vodorovné odchýlena o úhel φ_x , takže šířka proužku na skořepině je $dx/\cos \varphi_x$. Velikost svislé síly působící na proužek je (p_z je funkcí x)

$$dQ = p_z \cdot 2\pi x \frac{dx}{\cos \varphi_x}$$

a hodnotu celé síly Q_r působící na vrchlík skořepiny o poloměru rovnoběžkové kružnice r získáme integrací

$$Q_r = \int_0^r \frac{2\pi x p_z}{\cos \varphi_x} dx.$$

Jedinou vnitřní silou působící na vrchlík je měrná normálová síla n_t , která působí podél rovnoběžkové kružnice délky $2\pi r$ odkloněna od vodorovné o úhel φ . Podmínka rovnováhy ve svislém směru má tedy tvar

$$Q_r - 2\pi r n_t \sin \varphi = 0$$

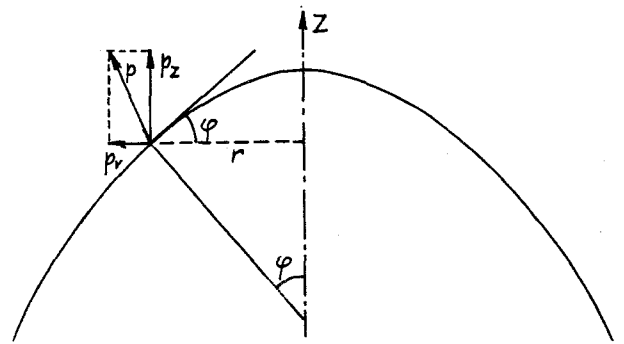
a odtud dostáváme po dosazení za vnější sílu Q_r , působící na vrchlík skořepiny

$$\begin{aligned} n_t &= \frac{Q_r}{2\pi r \sin \varphi} = \\ &= \frac{1}{r \sin \varphi} \int_0^r \frac{x p_z}{\cos \varphi_x} dx. \end{aligned}$$

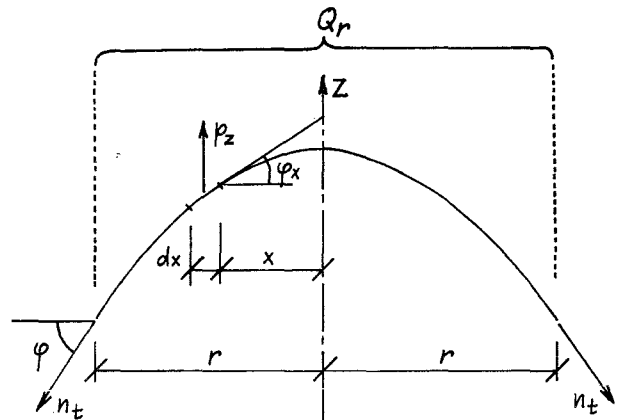
/14.6/

Při výpočtu poledníkové síly n_t podle vztahu /14.6/ nesmíme zapomenout na to, že svislé zatížení p_z je uvažováno na jednotku plochy skořepiny. Proto v tom případě, že máme zadáno zatížení na jednotku vodorovné plochy (na příklad zatížení sněhem), je výhodnější počítat měrnou sílu n_t přímo pomocí síly Q_r .

Druhou měrnou normálovou silou rotační skořepiny, rovnoběžkovou sílu n_r , určíme z rovnováhy elementu vyříznutého ze skořepiny dvěma rovnoběžkami příslu-

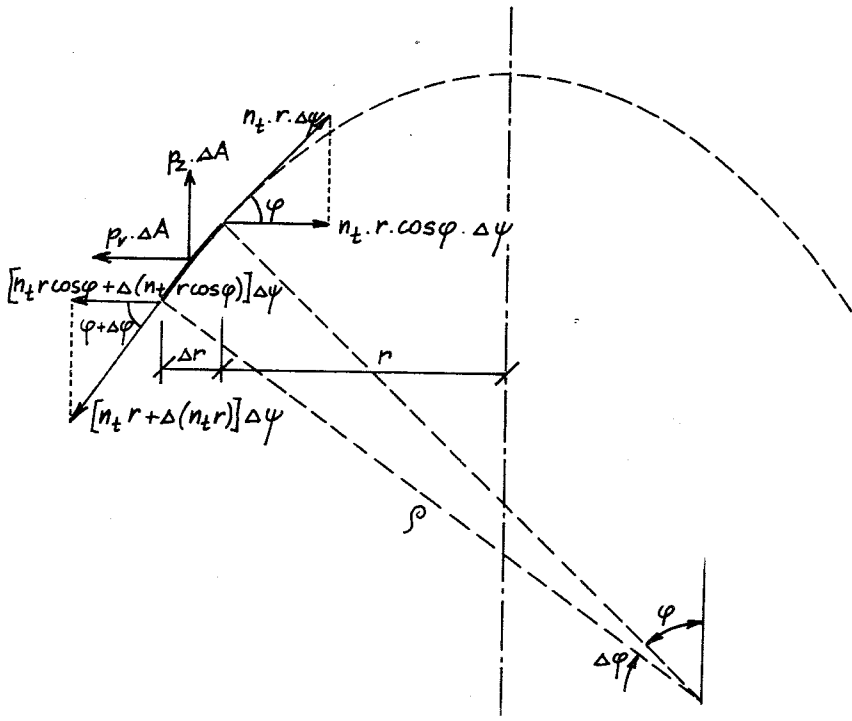
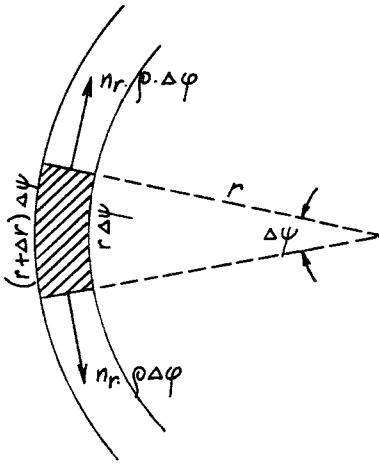


Obr. 14.21. Vnější zatížení skořepiny.



Obr. 14.22. Výpočet měrné normálové síly n_t - poledníkové síly.

šejícími úhly φ a $\varphi + \Delta\varphi$ a dvěma poledníky odchýlenými o úhel $\Delta\psi$ /obr.14.23/.
Délky stran vyjmutého elementu jsou $r \Delta\psi$, $(r + \Delta r) \Delta\psi$ a $\rho \Delta\varphi$. Na šikmé straně působí měrné normálové síly n_r . Délka těchto stran je $\rho \Delta\varphi$, takže velikost sil působících na tyto strany je $n_r \cdot \rho \cdot \Delta\varphi$. Na horní stranu elementu působí měrná normálová síla n_t , jejíž průmět do vodorovné je roven $n_t \cdot \cos \varphi$ a protože délka této strany je $r \cdot \Delta\psi$, celková velikost vodorovného průmětu síly je rovna $n_t \cdot r \cdot \cos \varphi \cdot \Delta\psi$. Na spodní stranu elementu působí měrná normálová síla n_t zvětšená o přírůstek, a protože i poloměr r rovnoběžkové kružnice a úhel φ se zvětší o přírůstek, bude velikost vodorovného průmětu síly působící na spodní stranu elementu $[n_t \cdot r \cdot \cos \varphi + \Delta(n_t \cdot r \cdot \cos \varphi)] \cdot \Delta\psi$. Plocha elementu je $\Delta A = r \Delta\varphi \rho \Delta\psi$ a velikost vnějších sil působících na element je $p_z \Delta A$ ve svislém směru a ve vodorovném směru to je $p_v \Delta A$.



Obr. 14.23. Výpočet měrné normálové síly n_r .

Napišme podmínku rovnováhy na elementu ve vodorovném směru od osy z . Síly působící na šikmé strany jsou odkloněny o úhel $\Delta\psi/2$, a protože se jedná o malý úhel, platí přibližně $\sin(\Delta\psi/2) \approx \Delta\psi/2$. Uvedená směrová podmínka rovnováhy má tedy tvar

$$-n_t r \cos \varphi \Delta\psi + [n_t r \cos \varphi + \Delta(n_t r \cos \varphi)] \Delta\psi - 2n_r \rho \Delta\varphi \frac{\Delta\psi}{2} + p_v \Delta A = 0.$$

Dělíme-li rovnici členem $\Delta\varphi \rho \Delta\psi$, dostáváme po osamostatnění členu n_r

$$n_r = p_v r + \frac{1}{\rho} \frac{\Delta(n_t r \cos \varphi)}{\Delta\varphi}.$$

Zmenšujeme-li přírůstek úhlu φ k nule, zmenšuje se současně přírůstek poloměru r i přírůstek měrné normálové síly n_t . Poměr přírůstků se pak blíží k derivaci a v limitě dostáváme

$$n_r = p_v \cdot r + \frac{1}{\rho} \frac{d(n_t r \cos \varphi)}{d\varphi}. \quad /14.7/$$

Na kuželové skořepině je úhel φ konstantní, takže ve výrazu pro diferenciál délky poledníku použijeme místo $\rho d\varphi$ přímo členu ds ($\rho = \infty$, $d\varphi = 0$, $\rho \cdot d\varphi$ je neurčitý výraz). Závislosti /14.6/ a /14.7/ tím zjednodušíme na tvar

$$n_{t, \text{kuž}} = \frac{Q_r}{2\pi r \sin \varphi} = \frac{1}{r \sin \varphi \cos \varphi} \int_0^r x \cdot p_z dx, \quad /14.8/$$

$$n_{r, \text{kuž}} = p_v \cdot r + \cos \varphi \cdot \frac{d(n_t r)}{ds} = p_v \cdot r + \cos^2 \varphi \frac{d(n_t \cdot r)}{dr}. \quad /14.9/$$

Při stanovování měrných sil na rotační skořepině tedy postupujeme tak, že z rovnice /14.6/ resp. /14.8/ pro kuželovou skořepinu určíme pomocí Q_r nebo p_z velikost poledníkových sil n_t a pomocí nich pak z rovnice /14.7/ resp. /14.9/ velikost rovnoběžkových sil n_r . Postup si nejlépe ozřejmíme na příkladech, které jsou na konci tohoto odstavce.

Pokud jde o podepření rotačních skořepin, nejvýhodnější podepření ze statického hlediska je takové, které nebrání ani pootočení okraje skořepiny, ani protažení či zkrácení okraje. Vetknutí okraje nebo kloubové neposuvné podepření není zcela vhodné, protože způsobuje vznik poruch membránového stavu napjatosti a tedy značných chybových momentů v blízkosti okraje.

Příklad 14.3.1.

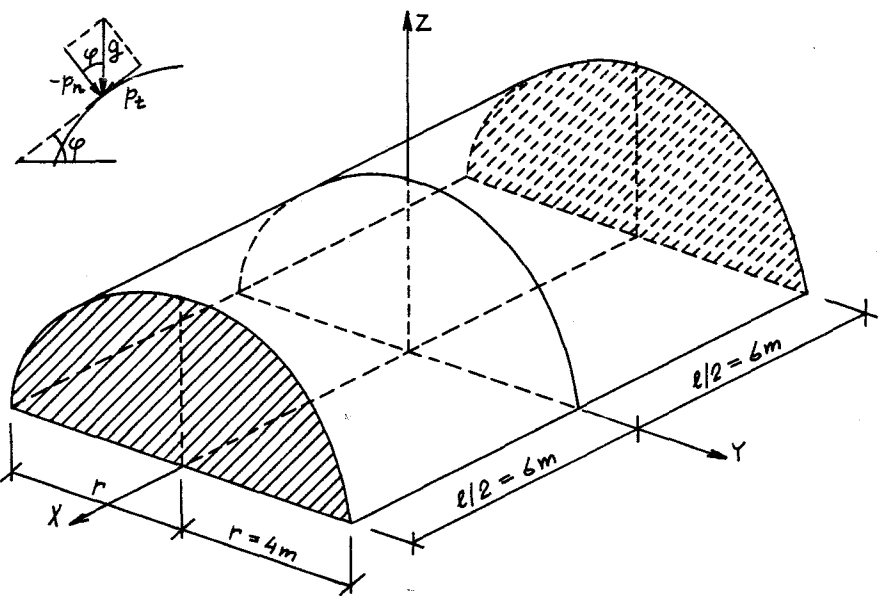
Vypočtete měrné síly ve válcové půlkruhové skořepině od zatížení vlastní tíhou. Skořepina je podepřena v čelech. Rozměry skořepiny jsou uvedeny na obrázku 14.24, intenzita zatížení je $g = 1250 \text{ N/m}^2$.

Řešení: Zatížení má po celé ploše konstantní intenzitu a jeho směr je svislý. Rozložíme je do složky normálové a tečné, složka ve směru osy x je nulová. Platí

$$p_n = -g \cos \varphi,$$

$$p_t = g \sin \varphi.$$

Po dosazení do vztahu /14.3/ dos-



Obr. 14.24. Půlkruhová válcová skořepina.

táváme velikost měrné normálové síly n_t

$$n_t = r p_n = -gr \cos \varphi$$

a po dosazení do /14.4/ dostáváme podmínku

$$\frac{\partial t_{xt}}{\partial x} = -p_t - \frac{1}{r} \frac{\partial n_t}{\partial \varphi} = -g \sin \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (-gr \cos \varphi) = -2g \sin \varphi.$$

Po integraci vychází

$$t_{xt} = -2gx \sin \varphi + F_1(\varphi).$$

Na ose symetrie, to je pro $x = 0$, musí být posouvající síla nulová, takže integrační funkce $F_1(\varphi)$ je rovna nule. Výraz pro $t_{xt} = t_{tx}$ dosadíme nyní do rovnice /14.5/ a dostáváme

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} = -p_x - \frac{1}{r} \frac{\partial t_{xt}}{\partial \varphi} = 0 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (-2gx \sin \varphi) = \frac{2gx}{r} \cos \varphi.$$

Po integraci vychází

$$n_x = \frac{gx^2}{r} \cos \varphi + F_2(\varphi).$$

Integrační funkci $F_2(\varphi)$ určíme též z okrajových podmínek. V čelech je skořepina prostě podepřena, takže vodorovné síly (kolmé k okraji) tam musí být nulové, neboli pro

$$x = \pm \frac{\ell}{2} \dots n_x = 0 \implies \frac{g\ell^2}{4r} \cos \varphi + F_2(\varphi) = 0 \dots F_2(\varphi) = -\frac{g\ell^2}{4r} \cos \varphi.$$

Měrné normálové a posouvající síly se tedy ve válcové půlkruhové skořepině zatížené vlastní tíhou řídí funkcemi

$$n_x = -\frac{g}{r} \left(\frac{\ell^2}{4} - x^2 \right) \cos \varphi, \quad n_t = -gr \sin \varphi, \quad t_{xt} = -2gx \sin \varphi$$

a v rozměrech příkladu

$$n_x = -312,5 (36 - x^2) \cos \varphi, \quad n_t = -5000 \cos \varphi, \quad t_{xt} = -2500 x \sin \varphi$$

v jednotkách N/m.

Měrné normálové síly n_x se po délce skořepiny mění obdobně jako ohybové momenty na prostém nosníku, podle kvadratické paraboly, a největších hodnot nabývají uprostřed rozpětí, to je pro $x = 0$. V příčném řezu jsou největší v místě, kde je $\cos \varphi$ největší, což je ve vrcholu skořepiny ($\varphi = 0$). Největší hodnota měrné normálové síly n_x ve skořepině je pro

$$x = 0, \varphi = 0 \dots n_{x,max} = -11250 \text{ N/m}.$$

Na spodních vodorovných okrajích skořepiny ($\varphi = 90^\circ$) nejsou měrné posouvající síly nulové, je proto nutno přenést je smykem do tažených obrubních žebor. Osové síly v obrubních žeborech můžeme spočítat dvojím způsobem. Jeden způsob spočívá v tom, že určíme velikost síly, která se smykem do žebra přenesla. V místě x to bude

$$N = \int_{-\ell/2}^x t_{xt}(\varphi=90^\circ) dx = -2g \int_{-\ell/2}^x x dx = g \left(\frac{\ell^2}{4} - x^2 \right)$$

a uprostřed rozpětí

$$N_{x=0} = \frac{1}{4} g \ell^2 = \frac{1}{4} 1250 \cdot 12^2 = 45000 \text{ N}.$$

Druhá možnost je určit osovou sílu v žeburu z podmínky, že vodorovné síly v konstrukci musí být v libovolném příčném řezu v rovnováze, tedy v žeburu musí být tah tak veliký jako součet tlaků v řezu skořepiny. V průřezu x tedy musí být (délka diferenciálu je $r \cdot d\varphi$)

$$N = - \int_0^{\pi/2} n_x (r d\varphi) = g \left(\frac{\ell^2}{4} - x^2 \right) \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = g \left(\frac{\ell^2}{4} - x^2 \right).$$

Na obrázku 14.25 jsou vyneseny průběhy měrných sil ve význačných příčných řezech skořepiny : měrná vodorovná síla n_x v řezu uprostřed rozpětí, měrná posouvající síla t_{xt} v řezu v lici podpory ; měrná normálová síla n_t je ve všech příčných řezech stejná. Po délce skořepiny se měrná normálová síla n_x mění podle kvadratické paraboly (nad podporou je nulová), měrná posouvající síla t_{xt} se mění lineárně, uprostřed rozpětí je nulová, měrná normálová síla n_t je konstantní.

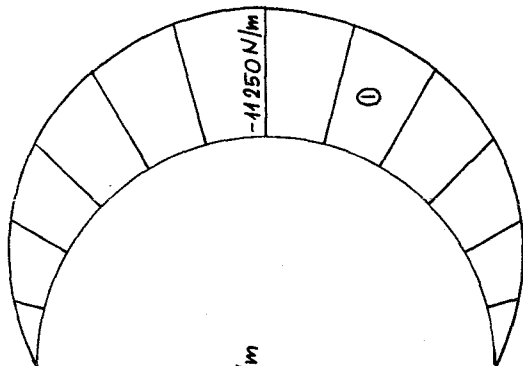
Za pozornost stojí okolnost, že na dolním okraji je n_t , to je měrná normálová síla kolmá k okraji, rovna nule. Jinak by totiž nemohl ve skořepině membránový stav napjatosti vůbec nastat. Z tohoto důvodu ve válcové skořepině podepřené pouze v čelech vznikají ve skořepině ohybové momenty (poruchy membránového stavu), pokud skořepina nemá svíslé okraje, již od vlastní tíhy. Ze statického hlediska je proto půlkruhová skořepina výhodnější nežli kruhový segment.

Příklad 14.3.2.

Vypočtete měrné síly ve válcové skořepině z příkladu 14.3.1 od zatížení rovnoměrně rozloženého po vodorovné (sníh). Intenzita zatížení je rovna $q = 1400 \text{ N/m}^2$.

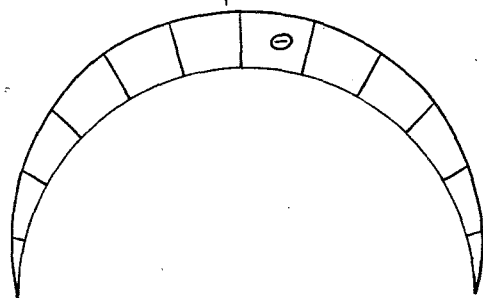
Řešení : Nejprve je nutno zatížení po vodorovné převést na zatížení po střednicio-

$n_x \dots x = 0$ (střed rozpětí)

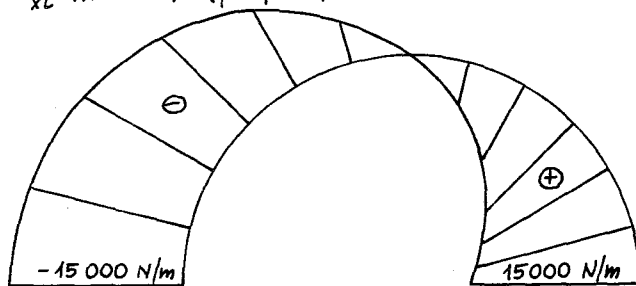


n_t

-5000 N/m

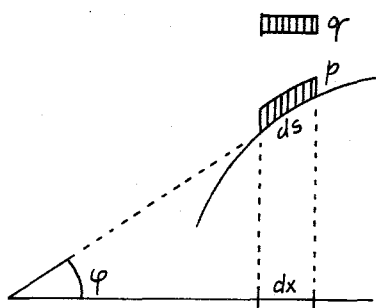


$t_{xt} \dots x = -\ell/2$ (podpora)



Obr. 14.25. Průběhy měrných sil na půlkruhové válcové skořepině zatížené vlastní tíhou.

vé ploše. Mezi diferenciály délky ve vodorovném směru a podél střednicové plochy platí podle obrázku 14.26 vztah



Obr. 14.26. Zatížení po vodorovné.

$$dx = ds \cdot \cos \varphi.$$

Aby zatížení po vodorovné a po střednicové ploše bylo ekvivalentní, musí platit

$$q dx = p ds$$

a odtud pak

$$p = q \cdot \cos \varphi.$$

Svislé zatížení p po střednicové ploše nyní rozložíme na složky normálovou a tečnou stejně jako v předešlém příkladu, takže dostáváme

$$p_n = -p \cos \varphi = -q \cos^2 \varphi, \quad p_t = p \sin \varphi = q \sin \varphi \cos \varphi.$$

Další postup je stejný jako v předešlém příkladu

$$n_t = r p_n = -q r \cos^2 \varphi,$$

$$\frac{\partial t_{xt}}{\partial x} = -p_t - \frac{1}{r} \frac{\partial n_t}{\partial \varphi} = -q \sin \varphi \cos \varphi - 2q \sin \varphi \cos \varphi = -\frac{3}{2} q \sin 2\varphi,$$

$$t_{xt} = -\frac{3}{2} q x \sin 2\varphi + F_1(\varphi).$$

V rovině symetrie, to je pro $x = 0$, musí být $t_{xt} = 0$, takže dostáváme pro integrační funkci $F_1(\varphi) = 0$. Dále pak

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} = -p_x - \frac{1}{r} \frac{\partial t_{xt}}{\partial \varphi} = 0 + \frac{3q x}{2r} 2 \cos 2\varphi = \frac{3q x}{r} \cos 2\varphi,$$

$$n_x = \frac{3}{2} \frac{q x^2}{r} \cos 2\varphi + F_2(\varphi).$$

Funkci $F_2(\varphi)$ určíme opět z podmínky, že v podporách, to je pro $x = l/2$, je měrná normálová síla kolmá k okraji rovna nule, takže dostáváme

$$F_2(\varphi) = -\frac{3}{2} \frac{q}{r} \frac{l^2}{4} \cos 2\varphi.$$

Závislosti pro měrné normálové a posouvající síly na válcové půlkruhové skořepině zatížené rovnoměrně po vodorovné jsou tedy

$$n_x = -\frac{3}{2} \frac{q}{r} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right) \cos 2\varphi,$$

$$n_t = -q r \cos^2 \varphi,$$

$$t_{xt} = -\frac{3}{2} q x \sin 2\varphi$$

a v číselných hodnotách příkladu

$$n_x = -525 (36 - x^2) \cos 2\varphi,$$

$$n_t = -5600 \cos^2 \varphi,$$

$$t_{xt} = -2100 x \sin 2\varphi.$$

Extrémní hodnoty vodorovné měrné normálové síly n_x jsou uprostřed rozpětí, a to ve vrcholu ($\varphi = 0^\circ$) a na okraji ($\varphi = 90^\circ$). Je tam

$$n_{x, \max} = -525 \cdot 36 (\pm 1) = \mp 18900 \text{ N/m} = \mp 18,9 \text{ kN/m}.$$

Měrné posouvající síly na spodním okraji ($\varphi = 90^\circ$) jsou nulové, takže obrubní že-

bra nezatěžují. Nebyla by proto pro zatížení po vodorovné obrubní žebra vůbec nutná, ovšem vlastní tíha si je vynucuje. Extrémní hodnoty jsou v lici podpory, a to pro úhel $\varphi = 45^\circ$, a jsou rovny

$$t_{xt, \max} = 2100 \cdot 6 \cdot 1 = 12\,600 \text{ N/m} = 12,6 \text{ kN/m}.$$

Průběhy měrných normálových a posouvajících sil pro zatížení rovnoměrně rozložené po vodorovné jsou vykresleny na obrázku 14.27.

Příklad 14.3.3.

Vyřešte měrné síly v kulové skořepině od zatížení vlastní tíhou. Poloměr kulové bány je $R = 20 \text{ m}$, intenzita zatížení je rovna $g = 1250 \text{ N/m}^2$ (obrázek 14.28/.

Řešení: Křivost poledníků je na kulové skořepině konstantní, pro poloměr křivosti platí $\rho = R$. Závislost mezi poloměrem rovnoběžkové kružnice r a úhlem mezi tečnou a vodorovnou φ je

$$r = R \sin \varphi$$

a obdobně pro x

$$x = R \sin \varphi_x.$$

Svislá složka $p_z = -g$ a vodorovná složka $p_v = 0$. Po dosazení do vztahu /14.6/ dostáváme pro měrnou poledníkovou normálovou sílu n_t

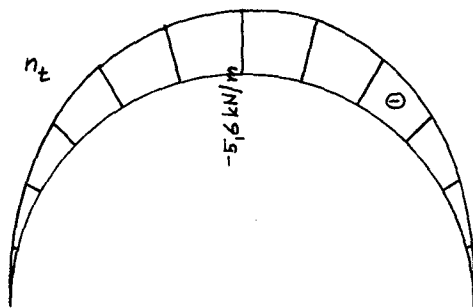
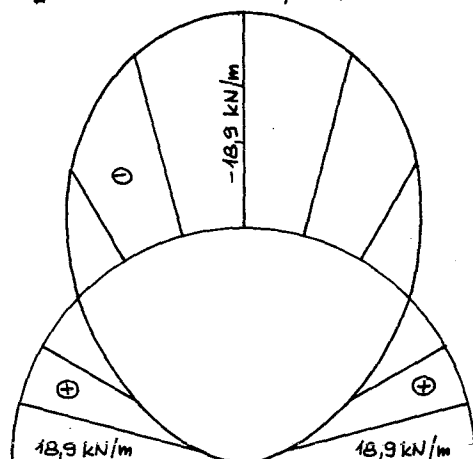
$$\begin{aligned} n_t &= \frac{1}{r \sin \varphi} \int_0^r \frac{x p_z}{\cos \varphi_x} dx = \\ &= \frac{1}{R \sin^2 \varphi} \int_0^\varphi \frac{R \sin \varphi_x (-g)}{\cos \varphi_x} (R \cos \varphi_x d\varphi_x) \end{aligned}$$

$$n_t = -\frac{gR}{1 + \cos \varphi}$$

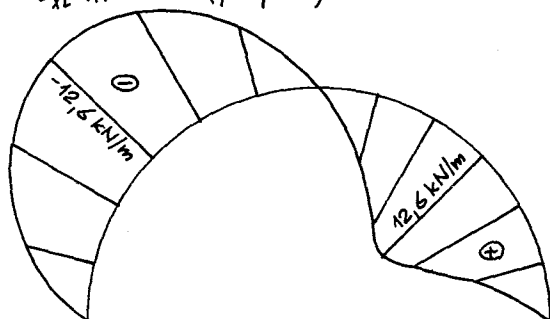
Za sílu n_t nyní dosadíme do vztahu pro n_r /14.7/ a získáme

$$\begin{aligned} n_r &= p_v \cdot r + \frac{1}{\rho} \frac{d(n_t r \cos \varphi)}{d\varphi} = \\ &= 0 + \frac{1}{R} \frac{d}{d\varphi} \left(-\frac{gR}{1 + \cos \varphi} R \sin \varphi \cdot \cos \varphi \right) = gR \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}. \end{aligned}$$

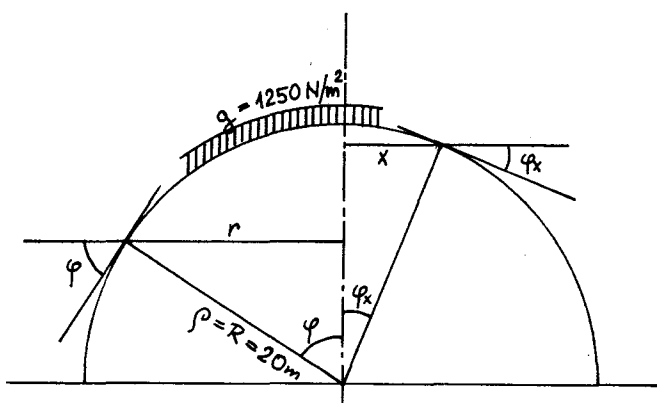
$n_x \dots x=0$ (střed rozpětí)



$t_{xt} \dots x=l/2$ (podpora)



Obr. 14.27. Průběhy měrných normálových a posouvajících sil na půlkruhové válcové skořepině zatížené rovnoměrně po vodorovné.



Obr. 14.28. Kulová skořepina.

Ve vrchlu skořepiny (pro $\varphi = 0$) je

$$n_t = -\frac{1}{2} g R = -\frac{1}{2} 1250 \cdot 20 = -12\,500 \text{ N/m} = -12,5 \text{ kN/m},$$

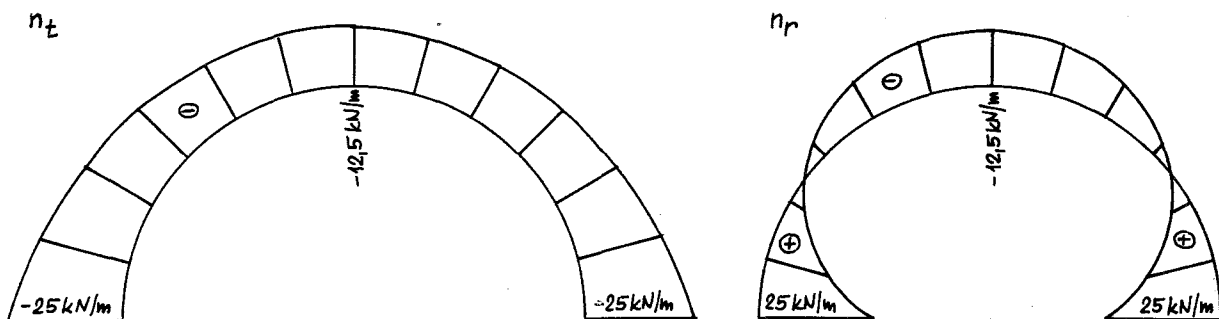
$$n_r = -\frac{1}{2} g R = -12,5 \text{ kN/m}$$

a v patě skořepiny (pro $\varphi = 90^\circ$) je

$$n_t = -g R = -1250 \cdot 20 = -25\,000 \text{ N/m} = -25 \text{ kN/m},$$

$$n_r = g R = 25 \text{ kN/m}.$$

Průběhy měrných normálových sil v kulové skořepině od vlastní tíhy jsou uvedeny na obrázku 14.29.



Obr. 14.29. Měrné normálové síly v kulové skořepině od zatížení vlastní tíhou.

Příklad 14.3.4.

Vyřešte měrné síly v kulové skořepině z příkladu 14.3.3 od zatížení rovnoměrně rozloženého po vodorovné. Intenzita zatížení je $q = 1400 \text{ N/m}^2$.

Řešení: Poledníkovou sílu n_t určíme opět pomocí vztahu /14.6/, ovšem vzhledem k tomu, že zatížení je zadáno na m^2 půdorysné plochy, bude jednodušší určit přímo velikost Q_r , aniž bychom zatížení přepočítávali na m^2 střednicové plochy. Vnější síla připadající na kruh o poloměru r je rovna

$$Q_r = -\pi r^2 q,$$

takže po dosazení do vzorce /14.6/ dostáváme

$$n_t = \frac{Q_r}{2\pi r \sin\varphi} = \frac{-\pi r^2 q}{2\pi r \sin\varphi} = -\frac{q r}{2 \sin\varphi} = -\frac{q R \sin\varphi}{2 \sin\varphi} = -\frac{1}{2} q R.$$

Vodorovná složka zatížení p_v je nulová a po dosazení do vztahu /14.7/ dostáváme výraz pro rovnoběžkovou sílu

$$n_r = 0 \cdot r + \frac{1}{\rho} \frac{d(n_t r \cos\varphi)}{d\varphi} = \frac{1}{R} \frac{d}{d\varphi} \left(-\frac{1}{2} q R \cdot R \sin\varphi \cdot \cos\varphi \right) = -\frac{1}{2} q R \cos 2\varphi.$$

Vidíme, že poledníková síla n_t je konstantní, její číselná velikost je

$$n_t = -\frac{1}{2} 1400 \cdot 20 = -14\,000 \text{ N/m} = -14 \text{ kN/m}.$$

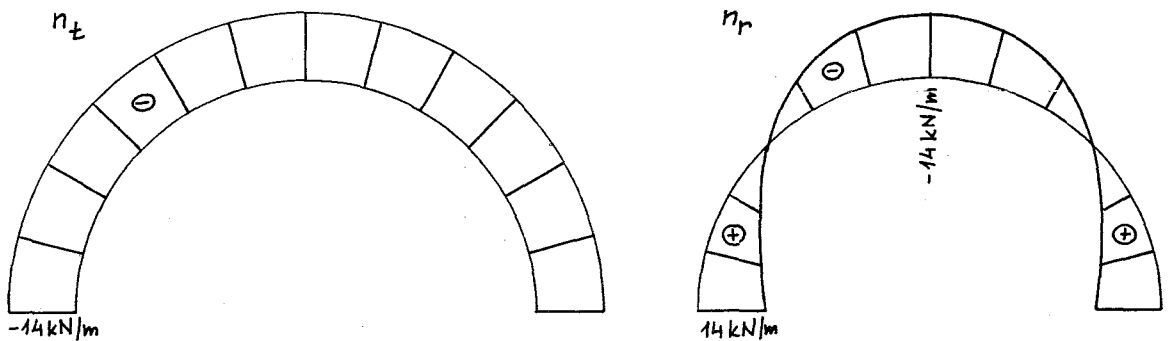
Rovnoběžková síla nabývá extrémních hodnot pro $\varphi = 0^\circ$ a $\varphi = 90^\circ$. Ve vrcholu je její číselná velikost

$$n_r = -\frac{1}{2} 1400 \cdot 20 \cdot \cos 0 = -14\,000 \text{ N/m} = -14 \text{ kN/m},$$

v patě skořepiny pak

$$n_r = -\frac{1}{2} 1400 \cdot 20 \cdot \cos(2.90^\circ) = +14\,000 \text{ N/m} = +14 \text{ kN/m}.$$

Průběhy měrných normálových sil v kulové skořepině od zatížení rovnoměrného po vodorovné (sníh) jsou uvedeny na obrázku 14.30.



Obr. 14.30. Měrné síly v kulové skořepině od zatížení rovnoměrného po vodorovné.

Příklad 14.3.5.

Stanovte měrné síly v kulové skořepině o poloměru $R = 10 \text{ m}$ od zatížení tíhou lucerny $Q = 12 \text{ kN}$ ve vrcholu skořepiny. Vnitřní poloměr lucerny je $r_0 = 1,3 \text{ m}$ (obr. 14.31/).

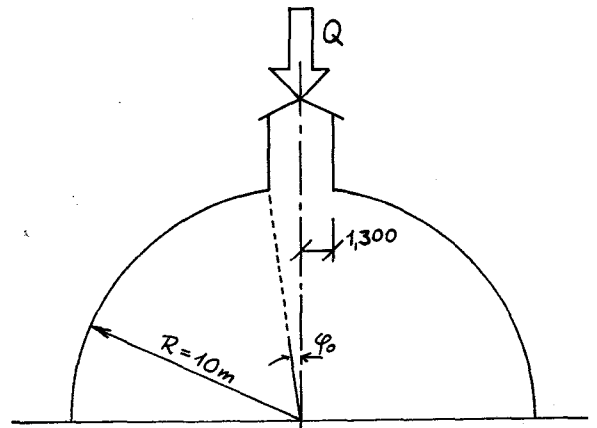
Řešení : Nejprve si určíme středový úhel φ_0 , který přísluší okraji lucerny. Tento úhel je

$$\sin \varphi_0 = \frac{1,3}{10} = 0,13 \dots \varphi_0 = 7^\circ 28'.$$

Měrné poledníkové síly n_t určíme opět pomocí vztahu /14.6/, kde $Q_r = -Q$ je konstantní. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} n_t &= \frac{Q_r}{2\pi r \sin \varphi} = \frac{-Q}{2\pi R \sin \varphi \cdot \sin \varphi} = \\ &= -\frac{Q}{2\pi R \sin^2 \varphi} \end{aligned}$$

Po dosazení do výrazu /14.7/ obdržíme vztah pro hodnotu rovnoběžko-



Obr. 14.31. Kulová skořepina s lucernou.

vé síly n_r . Dostáváme

$$n_r = p_v \cdot r + \frac{1}{\rho} \frac{d(n_t r \cos \varphi)}{d\varphi} = 0 + \frac{1}{R} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{-Q}{2\pi R \sin^2 \varphi} R \sin \varphi \cdot \cos \varphi \right) =$$

$$= \frac{Q}{2\pi R \sin^2 \varphi} = -n_t.$$

Velikosti měrných rovnoběžkových i poledníkových sil jsou číselně stejné, ovšem poledníkové síly jsou tlakové a rovnoběžkové tahové. Největších hodnot nabývají v patě lucerny, a to

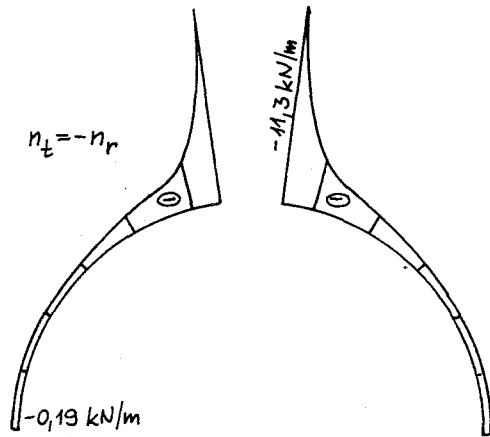
$$n_r = -n_t = \frac{12}{2\pi \cdot 10 \cdot \sin^2 \varphi_0} = 11,3 \text{ kN/m},$$

nejmenších v patě skořepiny

$$n_r = -n_t = \frac{12}{2\pi \cdot 10 \cdot \sin^2 90^\circ} = 0,19 \text{ kN/m}.$$

Průběh měrných normálových sil na kulové skořepině od zatížení tíhou lucerny je uveden na obrázku 14.32.

Vidíme, že největší napjatost vzniká ve skořepině u paty lucerny, a nabývá značně velikých hodnot zejména tehdy, je-li úhel φ_0 malý. Se zvětšováním vnitřního poloměru lucerny a tedy zvětšováním φ_0 napjatost poblíž okraje lucerny prudce klesá. Můžeme proto zvětšením vnitřního poloměru lucerny značně omezit extrémní vnitřních sil, i když se současně zvětší i



Obr. 14.32. Měrné síly v kulové skořepině od zatížení tíhou lucerny.

vlastní tíha lucerny. Extrémy se tak podstatně zmenší, ovšem celková napjatost ve skořepině se zvýší.

Příklad 14.3.6.

Porovnejte velikost podélných měrných normálových sil n_x z příkladu 14.3.1 s výsledky, které bychom získali na této skořepině podle vztahů technické pružnosti - jako na prostém nosníku.

Řešení: Skořepina je zatížena rovnoměrným zatížením $q=1400 \text{ N/m}^2$, takže každý běžný metr je zatížen

$$q_0 = 2 r q = 2 \cdot 4 \cdot 1400 = 11\,200 \text{ N/m} = 11,2 \text{ kN/m}$$

Rozpětí skořepiny jako prostého nosníku je 12 m, takže ohybový moment uprostřed vychází

$$M = \frac{1}{8} q_0 l^2 = \frac{1}{8} 11,2 \cdot 12^2 = 201,6 \text{ kNm}$$

Ve statických tabulkách zjistíme, že těžiště půlkružnice se nachází ve vzdálenosti $2 r/\pi$ od středu, moment setrvačnosti půlkružnice k těžišťové ose rovnoběžné s průměrem je $(\pi^2 - 8) r^3/2\pi$. Uvažujeme-li průřez tvaru půlkružnice s tloušťkou d , budou průřezové moduly dolních a horních vláken rovny

$$W_d = \frac{\frac{\pi^2 - 8}{2\pi} r^3 d}{\frac{2r}{\pi}} = \frac{\pi^2 - 8}{4} r^2 d = \frac{\pi^2 - 8}{4} 4^2 d = 7,4784 d$$

$$W_h = \frac{\frac{\pi^2 - 8}{2\pi} r^3 d}{r - \frac{2r}{\pi}} = \frac{\pi^2 - 8}{\pi - 2} r^2 d = \frac{\pi^2 - 8}{\pi - 2} 4^2 d = 13,1017 d$$

Měrné normálové síly jsou tedy

$$n_{x,d} = \sigma_{x,d} \cdot d = \frac{M}{W_d} d = \frac{201,6}{7,4784 d} d = 27,0 \text{ kN/m}^2$$

$$n_{x,h} = \sigma_{x,h} \cdot d = \frac{-M}{W_h} d = \frac{-201,6}{13,1017 d} d = -15,4 \text{ kN/m}^2$$

Je třeba upozornit na to, že charakter napětí je zachován pouze při zatížení p
vodorovné. Při zatížení válcové skořepiny po střednici (vlastní tíha) jsou vý-
sledky pomocí vztahů z technické pružnosti pro válcovou skořepinu zcela nepouž-
itelné (srovnej průběh napětí při prostém ohybu s průběhem měrných normálových
sil n_x vykreslených na obrázku 14.25/.

Literatura ke studiu

- /1/ Václav Dašek: Statika I. Celostátní vysokoškolská učebnice.
Praha, ČSAV 1955
- /2/ J. Ducháček: Nauka o pružnosti a pevnost - I. díl. SNTL Praha 1957
- /3/ Ducháček, Novák, Servít, Tesař: Nauka o pružnosti a pevnosti. TP 3.
SNTL Praha 1963
- /4/ Bažant, Klokner: Statika stavebních konstrukcí. TP 4.
SNTL Praha 1953
- /5/ Klokner: Statické tabulky. TP 19/II. SNTL Praha 1959
- /6/ Chobot, Hájek, Novotná: Statika stavebních konstrukcí I.
Skripta ČVUT, Praha 1979
- /7/ Novák, Hořejší: Statické tabulky pro stavební praxi. TP 51
SNTL Praha 1978
- /8/ Dašek V.: Metoda rozdělování sil a momentů se zkrácenou iterací
SNTL Praha 1966
- /9/ Kolendowicz T.: Stavební mechanika pro architekty.
SNTL Praha 1984

