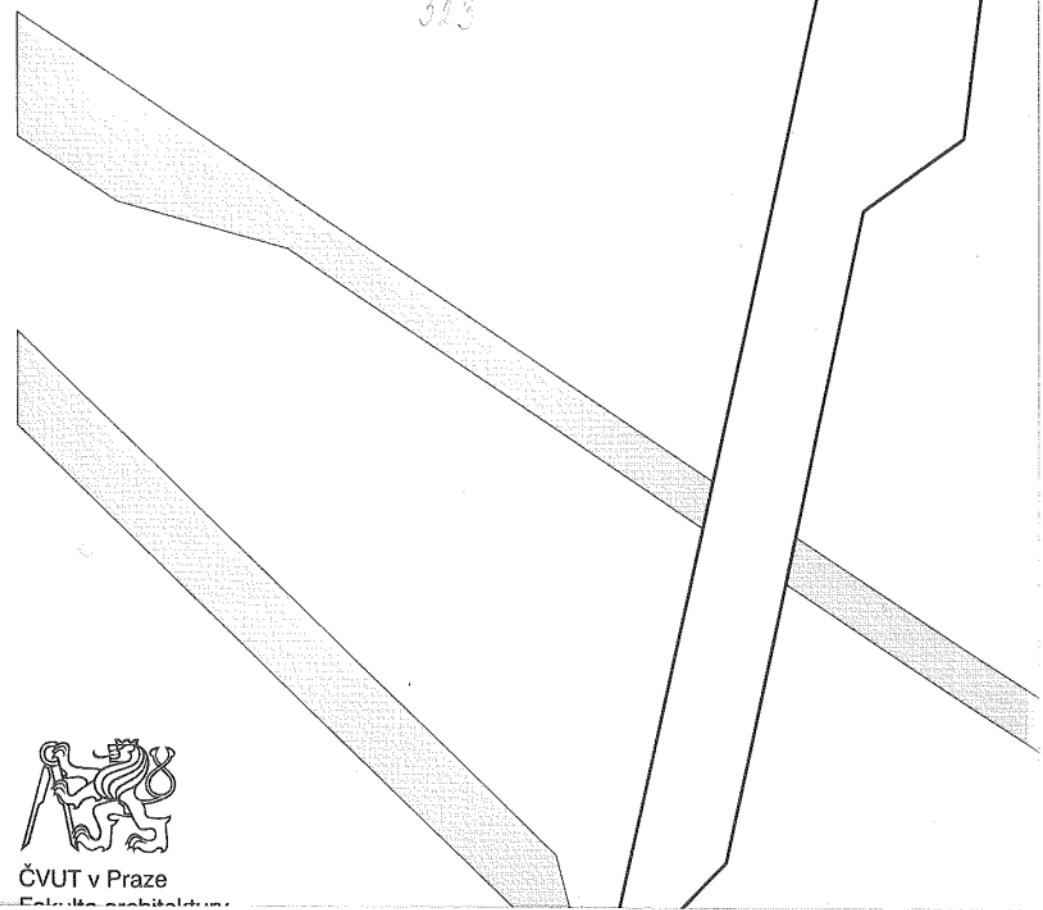


F21394 +

## STATIKA II

### Příklady

Ing. Radmila Vondrová, CSc.



ČVUT v Praze

Fakulta strojního inženýrství

# **STATIKA II**

## **Příklady**

Ing. Radmila Vondrová, CSc.

STK PRAHA



2660320624

2005  
Vydavatelství ČVUT

# **STATIKA II**

## Příklady

Ing. Radmila Vondrová, CSc.

STK PRAHA



2660320624

2005  
Vydavatelství ČVUT



STÁTNÍ TECHNICKÁ KNIHOVNA Bavarské nám. 5, Praha 1	
4163/2005	F 21394 f
16.11.	
ČVUT	
153 -	
e	

Lektor: doc. Ing. Jiří Muk, CSc.

Vydavatelství ČVUT upozorňuje autory na dodržování autorských práv.  
Za jazykovou a věcnou správnost obsahu díla odpovídá autor. Text neprošel jazykovou ani  
redakční úpravou.

© Radmila Vondrová, 2005  
ISBN 80-01-03289-2

## OBSAH

	str.
ÚVOD .....	4
1. NORMÁLOVÉ NAPĚTÍ V PRŮŘEZU PRUTU .....	5
1.1. Prosté případy namáhání průřezu prutu .....	6
1.1.1 Prostý tah a tlak .....	6
1.1.2 Staticky neurčité případy tahu a tlaku .....	11
1.1.3 Prostý (jednoduchý) ohyb .....	13
1.2. Kombinace prostých případů namáhání průřezu prutu .....	18
1.2.1 Šíkmý ohyb .....	18
1.2.2 Excentrická síla .....	22
1.2.3 Další kombinace prostých případů namáhání průřezu prutu .....	25
1.3. Jádro průřezu .....	27
2. SMYKOVÉ NAPĚTÍ V PRŮŘEZU PRUTU .....	30
2.1. Prostý smyk .....	30
2.2. Tangenciální napětí za ohybu .....	31
3. OHYBOVÁ ČÁRA PRUTU PŘI PROSTÉM OHYBU .....	33
3.1. Diferenciální rovnice ohybové čáry .....	33
3.2. Mohrovy věty .....	36
4. VZPĚRNÁ PEVNOST .....	41
4.1. Eulerovo kritické břemeno .....	41
4.2. Výpočet se vzpěrnostními součiniteli .....	43
5. ROVINNÉ STATICKY NEURČITÉ KONSTRUKCE – CROSSOVA METODA .....	47
5.1. Spojitý nosník .....	49
5.2. Rámy staticky neurčité .....	56
5.2.1 Rámy staticky neurčité s neposuvnými styčníky .....	56
5.2.2 Rámy staticky neurčité s posuvnými styčníky .....	69
5.3. Symetricky zatížené symetrické konstrukce .....	99
6. RÁMOVÉ VÝSEKY PRO ZATÍŽENÍ VYSOKÝCH BUDOV VĚTREM. Přibližné řešení .....	111
7. NOSNÉ DESKY. Přibližné řešení .....	116
LITERATURA .....	120

## Úvod

Skriptum STATIKA II, příklady, určené studentům fakulty architektury ČVUT, navazuje na přednáškové skriptum doc. Ing. Jiřího Muka, CSc, STATIKA II a skriptum Ing. R. Vondrové STATIKA I, příklady.

Skriptum je rozloženo do sedmi kapitol. V první a druhé kapitole jsou jednoduchou formou uvedeny základy pružnosti a pevnosti potřebné pro navrhování a posuzování základních úloh. Třetí a čtvrtá kapitola se okrajově zabývají otázkami přetvoření a stability prutu. Tyto problémy jsou zde vysvětleny jen na velmi jednoduchých příkladech. Pátá kapitola je věnována řešení staticky neurčitých roviných konstrukcí Crossovou metodou. Postupy výpočtů na různých typech konstrukcí jsou ukázány na mnoha příkladech. Šestá kapitola krátce pojednává o přibližném řešení ohybových momentů na vysokých budovách při zatížení větrem. V poslední sedmé kapitole je uvedeno přibližné řešení obdélníkových desek zatížených spojitým rovnoměrným zatížením.

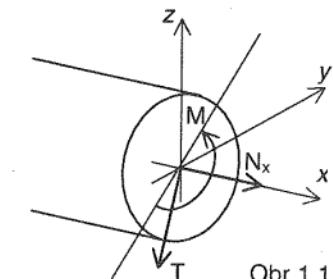
Příkladové skriptum navazující na přednáškové skriptum napomůže studentům jednotlivými příklady doplnit znalosti získané na přednáškách a tím prohloubit jejich znalosti pro přípravu ke zkoušce z předmětu Statika II a pro navrhování a posuzování konstrukcí v dalším studiu i praxi.

Doc. Ing. Jiří Muk, CSc, věnoval značnou péči rukopisu skripta a poskytl autorce cenné připomínky pro jeho zlepšení. Za to mu autorka vřele děkuje.

Mimořádný dík patří Ing. Jaroslavu Vondrovi za pečlivé přepsání textu a překreslení obrázků na počítači a za kontrolu textu i příkladů. Bez jeho obětavé práce by skriptum bylo ztěží zpracováno.

Ing. Radmila Vondrová

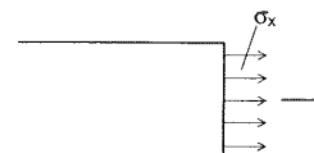
## NORMÁLOVÉ NAPĚTÍ V PRŮŘEZU PRUTU



Obr.1.1

Vnitřní síly  $T$ ,  $M$ ,  $N_x$  vyvodí v průřezu napětí: normálová síla  $N_x$  a ohybový moment normálové napětí  $\sigma_x$ , posouvající síla  $T$  (i příp. krouticí moment  $M_x$ ) tangenciální napětí  $\tau$ .

### a) Normálové napětí od normálové síly $N_x$



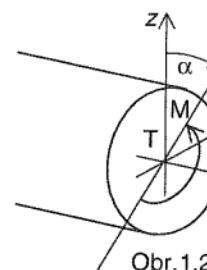
$\sigma_x$  předpokládáme rovnoměrně rozdělené po ploše průřezu:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A}$$

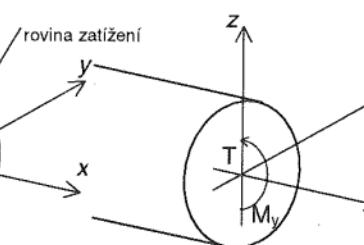
Napětí  $\sigma_x$  je kladné, je-li síla  $N_x$  tahová.

### b) Normálové napětí od ohybového momentu $M$

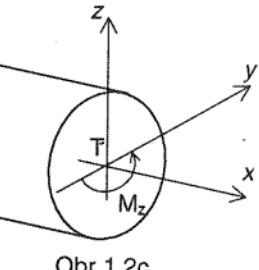
Moment  $M$  je v rovině odchýlené od roviny  $xz$  o úhel  $\alpha$ , nahradíme jej momenty  $M_y$  a  $M_z$ , kladné směry jsou zřejmé z obr. 1.2a,b,c. Osa  $x$  prochází těžištěm průřezu a osy  $y,z$  jsou centrální osy setrvačnosti.



Obr.1.2a

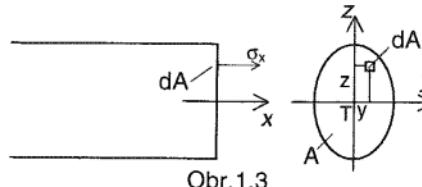


Obr.1.2b



Obr.1.2c

$M_y$  ohýbá kolem osy  $y$  v rovině  $xz$ ,  $M_y = Mcos\alpha$ ,  
 $M_z$  ohýbá kolem osy  $z$  v rovině  $xy$ ,  $M_z = Msina\alpha$ .



Obr.1.3

Na plošku  $dA$  působí elementární tahová síla  $\sigma_x dA$ . Rozložení napětí po ploše A předpokládáme lineární a volíme je ve tvaru:

$$\sigma_x = a.y + b.z, \text{ kde } a, b \text{ jsou konstanty.}$$

Dále předpokládáme:  $\sigma_y = \sigma_z = \tau = 0$ .

Pak platí pro kladné  $\sigma_x$  (obr.1.3), kladné souřadnice  $y,z$  a kladné ohybové momenty  $M_y$  a  $M_z$  (obr.1.2b a 1.2c):  $M_y = -\int_A z \cdot \sigma_x dA$ ,  $M_z = -\int_A y \cdot \sigma_x dA$ .

Po dosazení za  $\sigma_x$  je

$$M_y = - \int_A z(ay + bz) dA = -a \int_A yz dA - b \int_A z^2 dA = -aI_{yz} - bI_y,$$

$$M_z = - \int_A y(ay + bz) dA = -a \int_A y^2 dA - b \int_A yz dA = -aI_z - bI_{yz}.$$

Jestliže osy y a z jsou hlavní centrální osy setrvačnosti, pak  $I_{yz}=0$  a platí:

$$M_y = -bI_y \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{M_y}{I_y}, \quad M_z = -aI_z \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{M_z}{I_z}.$$

Normálové napětí  $\sigma_x$  od ohybových momentů  $M_y$  a  $M_z$  píšeme ve tvaru:

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot z.$$

### NORMÁLOVÉ NAPĚTÍ V PRŮŘEZU PRUTU:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} - \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$



Osy y a z jsou hlavní centrální osy setrvačnosti průřezu.

## 1.1 PROSTÉ PŘÍPADY NAMÁHÁNÍ PRŮŘEZU PRUTU

1.  $N_x \neq 0, M_y = M_z = 0$  ..... prostý tah, tlak
2.  $N_x = 0, M_y \neq 0, M_z = 0$  .... prostý ohyb kolem osy y
3.  $N_x = 0, M_y = 0, M_z \neq 0$  .... prostý ohyb kolem osy z

### 1.1.1 PROSTÝ TAH A TLAK

#### Normálové napětí:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A}, \text{ pro napětí } \sigma_x \text{ používáme jednotky: } Pa = \frac{N}{m^2}; kPa = \frac{kN}{m^2}; MPa = \frac{MN}{m^2} = \frac{N}{mm^2}.$$

#### Protažení:

a) vlivem normálové sily:

předpoklad: prut je přímý, konstantního průřezu, homogenní, pak z Hookova zákona platí:

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x \Rightarrow \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \Rightarrow \Delta \ell = \frac{N_x}{E \cdot A} \ell,$$

b) vlivem rovnoramenného oteplení:

$$\Delta \ell = \alpha \cdot \Delta t \cdot \ell.$$

$E$  je modul pružnosti v tahu (tlaku),  $\alpha$  je součinitel tepelné roztažnosti.

#### Návrh tažených prutů:

$$\sigma_x = \frac{|N_x|}{A} \leq R, \text{ kde } R \text{ je hodnota mezního napětí daná normou.}$$

#### Návrh tlačených prutů:

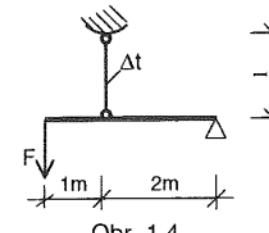
Pro pruty masivní, tzn. pruty velkých průřezů a malé délky (viz př. 1.3) můžeme předpokládat, že jsou namáhány prostým tlakem.

Ve všech ostatních případech je nutné tlačené pruty navrhovat na tzv. vzpěrný tlak:

$$\sigma_x = \frac{|N_x|}{A} \leq \varphi R, \quad \text{kde } \varphi \text{ je součinitel vzpěrnosti (viz kapitola 3.2).}$$

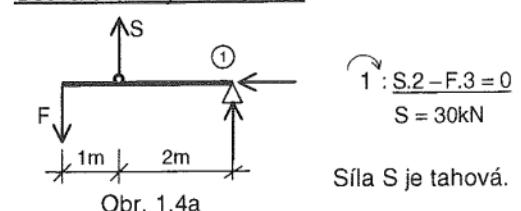
## PŘÍKLAD 1.1

Vypočtěte velikost normálového napětí v ocelovém kyvném prutu kruhového průřezu a jeho celkové protažení (obr. 1.4), je-li  $F=20kN$ ,  $E=2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $\Delta t=15^\circ$ ,  $\alpha=0,000012$ ,  $d=0,02m$ ,  $l=1,5m$ .



Obr. 1.4

Osová síla v kyvném prutu:



$$1 : S \cdot 2 - F \cdot 3 = 0$$

$$S = 30 \text{ kN}$$

Síla S je tahová.

#### Normálové napětí v kyvném prutu:

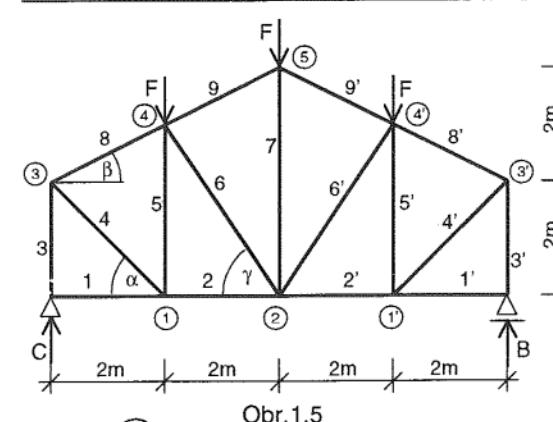
$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} = \frac{S}{\pi d^2} = \frac{30}{\pi \cdot 0,02^2} = 95493 \text{ kPa} = 95,493 \text{ MPa}.$$

#### Prodloužení kyvného prutu:

$$\Delta l = \Delta l_{N_x} + \Delta l_1 = \frac{N_x}{EA} l + \alpha \cdot \Delta t \cdot l = \frac{30}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 0,02^2} \cdot 1,5 + 0,000012 \cdot 1,5 \cdot 1,5 = \\ = 4,55 \cdot 10^{-4} + 2,7 \cdot 10^{-4} = 7,25 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,725 \text{ mm}.$$

## PŘÍKLAD 1.2

Navrhněte a posudte tažené pruty dřevěné příhradové konstrukce,  $F=30 \text{ kN}$ ,  $R_d=10 \text{ MPa}$ .



Obr. 1.5

Statická určitost:

$$m=2 \cdot 10=20$$

$$r=1(17+1)+2 \cdot 1=20$$

Soustava je staticky určitá.

Reakce:

$$C = B = \frac{3F}{2} = 45 \text{ kN}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\sin \beta = 0,447, \cos \beta = 0,894$$

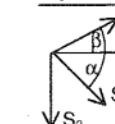
$$\sin \gamma = 0,832, \cos \gamma = 0,555$$

Osové síly v kyvných prutech:

$$S_3 = -C = -45 \text{ kN}$$

$$S_1 = 0$$

Styčník (3)



$$\rightarrow: S_8 \cdot \cos \beta + S_4 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\downarrow: S_3 + S_4 \cdot \sin \alpha - S_8 \cdot \sin \beta = 0$$

$$S_4 = 42,45 \text{ kN}$$

$$S_8 = -33,53 \text{ kN}$$

$$S_8 = -S_4 \cdot 0,79$$

$$S_4 \cdot \sin \alpha = -S_3 + S_8 \cdot \sin \beta$$

### Styčník 1

$$\begin{aligned} \uparrow: S_5 + S_4 \cdot \sin \alpha &= 0 \\ \rightarrow: S_2 + S_4 \cdot \cos \alpha &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_5 &= -30 \text{kN} \\ S_2 &= +30 \text{kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow: S_9 \cdot \cos \beta - S_8 \cdot \cos \beta + S_6 \cdot \cos \gamma &= 0 \\ \downarrow: F + S_8 \cdot \sin \beta - S_9 \cdot \sin \beta + S_6 \cdot \sin \gamma + S_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_9 &= S_8 - S_6 \frac{\cos \gamma}{\cos \beta} = -33,53 - S_6 \cdot 0,62 \\ 30 + 0,447(-33,53) + 0,447(-33,53 - S_6 \cdot 0,62) + S_6 \cdot 0,832 - 30 &= 0 \\ S_6 &= 0 \\ S_9 &= -33,53 \text{kN} \end{aligned}$$

### Styčník 5

$$\begin{aligned} \downarrow: F + 2S_9 \cdot \sin \beta + S_7 &= 0 \\ S_7 &= 0 \end{aligned}$$

Pruty 2,2',4,4' jsou tažené.

### Pruty č. 2,2': $N_x=30 \text{kN}$

$$\begin{aligned} \text{Návrh: } \sigma_x = \frac{N_x}{A} \leq R_o &\Rightarrow A \geq \frac{N_x}{R_o} = \frac{30}{210 \cdot 10^3} = 0,003 \text{m}^2, \\ \text{navrhne me čtvercový průřez: } a &= 0,06 \text{m}. \end{aligned}$$

$$\text{Posouzení: } \sigma_x = \frac{30}{0,06^2} = 8333 \text{kPa} < 10 \text{MPa}, \text{ návrh vyhovuje.}$$

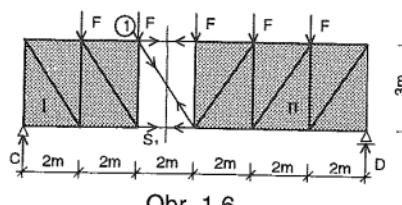
### Pruty č. 4,4': $N_x=42,45 \text{kN}$

$$\begin{aligned} \text{Návrh: } A \geq \frac{N_x}{R} = \frac{42,45}{10 \cdot 10^3} &= 0,004245 \text{m}^2, \\ \text{navrhne me obdélníkový průřez: } b &= 0,06 \text{m}, h = 0,08 \text{m}. \end{aligned}$$

$$\text{Posouzení: } \sigma_x = \frac{42,45}{0,06 \cdot 0,08} = 8844 \text{kPa} < 10000 \text{kPa}, \text{ návrh vyhovuje.}$$

### PŘÍKLAD 1.3

Navrhne a posudte dolní pas příhradové konstrukce z kruhové oceli dle obr. 1.6,  $F=60 \text{kN}$ ,  $R_o=210 \text{Mpa}$ .



Obr. 1.6

Předpoklad: Celý spodní pás navrhne me stejným průřezem, největší osová síla bude zřejmě uprostřed nosníku. Pro výpočet osové síly  $S_1$  použijeme průsečnou metodu.

Osová síla v prutu 1: (I)

$$1: S_1 \cdot 3 - C \cdot 4 + F \cdot 2 = 0$$

$$S_1 = \frac{150 \cdot 4 - 60 \cdot 2}{3} = 160 \text{kN}$$

$$\text{Reakce: } C = D = \frac{5F}{2} = 150 \text{kN}$$

### Návrh prutu 1: $N_x=S_1=160 \text{kN}$

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} \leq R_o \Rightarrow A \geq \frac{N_x}{R_o} = \frac{160}{210 \cdot 10^3} = 0,00076 \text{m}^2, r \geq 0,0156 \text{m}.$$

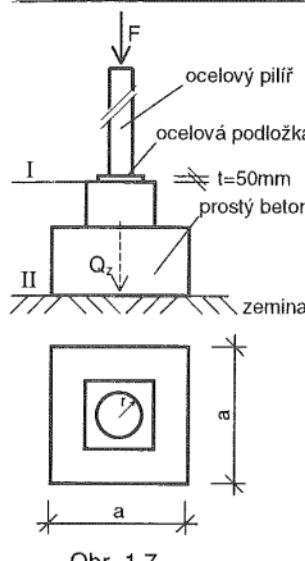
Navrhne me  $r=0,016 \text{m}$ .

$$\text{Posouzení: } \sigma_x = \frac{160}{\pi \cdot 0,016^2} = 198944 \text{kPa} = 198,944 \text{MPa} < 210 \text{MPa},$$

Návrh vyhovuje.

### PŘÍKLAD 1.4

Navrhne a posudte základovou patku z prostého betonu pro ocelový pilíř,  $F=1 \text{MN}$  (obr. 1.7).



Obr. 1.7

Mezní napětí: ocel:  $R_o=210 \text{Mpa}$ ,

beton v tlaku:  $R_b=10 \text{Mpa}$ ,

zemina:  $R_z=0,8 \text{Mpa}$  (písčitá).

Objemová těža: ocel:  $\gamma_o=78 \text{kN/m}^3$ ,

beton:  $\gamma_b=23 \text{kN/m}^3$ .

Ocelový pilíř je namáhan vzpěrným tlakem, návrh a posouzení je ve čtvrté kapitole tohoto skriptu.

Pod pilíř je nutné umístit roznášecí destičku, uvažujeme destičku kruhového tvaru a vzhledem k rozměrům destičky je namáhaná prostým tlakem. Vlastní těža destičky je velmi malá. Navrhne velikost destičky z podmíny, že napětí ve spáře I nesmí překročit mezní napětí betonu.

#### Spára I:

Návrh:  $N_x = -F = -1 \text{MN}$ ,

$$|\sigma_x| = \frac{|N_x|}{A} \leq R_b \Rightarrow A \geq \frac{|N_x|}{R_b} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{m}^2, r \geq \sqrt{\frac{0,1}{\pi}} = 0,178 \text{m}.$$

Navrhne me  $r=0,18 \text{m}$ . Vlastní těža destičky tloušťky 50mm je:

$$Q_d = \pi \cdot r^2 \cdot t \cdot \gamma_o = \pi \cdot 0,18^2 \cdot 0,05 \cdot 78 = 0,4 \text{kN}.$$

$$\text{Posouzení: } \sigma_x = \frac{|N_x + Q_d|}{A_I} = \frac{1,0004}{\pi \cdot 0,18^2} = 9,828 \text{MPa} < 10 \text{MPa}.$$

Návrh vyhovuje. Je zřejmé, že vlastní těža destičky je zanedbatelná.

#### Spára II:

Návrh:  $N_x = -F - Q_z$ , kde  $Q_z$  je vlastní těža základové patky.

$Q_z$  odhadneme,  $Q_z = 0,1 \cdot F = 0,1 \text{MN}$ ,

$$N_x = -1,1 \text{MN}$$

$$|\sigma_x| = \frac{|N_x|}{A_{II}} \leq R_z \Rightarrow A_{II} \geq \frac{1,1}{0,8} = 1,375 \text{m}^2,$$

$$a \geq 1,173 \text{m}.$$

Navrhne me  $a = 1,2 \text{m}$ .

**Posouzení:** Navrheme tvar patky (obr.1.8).

Objem betonového zdiva patky:

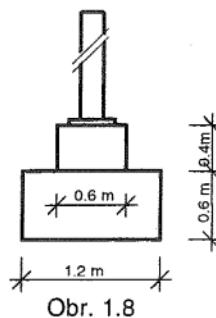
$$V_z = 1,2 \cdot 1,2 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 1,008 \text{ m}^3.$$

Tíha základové patky:

$$Q_z = V_z \cdot \gamma_b = 1,008 \cdot 23 = 23,2 \text{ kN} = 0,0232 \text{ MN},$$

$$N_x = -F - Q_z = -1 - 0,023 = -1,023 \text{ MN},$$

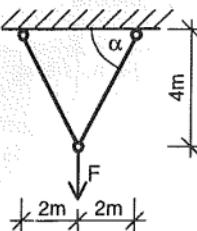
$$|\sigma_x| = \frac{1,023}{1,2 \cdot 1,2} = 0,71 \text{ MPa} < 0,8 \text{ MPa}. \quad \text{Návrh vyhovuje.}$$



Obr. 1.8

### PŘÍKLAD 1.5

Stanovte velikost síly  $F$  tak, aby napětí v ocelových kyvných prutech (obr. 1.9) nepřekročilo hodnotu  $R_o = 210 \text{ MPa}$ , kyvné pruty jsou z válcovaných U profilů.



Obr. 1.9

Z tabulek pro U 120:  $A = 1700 \text{ mm}^2 = 17 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ .

Osové síly v kyvných prutech:  $\alpha = 63,43^\circ$

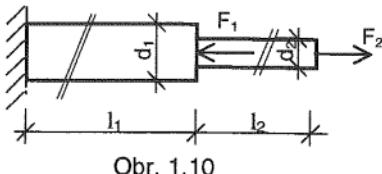
$$\begin{aligned} S &\text{ (up)} & S &\text{ (down)} \\ \uparrow : 2S \sin \alpha - F = 0 & & S = \frac{F}{2 \sin \alpha} = 0,56F \end{aligned}$$

Pruty jsou namáhany prostým tahem, musí platit:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \frac{N_x}{A} &\leq R_o \Rightarrow N_x \leq A \cdot R_o, \quad N_x = S = 0,56F, \\ 0,56F &\leq 17 \cdot 10^{-4} \cdot 210 \cdot 10^3, \\ F &\leq \frac{17 \cdot 210 \cdot 10^{-1}}{0,56} = 637,5 \text{ kN} = 6375 \text{ MN}. \end{aligned}$$

### PŘÍKLAD 1.6

Vypočtěte celkové prodloužení ocelového prutu kruhového průřezu dle obr. 1.10,  $d_1=20 \text{ mm}$ ,  $d_2=10 \text{ mm}$ ,  $F_1=40 \text{ kN}$ ,  $F_2=10 \text{ kN}$ ,  $l_1=3 \text{ m}$ ,  $l_2=2 \text{ m}$ ,  $E=2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ .



Obr. 1.10

Normálové síly:

$$N_1 = -F_1 + F_2 = -40 + 10 = -30 \text{ kN},$$

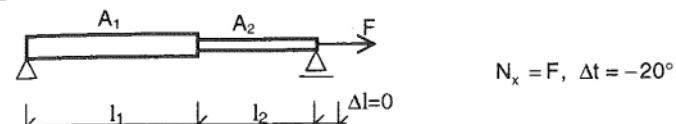
$$N_2 = +F_2 = 10 \text{ kN}.$$

Celkové prodloužení:

$$\Delta l = \frac{N_1 l_1}{EA_1} + \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^3} \left[ \frac{-30 \cdot 3}{\pi \cdot 0,02^2} + \frac{10 \cdot 2}{\pi \cdot 0,01^2} \right] = -0,000152 \text{ m} = -0,152 \text{ mm}.$$

### PŘÍKLAD 1.7

Určete sílu  $F$  tak, aby celkové prodloužení prutu při rovnoměrném oteplení prutu o  $\Delta t=-20^\circ$  bylo nulové (obr. 1.11). Dáno:  $l_1=3 \text{ m}$ ,  $l_2=2 \text{ m}$ ,  $A_1=0,04 \text{ m}^2$ ,  $A_2=0,01 \text{ m}^2$ ,  $E=2 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ ,  $\alpha=0,000012$ .



$$N_x = F, \quad \Delta t = -20^\circ.$$

Obr. 1.11

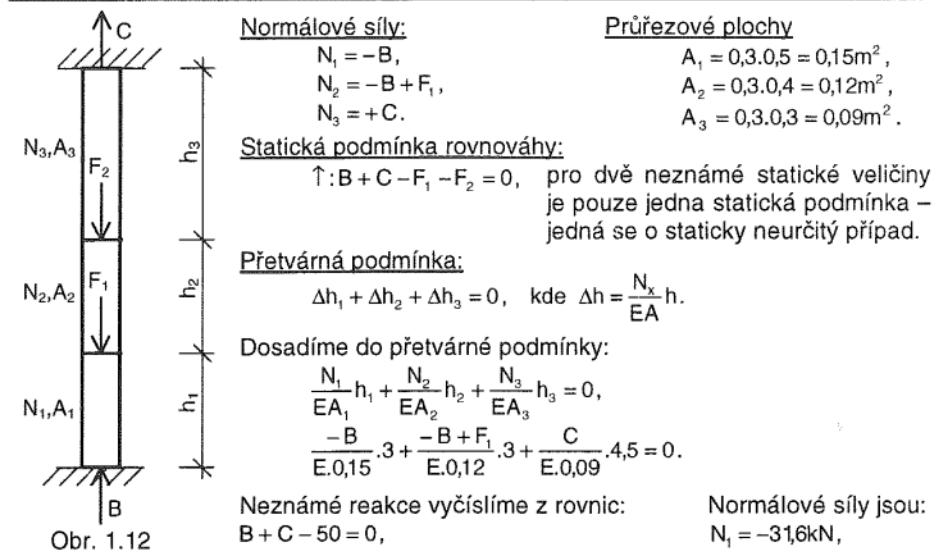
Celkové prodloužení:

$$\begin{aligned} \Delta l &= \Delta l_{N_x} + \Delta l_t = 0, \\ \frac{N_x}{EA_1} l_1 + \frac{N_x}{EA_2} l_2 + \alpha(l_1 + l_2) \Delta t &= 0, \\ \frac{F}{2 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \cdot 0,04} \cdot 3 + \frac{F}{2 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \cdot 0,01} \cdot 2 + 0,000012(3+2)(-20) &= 0, \\ \frac{F}{2 \cdot 10^7} (75 + 200) - 0,0012 &= 0, \\ F &= \frac{2 \cdot 10^7 \cdot 0,0012}{275} = 87,3 \text{ kN}. \end{aligned}$$

### 1.1.2 STATICKY NEURČITÉ PŘÍPADY TAHU A TLAKU

#### PŘÍKLAD 1.8

Vypočtěte reakce ve větknutí a normálové síly v pilíři dle obr. 1.12. Průřez pilíře je obdélníkový, ve spodní části 300x500mm, ve střední části 300x400mm a v horní části 300x300mm,  $E=10^4 \text{ MPa}$  pro celý pilíř,  $F_1=20 \text{ kN}$ ,  $F_2=30 \text{ kN}$ ,  $h_1=3 \text{ m}$ ,  $h_2=3 \text{ m}$ ,  $h_3=4,5 \text{ m}$ .



Normálové síly:

$$N_1 = -B,$$

$$N_2 = -B + F_1,$$

$$N_3 = +C.$$

Průřezové plochy

$$A_1 = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15 \text{ m}^2,$$

$$A_2 = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12 \text{ m}^2,$$

$$A_3 = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09 \text{ m}^2.$$

Statická podmínka rovnováhy:

$$\uparrow : B + C - F_1 - F_2 = 0, \quad \text{pro dvě neznámé statické veličiny je pouze jedna statická podmínka – jedná se o staticky neurčitý případ.}$$

Přetvárná podmínka:

$$\Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 = 0, \quad \text{kde } \Delta h = \frac{N_x}{EA} h.$$

Dosadíme do přetvárné podmínky:

$$\begin{aligned} \frac{N_1}{E \cdot 0,15} h_1 + \frac{N_2}{E \cdot 0,12} h_2 + \frac{N_3}{E \cdot 0,09} h_3 &= 0, \\ \frac{-B}{E \cdot 0,15} \cdot 3 + \frac{-B + F_1}{E \cdot 0,12} \cdot 3 + \frac{C}{E \cdot 0,09} \cdot 4,5 &= 0. \end{aligned}$$

Neznámé reakce vypočítáme z rovnic:

$$\begin{aligned} B + C - 50 &= 0, \\ -45B + 50C + 500 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 31,6 \text{ kN}, \\ C &= 18,4 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Normálové síly jsou:

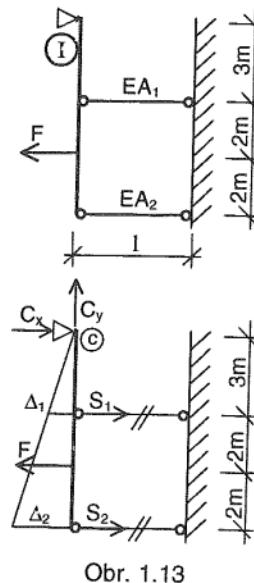
$$N_1 = -31,6 \text{ kN},$$

$$N_2 = -11,6 \text{ kN},$$

$$N_3 = 18,4 \text{ kN}.$$

## PŘÍKLAD 1.9

Vypočtěte osové síly v kryvných prutech kruhového průřezu (obr. 1.13),  $E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $r_1=1 \text{ mm}$ ,  $r_2=2 \text{ mm}$ ,  $F=10 \text{ kN}$ . Předpokládáme, že deska (I) je dokonale tuhá.



Deska (I) je staticky neurčitě uložena.  
Statické podmínky rovnováhy:

$$\rightarrow : C_x + S_1 + S_2 - F = 0$$

$$\uparrow : C_y = 0$$

$$\curvearrowleft : S_1 \cdot 3 + S_2 \cdot 7 - F \cdot 5 = 0 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{7} (50 - 3S_1)$$

V rovnicích jsou čtyři neznámé veličiny.

Přetvárná podmínka:

$$\frac{\Delta_1}{3} = \frac{\Delta_2}{7}, \quad \text{kde: } \Delta_1 = \frac{S_1}{EA_1} l, \quad \Delta_2 = \frac{S_2}{EA_2} l,$$

$$\frac{S_1 \cdot l}{3E \cdot \pi \cdot r_1^2} = \frac{S_2 \cdot l}{7E \cdot \pi \cdot r_2^2},$$

$$\frac{S_1}{3 \cdot 0,001^2} = \frac{S_2}{7 \cdot 0,002^2},$$

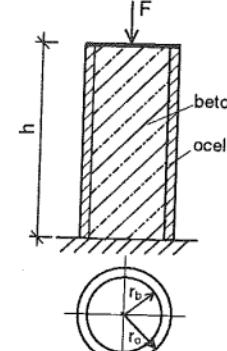
$$S_1 = 0,73 \text{ kN}$$

$$S_2 = 6,83 \text{ kN}$$

Obr. 1.13

## PŘÍKLAD 1.10

Určete, jakou část síly  $F$  přenese ocel a jakou beton pilíře dle obr. 1.14, je-li dáno:  $r_o=200 \text{ mm}$ ,  $r_b=180 \text{ mm}$ ,  $E_o=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $E_b=2 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ ,  $h=3 \text{ m}$ ,  $F=2 \text{ MN}$ .



$$A_b = \pi \cdot 0,18^2 = 0,1 \text{ m}^2,$$

$$A_o = \pi (0,2^2 - 0,18^2) = 0,024 \text{ m}^2.$$

Statická podmínka rovnováhy:

$$F = F_o + F_b,$$

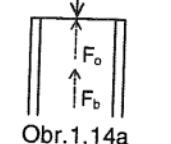
Přetvárná podmínka:

$$\Delta h_o = \Delta h_b,$$

$$\frac{F_o}{E_o A_o} h = \frac{F_b}{E_b A_b} h \Rightarrow F_o = F_b \frac{E_o A_o}{E_b A_b} = F_b \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 0,024}{2 \cdot 10^4 \cdot 0,1} = 2,4 F_b,$$

$$F_b = F - F_o = 2000 - 2,4 F_b \Rightarrow F_b = \frac{2000}{3,4} = 588 \text{ kN},$$

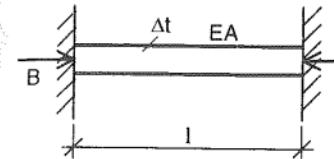
$$F_o = 1412 \text{ kN.}$$



Obr. 1.14a

## PŘÍKLAD 1.11

Vypočtěte reakce ve veknutí a normálovou sílu při rovnoměrném oteplení nosníku průřezové plochy A a modulu pružnosti E o hodnotu  $\Delta t$  (obr. 1.15).



Obr. 1.15

Statická podmínka:

$$\rightarrow : B - C = 0, \quad B = C.$$

Přetvárná podmínka:

$$\Delta l = \Delta l_N + \Delta l_t = 0,$$

$$N_x = -B = -C,$$

$$\Delta l = \frac{N_x}{EA} l + \alpha \cdot \Delta t \cdot l = 0,$$

$$-\frac{B}{EA} l + \alpha \cdot \Delta t \cdot l = 0 \Rightarrow B = \alpha \cdot \Delta t \cdot E \cdot A,$$

$$N_x = -\alpha \cdot \Delta t \cdot E \cdot A.$$

## 1.1.3 PROSTÝ OHYB (jednoduchý ohyb)

Normálové napětí: a)  $\sigma_x = -\frac{M_y}{I_y} z$  ....ohyb kolem osy  $y$ ,

b)  $\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y$  ....ohyb kolem osy  $z$ .

Pro případ ohybů kolem osy  $y$  platí:

$$\text{průběh napětí: } \sigma_x = -\frac{M_y}{I_y} z,$$

neutrální osa:  $\sigma_x = 0$ , osa  $y$  je neutrální osou,

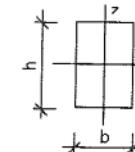
$$\text{extrémy v daném průřezu: } \sigma_e = -\frac{M_y}{I_y} e,$$

kde  $e$  je vzdálenost krajních vláken.

Obr. 1.16

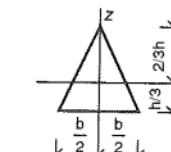
Pro návrh použijeme výraz:  $\sigma_e = \frac{|M_y|}{W_y}$ , kde  $W_y = \frac{l_y}{e}$  je průřezový modul.

Průřezové moduly vybraných průřezů.



$$W_y = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{6}bh^2$$

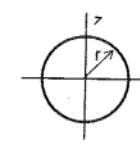
$$W_z = \frac{\frac{1}{12}hb^3}{\frac{b}{2}} = \frac{1}{6}hb^2$$



$$W_y^h = \frac{\frac{1}{2}bh^3}{\frac{2}{3}h} = \frac{1}{24}bh^2$$

$$W_y^d = \frac{\frac{1}{2}bh^3}{\frac{h}{3}} = \frac{1}{12}bh^2$$

$$W_z = \frac{\frac{1}{48}hb^3}{\frac{b}{2}} = \frac{1}{24}hb^2$$



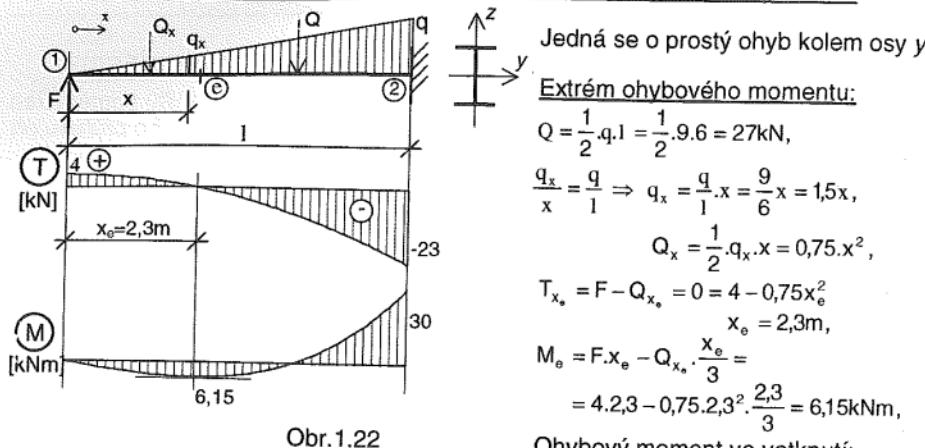
$$W_y = W_z = \frac{\pi r^4}{4r} = \frac{\pi r^3}{4}$$

Obr. 1.17



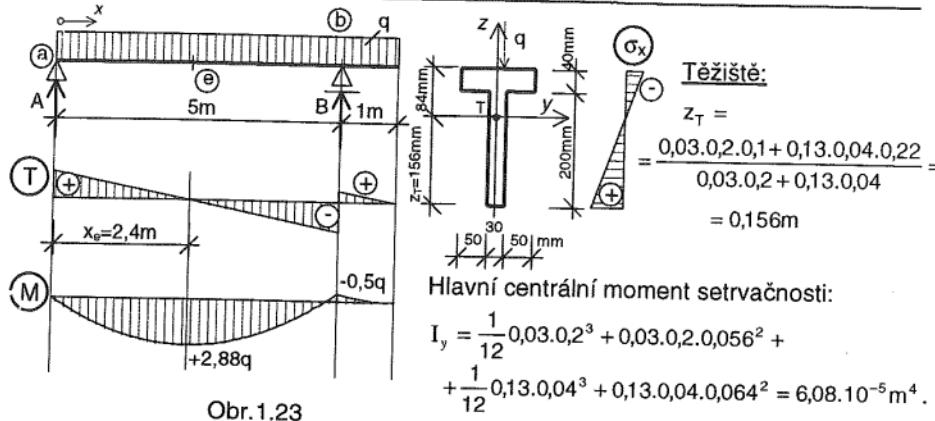
## PŘÍKLAD 1.15

Navrhnete a posudte nosník z válcovaného I profílu dle obr.1.22,  $I=6m$ ,  $F=4kN$ ,  $q=9kNm^{-1}$ ,  $R_0=210MPa$ , zatížení je v rovině  $xz$ .



## PŘÍKLAD 1.16

Stanovte největší možné zatížení  $q$  ocelového nosníku dle obr.1.23, nemá-li hodnota normálového napětí  $\sigma_x$  překročit hodnotu  $R_0=210MPa$ . Zatížení je v rovině  $xz$ .



## Extrém ohybového momentu:

$$\text{Reakce: } b: A \cdot 5 - q \cdot 6 \cdot 2 = 0, \quad A = 2,4q,$$

$$M_e = A \cdot x_e - \frac{1}{2} q \cdot x_e^2 = 2,4q \cdot 2,4 - \frac{1}{2} q \cdot 2,4^2 = 2,88q,$$

$$T_x = A - q \cdot x = 2,4q - q \cdot x,$$

$$T_{x_e} = 0 = 2,4q - q \cdot x_e \Rightarrow x_e = 2,4m,$$

Extrém je v průřezu  $\textcircled{2}$ ,  $M_e = 2,88q$ .

## Průřezový modul $W_y$ :

$$\text{pro horní vlákna: } e^h = 0,084m, W_y^h = \frac{I_y}{e^h} = \frac{6,08 \cdot 10^{-5}}{0,084} = 72,4 \cdot 10^{-4} m^3,$$

$$\text{pro dolní vlákna: } e^d = -0,156m, W_y^d = \frac{I_y}{|e^d|} = \frac{6,08 \cdot 10^{-5}}{0,156} = 3,897 \cdot 10^{-4} m^3.$$

Větší napětí bude pro  $z = -15,6\text{cm}$ , tzn. pro  $W_y^d = 3,897 \cdot 10^{-4} m^3$ .

## Výpočet $q$ :

$$\sigma_{x_e} = \frac{|M_y|}{W_y^d} \leq R_0 \Rightarrow |M_y| \leq R_0 \cdot W_y^d,$$

$$2,88q \leq 210 \cdot 10^3 \cdot 3,897 \cdot 10^{-4},$$

$$q \leq 28,42kNm^{-1}.$$

Zatížení  $q$  nesmí překročit hodnotu  $28,42kNm^{-1}$ .

## Posouzení:

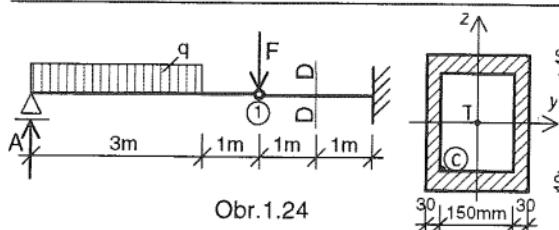
$$M_e = 2,88 \cdot 28,42 = 81,84kNm,$$

$$\sigma_{x_e} = \frac{M_e}{W_y^d} = \frac{81,84}{3,897 \cdot 10^{-4}} = 210000kPa = 210MPa.$$

Vypočtená maximální hodnota  $q$  vyhovuje.

## PŘÍKLAD 1.17

Vypočtete hodnotu normálového napětí  $\sigma_x$  v bodě C průřezu D-D (obr.1.24), zatížení je v rovině  $xz$ ,  $F=4kN$ ,  $q=10kNm^{-1}$ .



Průřez D – D je namáhan prostým ohybem kolem osy  $y$ :

$$\sigma_x = -\frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

$$\text{Hlavní centrální moment setrvačnosti: } I_y = \frac{1}{12} \cdot 0,021 \cdot 0,28^3 - \frac{1}{12} \cdot 0,015 \cdot 0,2^3 = 2,842 \cdot 10^{-4} m^4$$

## Ohybový moment $M_y$ v průřezu D – D:

$$\text{Reakce: } 1: A \cdot 4 - q \cdot 3,2,5 = 0,$$

$$A = \frac{10 \cdot 3,2,5}{4} = 18,75kN,$$

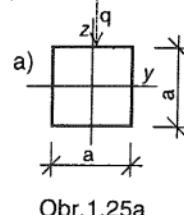
$$M_{D-D} = A \cdot 5 - q \cdot 3,5 - F \cdot 1 = 18,75 \cdot 5 - 10 \cdot 3,5 - 4 \cdot 1 = -15,25kNm.$$

$$\text{Normálové napětí v průřezu D – D: } \sigma_x = -\frac{M_y}{I_y} \cdot z = -\frac{-15,25}{2,842 \cdot 10^{-4}} \cdot z = 53659 \cdot z.$$

$$\text{Normálové napětí v bodě C průřezu D – D: } z_c = -0,1m, \sigma_{x_c} = 53659 \cdot (-0,1) = -5365,9kPa.$$

## PŘÍKLAD 1.18

Posudte únosnost nosníku čtvercového průřezu při zatížení  $q$  dle obr. 1.25a a 1.25b, My předpokládáme stejné pro oba případy zatížení.



Obr. 1.25a

V obou případech se jedná o prostý ohyb kolem osy  $y$ , o únosnosti bude rozhodovat velikost  $W_y$ .  $I_y$  je pro oba případy stejný (čtverec).

$$a) \quad W_y = \frac{I_y}{a} = \frac{\frac{1}{12}a^4}{a} = \frac{1}{6}a^3,$$

$$b) \quad W_y = \frac{12}{a\sqrt{2}} \frac{a^4}{2} = \frac{1}{6\sqrt{2}}a^3 = \frac{1}{6}a^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{6}a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707 \cdot \frac{1}{6}a^3,$$

$$\frac{\sigma_x^a}{\sigma_x^b} = \frac{W_y^a}{|M_y|} = \frac{W_y^b}{W_y^a} = 0,707,$$

$$\sigma_x^a = 0,707\sigma_x^b, \quad \sigma_x^b = 1,414\sigma_x^a.$$

V průřezu b) vzniká napětí 1,414krát větší než v průřezu a).

## 1.2. KOMBINACE PROSTÝCH PŘÍPADŮ NAMÁHÁNÍ PRŮŘEZU PRUTU

### 1.2.1. ŠIKMÝ OHYB

Působí-li ohybový moment  $M$  v rovině, která neobsahuje hlavní centrální osu setrvačnosti v průřezu, pak tento případ nazýváme šikmým ohybem. Ohybový moment nahradíme dvěma momenty působícími v rovinách  $xy$  a  $xz$ :

$$M_y = M \cos \alpha, \quad M_z = M \sin \alpha.$$

Úhel  $\alpha$  a ohybový moment uvažujeme kladně dle obr. 1.26 a také dle obr. 1.2.

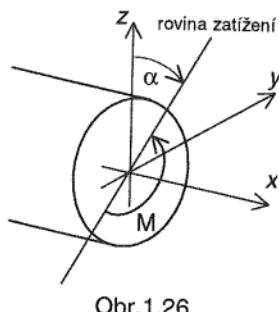
Pro normálové napětí platí:

$$\sigma_x = -\frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y = -M \left( \frac{z}{I_y} \cos \alpha + \frac{y}{I_z} \sin \alpha \right).$$

Pro polohu neutrální osy píšeme:

$$\sigma_x = 0 \Rightarrow \frac{z}{I_y} \cos \alpha + \frac{y}{I_z} \sin \alpha = 0,$$

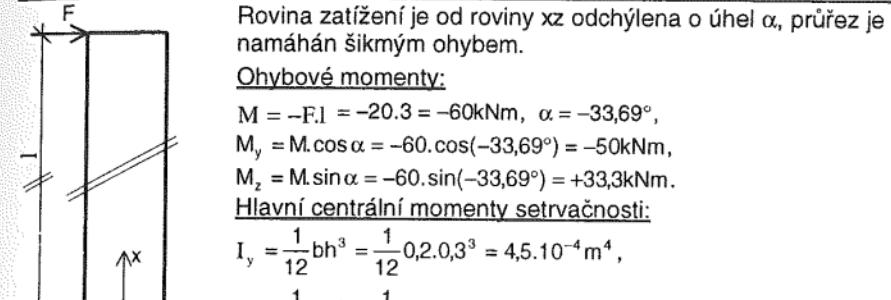
$$z = -\frac{I_y}{I_z} \cdot y \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$



Obr. 1.26

## PŘÍKLAD 1.19

Vypočtěte a vykreslete průběh normálového napětí  $\sigma_x$  ve veknutí pilíře obdélníkového průřezu dle obr. 1.27.  $F=20kN$ ,  $b=0,2m$ ,  $h=0,3m$ ,  $l=3m$ .



Rovina zatížení je od roviny  $xz$  odchýlena o úhel  $\alpha$ , průřez je namáhan šikmým ohyblem.

Ohybové momenty:

$$M = -F \cdot l = -20 \cdot 3 = -60 \text{ kNm}, \quad \alpha = -33,69^\circ,$$

$$M_y = M \cos \alpha = -60 \cdot \cos(-33,69^\circ) = -50 \text{ kNm},$$

$$M_z = M \sin \alpha = -60 \cdot \sin(-33,69^\circ) = +33,3 \text{ kNm}.$$

Hlavní centrální momenty setrvačnosti:

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}0,2 \cdot 0,3^3 = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4,$$

$$I_z = \frac{1}{12}hb^3 = \frac{1}{12}0,3 \cdot 0,2^3 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4.$$

Normálové napětí:

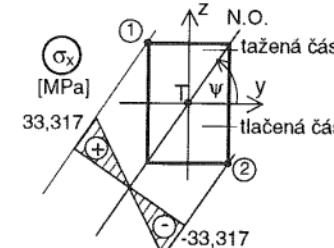
$$\sigma_x = -\frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y = -\frac{-50}{4,5 \cdot 10^{-4}} \cdot z - \frac{33,3}{2 \cdot 10^{-4}} \cdot y = 111111.z - 166500.y$$

Poloha neutrální osy:  
 $\sigma_x = 0, \quad 111111.z - 166500.y = 0$ , rovnice přímky procházející těžištěm,

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{z}{y} = \frac{166500}{111111} \Rightarrow \psi = 56,28^\circ,$$

kde úhel  $\psi$  je úhel, který svírá neutrální osa s osou  $y$ .

Extrémy normálového napětí jsou v bodech nejvzdálenějších od neutrální osy, tj. v bodech ① a ②, neutrální osa rozděluje plochu průřezu na část taženou a tlačenou:



Obr. 1.28

$$y_1 = -0,1m, \quad z_1 = +0,15m,$$

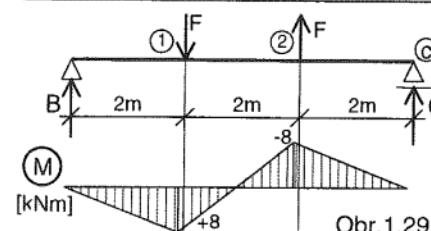
$$\sigma_{x_1} = 111111.0,15 - 166500.(-0,1) = \\ = 33317 \text{ kPa} = 33,317 \text{ MPa},$$

$$y_2 = +0,1m, \quad z_2 = -0,15m,$$

$$\sigma_{x_2} = 111111.(-0,15) - 166500.0,1 = \\ = -33317 \text{ kPa} = -33,317 \text{ MPa}.$$

## PŘÍKLAD 1.20

Posudte, zda vyhoví dřevěný nosník dle obr. 1.29 průřezu dle obr. 1.30, nemá-li napětí  $\sigma_x$  překročit hodnotu  $R_d=10 \text{ MPa}$  v tahu i tlaku. Rovina zatížení je svislá,  $F=12 \text{ kN}$ .

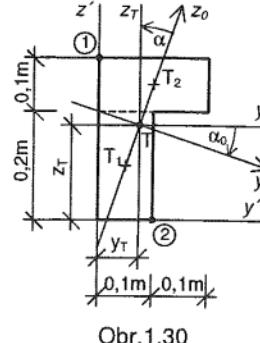


Obr. 1.29

Reakce:  $c: B \cdot 6 - F \cdot 4 + F \cdot 2 = 0$ ,  
 $B = 4 \text{ kN}$ ,  
 $C = -4 \text{ kN}$ .

Ohybové momenty:

$$M_1 = B \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8 \text{ kNm}, \quad M_2 = C \cdot 2 = -8 \text{ kNm}.$$



Těžiště:

i	$A_i [m^2]$	$y_i [m]$	$z_i' [m]$	$y_i [m]$	$z_i [m]$
1	0,02	0,05	0,1	-0,025	-0,075
2	0,02	0,1	0,25	0,025	0,075

$$\sum A_i = 0,04 \text{ m}^2, \quad y_i = y_i - y_T, \\ z_i = z_i - z_T.$$

$$y_T = \frac{\sum_i A_i y_i}{\sum_i A_i} = \frac{0,02 \cdot 0,05 + 0,02 \cdot 0,1}{0,04} = 0,075 \text{ m},$$

$$z_T = \frac{\sum_i A_i z_i}{\sum_i A_i} = \frac{0,02 \cdot 0,1 + 0,02 \cdot 0,25}{0,04} = 0,175 \text{ m},$$

Obr.1.30

Centrální momenty setrvačnosti a deviační moment:

$$I_{y_T} = \frac{1}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,2^3 + 0,1 \cdot 0,2 \cdot (-0,075)^2 + \frac{1}{12} \cdot 0,2 \cdot 0,1^3 + 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,075^2 = 3,083 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4,$$

$$I_{z_T} = \frac{1}{12} \cdot 0,2 \cdot 0,1^3 + 0,1 \cdot 0,2 \cdot (-0,025)^2 + \frac{1}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,2^3 + 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,025^2 = 1,083 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4,$$

$$I_{y_T z_T} = 0 + 0,2 \cdot 0,1 \cdot (-0,025) \cdot (-0,075) + 0 + 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,025 \cdot 0,075 = 0,75 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4.$$

Poloha hlavních centrálních os setrvačnosti  $y_0, z_0$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{y_T z_T}}{I_{z_T} - I_{y_T}} = \frac{2 \cdot 0,75}{1,083 - 3,083} \Rightarrow 2\alpha_0 = -36,86^\circ, \alpha_0 = -18,43^\circ.$$

Hlavní centrální momenty setrvačnosti:

$$I_{1,2} = \frac{I_{y_T} + I_{z_T}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{y_T} - I_{z_T}}{2}\right)^2 + I_{y_T z_T}} = 10^{-4} \left[ \frac{3,083 + 1,083}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3,083 - 1,083}{2}\right)^2 + 0,75^2} \right] = 10^{-4} [2,083 \pm 1,25] \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 3,333 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 = I_{\max} = I_{y_0}, \\ I_2 = 0,833 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 = I_{\min} = I_{z_0}. \end{cases}$$

Extrém ohybového momentu je pod silou F,  $M_1 = +8 \text{ kNm}$ .

$M_1$  nahradíme momenty:  $M_{y_0} = M_y = M \cos \alpha$ ,

$M_{z_0} = M_z = M \sin \alpha$ , kde úhel  $\alpha = -18,43^\circ$ ,

$$M_{y_0} = 8 \cos(-18,43^\circ) = 7,58 \text{ kNm},$$

$$M_{z_0} = 8 \sin(-18,43^\circ) = -2,53 \text{ kNm}.$$

Normálové napětí v průřezu 1:

$$\sigma_x = -\frac{M_{y_0}}{I_{y_0}} z - \frac{M_{z_0}}{I_{z_0}} y = -\frac{7,58}{3,333 \cdot 10^{-4}} z + \frac{2,53}{0,833 \cdot 10^{-4}} y = -22742z + 30372y.$$

Poloha neutrální osy:

$$\sigma_x = -22763z + 30372y = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \psi = \frac{z}{y} = +\frac{30372}{22742} \Rightarrow \psi = 53,15^\circ$$

Poznámka:

Úhel  $\alpha_0$  natočení hlavních centrálních os setrvačnosti je kladný od kladného směru centrální osy  $y$  ke kladnému směru centrální osy  $z$  (viz Statika 1, příklady).

Úhel  $\alpha$  pootočení roviny zatížení v průřezu od hlavní centrální osy setrvačnosti  $z_0$  se uvažuje kladný (obr.1.2a tohoto skripta) ve směru hodinových ručiček od kladného směru hlavní centrální osy setrvačnosti  $z_0$ .

Souřadnice  $y, z$  jsou v souřadnicovém systému hlavních centrálních os setrvačnosti, které jsou vzhledem k centrálním osám  $y_T, z_T$  pootočeny o úhel  $\alpha_0$ .

Transformace souřadnic  $y_i, z_i$  do systému hlavních centrálních os setrvačnosti:

$$\begin{bmatrix} y_{0i} \\ z_{0i} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_0 & \sin \alpha_0 \\ -\sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ z_i \end{bmatrix}, \text{ kde } [T] \text{ je transformační matici, } y_i \text{ a } z_i \text{ jsou souřadni-} \\ \text{ci bodu i v systému centrálních os setrvačnosti } y_T z_T.$$

$$\begin{bmatrix} y_{01} \\ z_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-18,43^\circ) & \sin(-18,43^\circ) \\ -\sin(-18,43^\circ) & \cos(-18,43^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0,95 & -0,32 \\ +0,32 & +0,95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Bod } ① : y_1 = -0,075 \text{ m}, z_1 = +0,125 \text{ m},$$

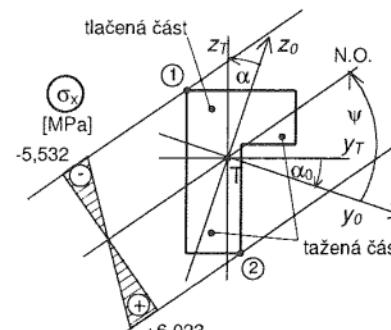
$$\text{Bod } ② : y_2 = 0,025 \text{ m}, z_2 = -0,175 \text{ m},$$

$$\begin{bmatrix} y_{01} \\ z_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,95 & -0,32 \\ 0,32 & 0,95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,075 \\ 0,125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,111 \\ 0,095 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_{02} \\ z_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,95 & -0,32 \\ 0,32 & 0,95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,025 \\ -0,175 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,08 \\ -0,158 \end{bmatrix}.$$

Normálové napětí v bodech 1 a 2 průřezu:

$$\sigma_{x_1} = -22742 \cdot 0,095 + 30372 \cdot (-0,111) = -5532 \text{ kPa} = -5,532 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{x_2} = -22742 \cdot (-0,158) + 30376 \cdot 0,08 = +6023 \text{ kPa} = 6,023 \text{ MPa}.$$



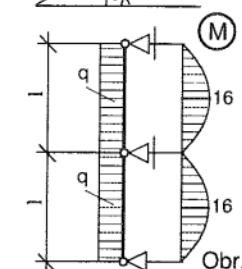
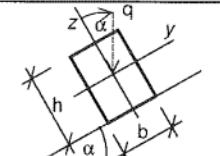
Obr.1.31

Neutrální osa dělí průřez na taženou a tlacenou část.

Výsledek: Normálové napětí nepřekročí hodnotu  $R=10 \text{ MPa}$ , dřevěný nosník pro dané zatížení vyhoví.

## PŘÍKLAD 1.21

Navrhnete a posudte dřevěnou střešní vaznici (obr.1.32), nemá-li normálové napětí překročit hodnotu  $R_d=10 \text{ MPa}$ .  $q=8 \text{ kNm}^{-1}$ ,  $\alpha=30^\circ$ , vzdálenost vazníků  $l=4 \text{ m}$ .



Největší ohybový moment je uprostřed vaznice:

$$M = \frac{1}{8} q l^2 = \frac{1}{8} \cdot 8 \cdot 4^2 = 16 \text{ kNm}.$$

Tento ohybový moment je ve svislé rovině odchýlené v průřezu od hlavní centrální osy setrvačnosti z o úhel  $\alpha$ , průřez je namáhan šikmým ohybem.

$$M_y = M \cos \alpha = 16 \cos 30^\circ = 13,8 \text{ kNm},$$

$$M_z = M \sin \alpha = 16 \sin 30^\circ = 8 \text{ kNm}.$$

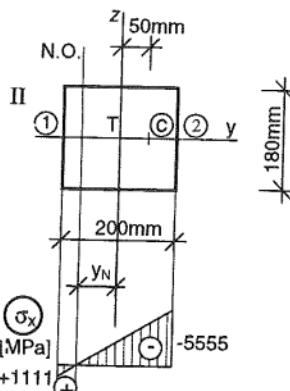
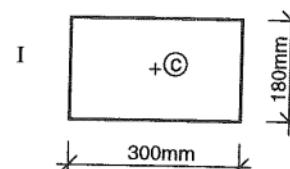
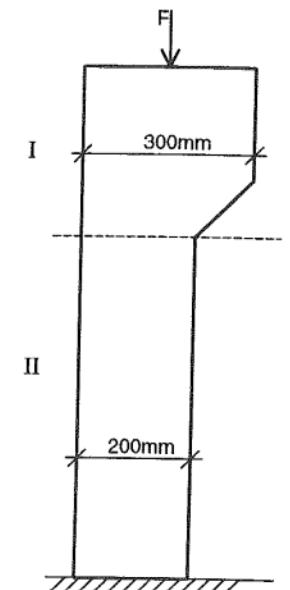
Pro návrh průřezu použijeme extrémní hodnoty  $\sigma_x$ :

$$\sigma_x = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z}, \text{ kde } W_y = \frac{1}{6} b h^2, W_z = \frac{1}{6} h b^2.$$



## PŘÍKLAD 1.23

Posuďte, zda normálové napětí v betonovém pilíři (obr.1.35) nepřekročí hodnotu  $R_{bc}=1\text{MPa}$  v tahu a  $R_{bf}=10\text{MPa}$  v tlaku. Vykreslete průběh  $\sigma_x$  v patě pilíře. V horní části působí v těžišti průřezu tlaková síla  $F=80\text{kN}$ , šířka pilíře je po celé výšce stejná.



Obr.1.35

V části I působí síla  $F$  v těžišti, průřez je namáhan prostým tlakem,  $N_x = -80\text{kN}$ .

Posouzení:

$$\sigma_x = \frac{|N_x|}{A} = \frac{80}{0,3 \cdot 0,18} = 1481\text{kPa} < 10\text{MPa},$$

průřez vyhovuje.

V části II působí síla  $F$  mimo těžiště, průřez je namáhan excentrickým tlakem:

$$y_c = 50\text{mm}, z_c = 0,$$

$$N_x = -F = -80,$$

$$M_y = -N_x \cdot z_c = 0,$$

$$M_z = -N_x \cdot y_c = 80 \cdot 0,05 = 4\text{kNm}.$$

Posouzení:

$$I_z = \frac{1}{12} 0,18 \cdot 0,2^3 = 1,2 \cdot 10^{-4}\text{m}^4,$$

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{I_z} \cdot y = \\ = \frac{-80}{0,2 \cdot 0,18} - \frac{4}{1,2 \cdot 10^{-4}} \cdot y = -2222 - 33333y.$$

Poloha neutrální osy:

$$\sigma_x = 0 = -2222 - 33333y_N,$$

$$y_N = -0,0666\text{m}.$$

Extrémy normálového napětí:

$$y_1 = -0,1\text{m},$$

$$\sigma_x = -2222 - 33333 \cdot (-0,1) = 1111\text{kPa}, \text{ tah},$$

$$y_2 = +0,1\text{m},$$

$$\sigma_x = -2222 - 33333 \cdot 0,1 = -5555\text{kPa}, \text{ tlak}.$$

Posouzení:  $\sigma_{x_1} = 1111\text{kPa} > 1\text{MPa}$ , nevyhoví,

$$|\sigma_{x_2}| = 5555\text{kPa} < 10\text{MPa}.$$

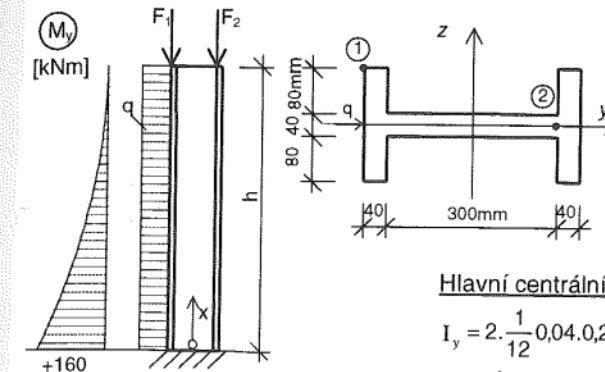
Napětí v dolní části pilíře překročí předepsanou mezní hodnotu v tahu, pilíř v této části nevyhoví.

Poznámka: Vlastní tříha pilíře je vzhledem k síle  $F$  velmi malá, neuvažujeme ji.

## 1.2.3 DALŠÍ KOMBINACE PROSTÝCH PŘÍPADŮ NAMÁHÁNÍ PRŮREZU PRUTU

### PŘÍKLAD 1.24

Vypočtěte a vykreslete průběh  $\sigma_x$  v nejvíce namáhaném průřezu ocelového pilíře (obr.1.36). Zatížení  $q$  je v rovině  $xy$ , síla  $F_1$  působí v bodě ① a síla  $F_2$  v bodě ② průřezu rovnoběžně s osou  $x$ .  $F_1=50\text{kN}$ ,  $F_2=80\text{kN}$ ,  $q=20\text{kNm}^{-1}$ ,  $h=4\text{m}$ .



Plocha průřezu:

$$A = 2,04 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,04 = \\ = 0,028\text{m}^2.$$

Hlavní centrální momenty setrvačnosti:

$$I_y = 2 \cdot \frac{1}{12} 0,04 \cdot 0,2^3 + \frac{1}{12} 0,3 \cdot 0,04^3 = 5,49 \cdot 10^{-5}\text{m}^4,$$

$$I_z = \frac{1}{12} 0,2 \cdot 0,38^3 - 2 \cdot \frac{1}{12} 0,08 \cdot 0,3^3 = 55,45 \cdot 10^{-5}\text{m}^4.$$

Vnitřní síly od jednotlivých zatížení ve větknutí:

excentrická síla  $F_1$ :  $y_c = -0,19\text{m}$ ,  $z_c = +0,1\text{m}$ , excentrická síla  $F_2$ :  $y_c = 0,15\text{m}$ ,  $z_c = 0$ ,

$$N_x = -F_1 = -50\text{kN},$$

$$N_x = -F_2 = -80\text{kN},$$

$$M_y = -N_x \cdot z_c = 50 \cdot 0,1 = 5\text{kNm},$$

$$M_y = 0,$$

$$M_z = -N_x \cdot y_c = 50 \cdot (-0,19) =$$

$$M_z = -N_x \cdot y_c = 80 \cdot 0,15 = \\ = -9,5\text{kNm},$$

prostý ohyb kolem osy  $z$  od spojitého zatížení  $q$ :  $M_z = +\frac{1}{2} q \cdot h^2 = +\frac{1}{2} 20 \cdot 4^2 = +160\text{kNm}$ .

Celkem:  $N_x = -50 - 80 = -130\text{kN}$ ,  $M_y = 5\text{kNm}$ ,  $M_z = -9,5 + 12 + 160 = 162,5\text{kNm}$ .

Normálové napětí ve větknutí:

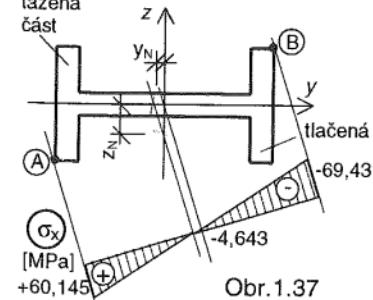
$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} - \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y = \frac{-130}{0,028} - \frac{5}{5,49 \cdot 10^{-5}} \cdot z - \frac{162,5}{55,45 \cdot 10^{-5}} \cdot y = -4643 - 91075z - 293057y.$$

Poloha neutrální osy:

$$\sigma_x = 0 = -4643 - 91075z - 293057y,$$

úseky na osách:  $z = 0$ ,  $y_N = -0,016\text{m}$ ;  $y = 0$ ,  $z_N = -0,051\text{m}$ .

tažená část



Obr.1.37

$\sigma_x$  v těžišti:  $y_T = 0$ ,  $z_T = 0$ ,

$$\sigma_x = -4643\text{kPa} = -4,643\text{MPa}.$$

Extrémy  $\sigma_x$  jsou v bodech A a B:

$$y_A = -0,19\text{m}$$

$$z_A = -0,10\text{m},$$

$$\sigma_{x_A} = -4643 - 91075 \cdot (-0,1) - 293057 \cdot (-0,19) = \\ = 60145\text{kPa} = 60,145\text{MPa},$$

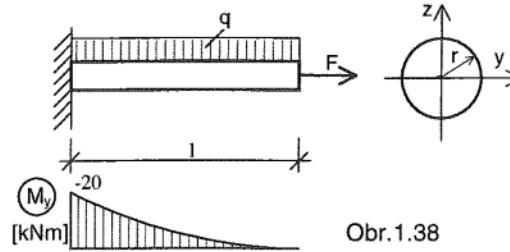
$$y_B = +0,19\text{m}$$

$$z_B = +0,10\text{m},$$

$$\sigma_{x_B} = -4643 - 91075 \cdot 0,1 - 293057 \cdot 0,19 = \\ = -69431\text{kPa} = -69,431\text{MPa}.$$

## PŘÍKLAD 1.25

Navrhnete a posudte ocelový nosník kruhového průřezu (obr.1.38),  $R_o=210\text{MPa}$ ,  $l=2\text{m}$ ,  $q=10\text{kNm}^{-1}$ ,  $F=10\text{kN}$  působí v těžišti průřezu.



Obr.1.38

Nosník bude nejvíce namáhan ve vetknutí kombinací normálové síly a prostého ohybu kolem osy y.

Vnitřní síly ve vetknutí:

$$N_x = +F = +10\text{kN}, \\ M_y = -\frac{1}{2}ql^2 = -\frac{1}{2}10 \cdot 2^2 = -20\text{kNm}.$$

Návrh:  $\sigma_x = \frac{|N_x|}{A} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq R_o, \quad W_y = \frac{\pi r^4}{4r} = \frac{\pi r^3}{4}, \quad A = \pi r^2,$

$$\frac{|N_x|}{\pi r^2} + \frac{|M_y|}{\pi r^3} \leq R_o \left| \frac{r^3}{R_o} \right|,$$

$$r^3 - \frac{|N_x|}{\pi R_o} r - \frac{|M_y| \cdot 4}{\pi R_o} = 0,$$

$$r^3 + C_1 r + C_2 = 0,$$

$$\text{kde } C_1 = -\frac{|N_x|}{\pi R_o} = \frac{-10}{\pi \cdot 210 \cdot 10^3} = -1,515 \cdot 10^{-5}, \quad C_2 = -\frac{|M_y| \cdot 4}{\pi R_o} = -\frac{20.4}{\pi \cdot 210 \cdot 10^3} = -12,13 \cdot 10^{-5}.$$

Protože  $C_2 \gg C_1$ , odhadneme:  $r^3 = -C_2 = 12,13 \cdot 10^{-5}$ ,

$$r = 0,049\text{m}.$$

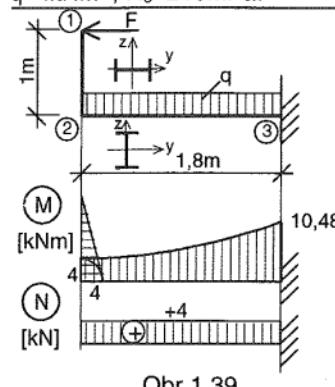
Navrhnete:  $r = 0,05\text{m}$ .

Posouzení:  $\sigma_x = \frac{10}{\pi \cdot 0,05^2} + \frac{20.4}{\pi \cdot 0,05^3} = 204991\text{kPa} < 210000\text{kPa}.$

Návrh vyhovuje.

## PŘÍKLAD 1.26

Navrhnete a posudte ocelový nosník z válcovaných I profili dle obr.1.39,  $F=4\text{kN}$ ,  $q=4\text{kNm}^{-1}$ ,  $R_o=210\text{MPa}$ .



Obr.1.39

Cást 1-2:  
Prut 1-2 je namáhan prostým ohybem, zatížení v rovině x, y (osa x je v ose prutu).

Návrh:  $|M_z| = F \cdot 1 = 4\text{kNm},$

$$\sigma_x = \frac{|M_z|}{W_z} \leq R_o, \quad W_z \geq \frac{4}{210 \cdot 10^3} = 1,905 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 = 1,905 \cdot 10^{-5} \cdot 10^9 = 19,05 \cdot 10^3 \text{ mm}^3.$$

Navrhnete I 80,  $W = 19,4 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$ .

Posouzení:  $\sigma_x = \frac{4}{19,4 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9}} = 206185\text{kPa} < 210\text{MPa},$

návrh vyhovuje.

## Část 2-3:

Prut 2 - 3 je namáhan kombinací prostého ohybu a normálové síly:

$$N_x = 4\text{kN}, M_y = -F \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot q \cdot 1,8^2 = -10,48\text{kNm}.$$

Návrh:  $\sigma_x = \frac{|N_x|}{A} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq R_o,$

protože vliv normálové síly je značně menší než vliv ohybového momentu, vyjdeme pro návrh z podmínky:

$$\frac{|M_y|}{W_y} \leq R_o, \quad W_y \geq \frac{|M_y|}{R_o} = \frac{10,48}{210 \cdot 10^3} = 4,99 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 = 4,99 \cdot 10^{-5} \cdot 10^9 = 49,9 \cdot 10^3 \text{ mm}^3.$$

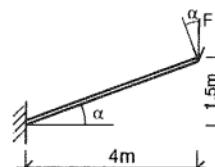
Z tabulek navrhnete I 120,  $W_y = 54,5 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$ ,  $A = 1,42 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$ .

Posouzení:

$$\sigma_x = \frac{4}{1,42 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}} + \frac{10,48}{54,5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9}} = 2817 + 192293 = 195110\text{kPa} < 210\text{MPa}, \\ \text{návrh vyhovuje.}$$

## PŘÍKLAD 1.27

Navrhnete a posudte konzolový nosník z válcované oceli zatížený dle obr. 1.40,  $F=50\text{kN}$ ,  $R_o=210\text{MPa}$  pro tah i tlak,



Obr.1.40

Extrémní ohybový moment je ve vetknutí:

$$M_y = -F \cdot 4 = -50 \cdot 4 = -200\text{kNm}.$$

Normálová síla:  $N_x = -F \cdot \sin \alpha = -50 \cdot \sin 20,56^\circ = -17,6\text{kN}$ .

Průřez ve vetknutí je namáhan kombinací ohybového momentu a normálové síly.

Návrh:  $\sigma_x = \frac{|N_x|}{A} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq R_o.$

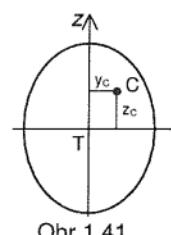
Protože vliv normálové síly je malý, navrhnete průřez pouze na ohybový moment a posoudíme pro  $N_x$  a  $M_y$ .

$$\sigma_x = \frac{|M_y|}{W_y} \leq R_o \Rightarrow W_y \geq \frac{|M_y|}{R_o} = \frac{200}{210 \cdot 10^3} = 9,52 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3.$$

Navrhnete 2 I 280,  $W_y = 2,541 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$ ,  $A = 2,61 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$ .

Posouzení:  $\sigma_x = \frac{|N_x|}{A} + \frac{|M_y|}{W_y} = \frac{17,6}{2,61 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}} + \frac{200}{2,541 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9}} = 1443 + 184843 = 186286\text{kPa} < 210000\text{kPa}$ , návrh vyhovuje.

## 1.3 JÁDRO PRŮŘEZU



Při působení excentrické síly v bodě C o souřadnicích  $y_C, z_C$  je průřez namáhan normálovým napětím (dle kap. 1.2.2):

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} \left[ 1 + \frac{z_c}{i_y^2} \cdot z + \frac{y_c}{i_z^2} \cdot y \right].$$

Budeme požadovat, aby v celém průřezu bylo normálové napětí stejného znaménka, zpravidla tlakové, protože některé stavební materiály nepřenáší tah (zdivo, zemina ...). V tomto případě požadujeme, aby neutrální osa nedělila průřez na část taženou a tlačenou, ale aby byla v krajním případě tečnou k obrysům průřezu. Představme si, že průřez obalíme tečnami, které ztotožníme s neutrálními osami a

k nim hledáme polohu excentrické síly. Získáme tím ohraničení oblasti kolem těžiště, pro kterou platí: **působí-li síla kolmá na plochu průřezu uvnitř nebo na hranici této oblasti, vyvodí v celém průřezu normálové napětí stejného znaménka. Tuto oblast nazýváme JÁDRO PRŮŘEZU.**

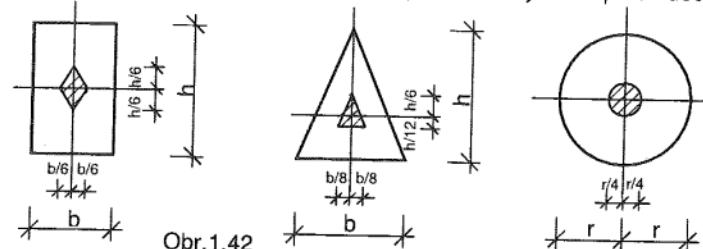
Pro neutrální osu při zatížení excentrickou silou platí:

$$\sigma_x = 0; 1 + \frac{z_c}{i_y^2} \cdot z + \frac{y_c}{i_z^2} \cdot y = 0, \text{ úseky na osách jsou: } y_N = -\frac{i_z^2}{y_c}, z_N = -\frac{i_y^2}{z_c}.$$

Označíme-li úseky na osách p, q a předpokládáme, že je známe, pak souřadnice polohy excentrické síly jsou:

$$y_c = -\frac{i_z^2}{p}, z_c = -\frac{i_y^2}{q}.$$

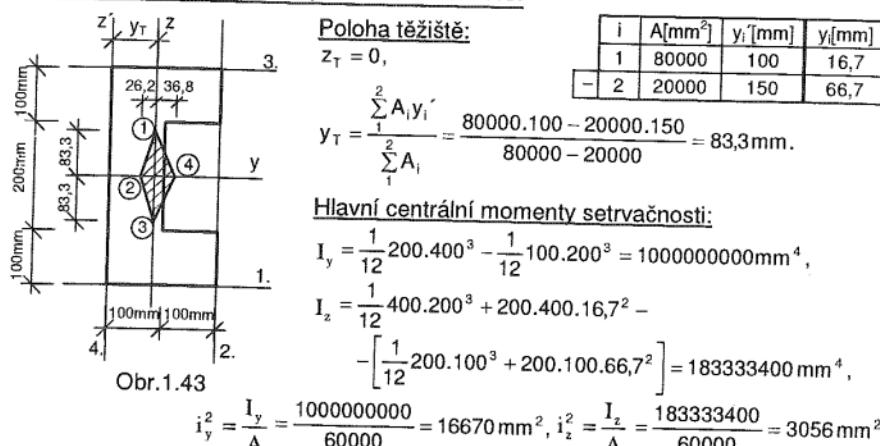
Jádra pro vybrané průřezy jsou odvozena v přednáškových skriptech doc. Muka:



Obr. 1.42

### PŘÍKLAD 1.28

Vypočtěte a vykreslete jádro průřezu dle obr. 1.43.



#### Hlavní centrální momenty setrvačnosti:

$$I_y = \frac{1}{12} 200 \cdot 400^3 - \frac{1}{12} 100 \cdot 200^3 = 10000000000 \text{ mm}^4,$$

$$I_z = \frac{1}{12} 400 \cdot 200^3 + 200 \cdot 400 \cdot 16,7^2 - \left[ \frac{1}{12} 200 \cdot 100^3 + 200 \cdot 100 \cdot 66,7^2 \right] = 183333400 \text{ mm}^4,$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{10000000000}{60000} = 16670 \text{ mm}^2, i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{183333400}{60000} = 3056 \text{ mm}^2.$$

Tečny k obrysu ztotožníme s neutrálními osami:  $y_c = -\frac{i_z^2}{p}, z_c = -\frac{i_y^2}{q}$ ,

$$1.N.O.: p=\infty, q=-200 \text{ mm}, \text{ bod jádra: } y_1 = -\frac{3056}{\infty} = 0; z_1 = -\frac{16670}{-200} = +83,3 \text{ mm},$$

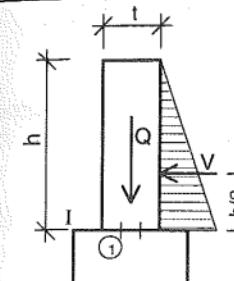
$$2.N.O.: p=116,7 \text{ mm}, q=\infty, \text{ bod jádra: } y_2 = -\frac{3056}{116,7} = -26,2 \text{ mm}; z_2 = 0,$$

$$3.N.O.: p=\infty, q=+200 \text{ mm}, \text{ bod jádra: } y_3 = 0; z_3 = -\frac{16670}{200} = -83,3 \text{ mm},$$

$$4.N.O.: p=-83,3 \text{ mm}, q=\infty, \text{ bod } y_4 = -\frac{3056}{-83,3} = 36,8 \text{ mm}; z_4 = 0.$$

### PŘÍKLAD 1.29

Stanovte minimální tloušťku opěrné zdi z prostého betonu výšky h=4m zatížené tlakem vody, je-li objemová těža prostého betonu  $\gamma_b = 23 \text{ kNm}^{-3}$ , objemová těža vody  $\gamma_v = 10 \text{ kNm}^{-3}$ .



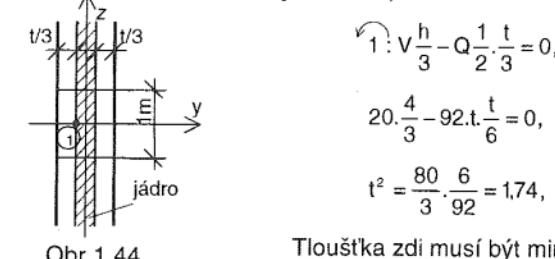
Aby ve spáře I nedošlo k překlopení zdi, musí výslednice sil V a Q procházet vpravo od bodu 1. Jádro zdi je pás o šířce t/3. Rozložení tlaku vody po výšce h je trojúhelníkové.

Na 1 m zdi působí síly:

$$V = \frac{1}{2} 1 \cdot h \cdot \gamma_v = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 = 20 \text{ kN},$$

$$Q = t \cdot h \cdot \gamma_b = t \cdot 4 \cdot 23 = 92 \cdot t \text{ tkN}$$

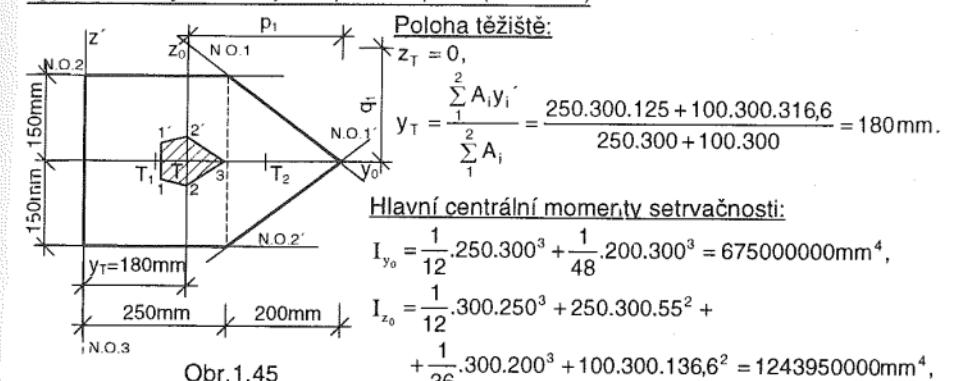
Výslednice prochází bodem 1:



Tloušťka zdi musí být minimálně 1,32m.

### PŘÍKLAD 1.30

Vypočtěte a vykreslete jádro průřezu pilíře (obr. 1.45.)



**Body na obrysu jádra:**  $y_c = -\frac{i_z^2}{p}, z_c = -\frac{i_y^2}{q}$ ,

i	p [mm]	q [mm]	y [mm]	z [mm]	i	p [mm]	q [mm]	y [mm]	z [mm]
1	270	202,5	-44	-32	1'	270	-202,5	-44	+32
2	∞	+150	0	-43	2'	∞	-150	0	+43
3	-180	∞	+66	0					

## SMYKOVÉ NAPĚTÍ V PRŮŘEZU PRUTU

### 2.1 PROSTÝ SMYK

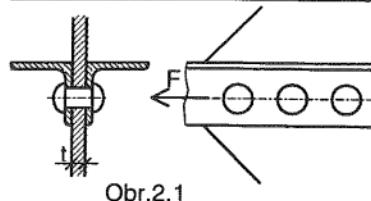
Namáhání prostým smykiem se uvažuje v případě navrhování spojovacích prostředků, jako jsou nýty, svary, šrouby, hřebíky apod. Z jednodušeně předpokládáme, že smykové napětí je na ploše rozděleno rovnoměrně a platí:

$$\tau = \frac{T}{A}.$$

Hodnota smykového napětí nesmí překročit hodnotu mezního napětí ve smyku  $R_s$ ,  
 $\tau \leq R_s$ .

#### PŘÍKLAD 2.1

Navrhněte a posudte připojení taženého prutu ze dvou úhelníků k plechu tloušťky t nýty dle obr.2.1.



Dáno:

2L55/55/6,  $t=12\text{mm}$ , nýty  $d=17\text{mm}$ ,  $F=150\text{kN}$ , mezní napětí oceli v tahu, tlaku:  $R_o=210\text{Mpa}$ , mezní napětí nýtů na smyk:  $R_s=128\text{Mpa}$ , mezní napětí nýtů na otlačení:  $R_{ot}=288\text{Mpa}$ , plocha úhelníku oslabeného nýtem je  $A=5,29\text{cm}^2$ .

Posouzení úhelníků na únosnost:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} = \frac{F}{2A_L} = \frac{150}{2.5,29.10^{-4}} = 141777\text{kPa} < 210000\text{kPa}.$$

Únosnost úhelníků vyhovuje.

Návrh počtu nýtů na smyk:

$$T = F = 150\text{kN},$$

$$\tau_s = \frac{T}{A_s} \leq R_s \Rightarrow A_s \geq \frac{T}{R_s} = \frac{150}{128.10^3} = 1,172.10^{-3}\text{m}^2.$$

Nýty jsou dvojstřížné, jeden nýt má pro smyk plochu:

$${}^1A_s = 2\pi \cdot \frac{d^2}{4} = 2\pi \cdot \frac{0,017^2}{4} = 4,54.10^{-4}\text{m}^2.$$

Pro přenesení síly  $F$  je zapotřebí n nýtů,

$$A_s = n \cdot {}^1A_s \Rightarrow n = \frac{A_s}{{}^1A_s} = \frac{1,172.10^{-3}}{4,54.10^{-4}} = 2,58.$$

Navrhne 3 nýty.

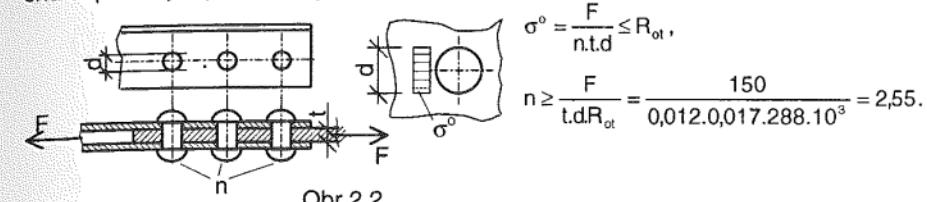
Posouzení nýtů na smyk:

$$\tau = \frac{T}{A_s} = \frac{150}{3.2 \cdot \pi \cdot 0,017^2} = \frac{150.4}{3.2 \cdot \pi \cdot 0,017^2} = 110142\text{kPa} < 128000\text{kPa},$$

návrh vyhovuje.

### Návrh počtu nýtů na otlačení:

Na jeden nýt připadne síla  $N_n = \frac{F}{n}$  na otlačení, kterou rozdělíme rovnoměrně na plochu odpovídající průměru nýtu a tloušťce plechu.



Obr.2.2

Pro splnění podmínky únosnosti na otlačení bylo zapotřebí tří nýtů jako pro nýty na smyk.

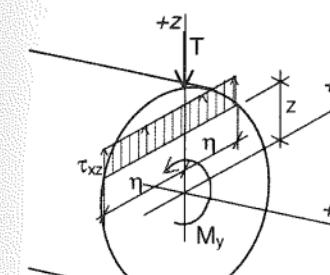
Posouzení:

$$\sigma^0 = \frac{150}{3.0,012.0,017} = 245098\text{kPa} < 288000\text{kPa}.$$

Nýty vyhoví na otlačení.

### 2.2 TANGENCIÁLNÍ NAPĚTÍ ZA OHYBU

Posouvající síla se na nosníku zpravidla vyskytuje současně s ohybovým momentem. Na nosníku vyvodí tangenciální napětí za ohybu.



Obr.2.3

Pro toto napětí platí:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\frac{T}{I_y} \cdot \frac{\bar{S}_y}{2\eta},$$

$y, z$  jsou hlavní centrální osy setrvačnosti průřezu,  
 $\tau_{xz}=\tau_{zx}$  je tangenciální napětí v průřezu  $x$  ve vzdálenosti  $z$  od osy  $y$ ,

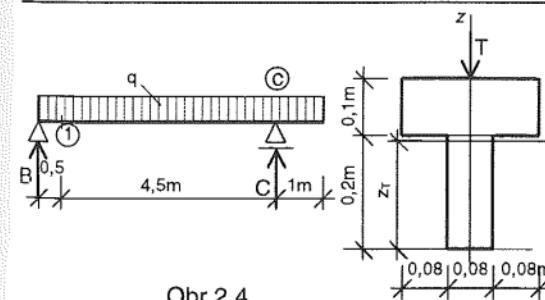
$\bar{S}_y$  je statický moment plochy části průřezu nad  $z=\text{konst.}$  k ose  $y$ ,

$2\eta$  je šířka průřezu pro  $z=\text{konst.}$ ,

$I_y$  je hlavní centrální moment setrvačnosti celého průřezu k ose  $y$ .

#### PŘÍKLAD 2.2

Stanovte průběh tangenciálního napětí v průřezu ① dle obr.2.4,  $q=10\text{kNm}^{-1}$ .



Tangenciální napětí:

$$\tau_{xz} = -\frac{T}{I_y} \cdot \frac{\bar{S}_y}{2\eta},$$

Reakce:

$$c : B \cdot 5 - q \cdot 6,2 = 0, \quad B = 24\text{kN}.$$

Posouvačí síla v průřezu ①:

$$T = B - q \cdot 0,5 = 24 - 5 = 19\text{kN}.$$

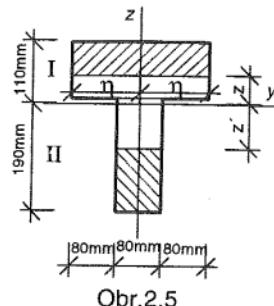
Těžiště:

$$z_T = \frac{0,08 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 0,24 \cdot 0,1 \cdot 0,25}{0,08 \cdot 0,2 + 0,24 \cdot 0,1} = 0,19\text{m}.$$

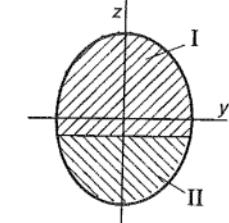
Hlavní centrální moment setrvačnosti:

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 0,08 \cdot 0,2^3 + 0,08 \cdot 0,2 \cdot 0,09^2 + \frac{1}{12} \cdot 0,024 \cdot 0,1^3 + 0,24 \cdot 0,1 \cdot 0,06^2 = 2,893 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4.$$

Funkce  $\bar{S}_y(z)$ :



Poznámka:



Obr.2.6

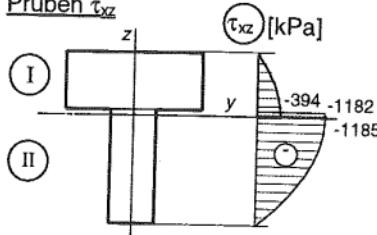
Funkce tangenciálního napětí v průřezu (1):

$$(I) z(0,01m;0,1m): \tau_{xy} = -\frac{19}{2,893 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{2\eta_1(0,11^2 - z^2)}{2,2\eta_1} = -32838(0,11^2 - z^2),$$

$$(II) z'(-0,01m;0,19m): \tau_{xy} = -\frac{19}{2,893 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{2\eta_2(0,19^2 - z'^2)}{2,2\eta_2} = -32838(0,19^2 - z'^2).$$

Průběh  $\tau_{xz}$  je v obou částech parabolický, pro krajní hodnoty z a  $z'$  je  $\tau_{xz}=0$ .

Průběh  $\tau_{xz}$



Obr.2.7

I : interval  $z(0,01m, 0,11m)$ :  $2\eta_1=0,24m$ ,

$$\bar{S}_y = 2\eta_1(0,11-z) \frac{0,11+z}{2} = 2\eta_1 \frac{0,11^2 - z^2}{2},$$

II: interval  $z'(-0,01m, 0,19m)$ :  $2\eta_2=0,08m$ ,

$$\bar{S}_y = 2\eta_2(0,19-z') \frac{0,19+z'}{2} = 2\eta_2 \frac{0,19^2 - z'^2}{2}.$$

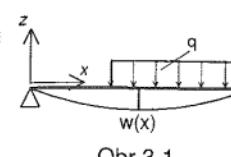
Osa y je osou těžišťovou, platí tedy, že statický moment celé plochy k této ose je roven 0.

$$S_y^I + S_y^{II} = 0 \Rightarrow S_y^I = -S_y^{II}.$$

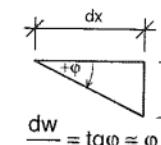
Z toho plyne, že statický moment části I můžeme spočítat jako záporně vztáty statický moment části II, tzn. že souřadnice  $z'$  uvažujeme kladně směrem dolů.

3

## OHYBOVÁ ČÁRA PRUTU PŘI PROSTÉM OHYBU



Obr.3.1



Obr.3.2

Spojnicí svislých posuvů bodů střednice, tj. těžiště jednotlivých průřezů, při daném zatížení nazýváme ohybovou čarou. Její pořadnice jsou funkcií proměnné x.

Předpoklady:

- zatížení působí v rovině xz, osa z je hlavní centrální osou setrvačnosti průřezu,
- prut je konstantního průřezu i materiálu, střednice je přímá,
- hodnoty  $w(x)$  jsou velmi malé, posun ve směru osy x zanedbáváme,
- funkce  $w(x)$  je kladná ve směru záporné osy z, zatížení je kladné rovněž ve směru záporné osy z, natočení  $\varphi$  je kladné ve směru hodinových ručiček (obr.3.1, 3.2).

### 3.1 DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE OHYBOVÉ ČARY

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\frac{M_y(x)}{EI_y}, \text{ tuto obyčejnou diferenciální rovnici dvakrát integrujeme a získáme}$$

$$\frac{dw(x)}{dx} = -\int \frac{M_y(x)}{EI_y} dx + C_1 = \varphi(x),$$

$$w(x) = - \int \left[ \int \frac{M_y(x)}{EI_y} dx + C_1 \right] dx + C_2.$$

Konstanty  $C_1, C_2$  určíme z okrajových podmínek pro funkce  $w(x)$  a  $\varphi(x)$ .

Okrajové podmínky:

$$\text{ve větknutí je } w=0, \quad \frac{dw}{dx} = \varphi = 0,$$

v kloubovém podepření je  $w=0$ ,

na rozhraní dvou intervalů, kde se mění funkce  $M_y$ , je z důvodu spojitosti

$$w^l = w^p, \quad \frac{dw^l}{dx} = \frac{dw^p}{dx},$$

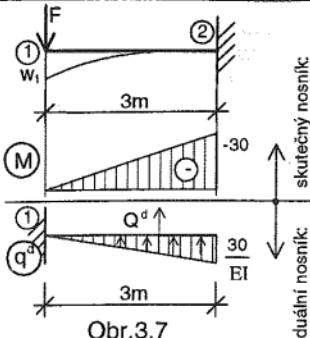
ve vnitřním kloubu je  $w^l=w^p$ .





### PŘÍKLAD 3.5

Vypočtěte průhyb  $w_1$  na konci konzoly (obr.3.7),  $F=10\text{kN}$ ,  $EI$  je konstantní.



Ohybový moment ve veknutí:

$$M_2 = -F \cdot 3 = -30 \text{ kNm}.$$

Náhradní břemeno:

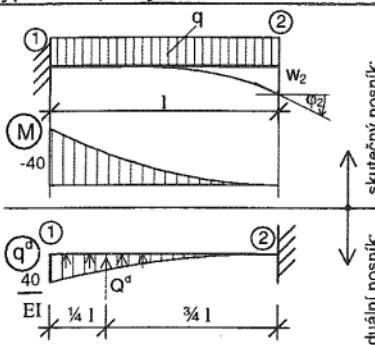
$$Q^d = \frac{1}{2} \frac{30}{EI} \cdot 3 = \frac{45}{EI},$$

$$w_1 = M_1^d = +Q^d \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{90}{EI} [\text{m}].$$

Obr.3.7

### PŘÍKLAD 3.6

Vypočtěte průhyb a natočení na konci konzoly v bodě ② (obr.3.8),  $q=5\text{kNm}^{-1}$ ,  $I=4\text{m}$ .



Ohybový moment ve veknutí:

$$M_1 = -\frac{1}{2} q I^2 = -\frac{5}{2} \cdot 4^2 = -40 \text{ kNm}.$$

Náhradní břemeno:

$$Q^d = \frac{1}{3} \frac{40}{EI} \cdot 4 = \frac{53,3}{EI},$$

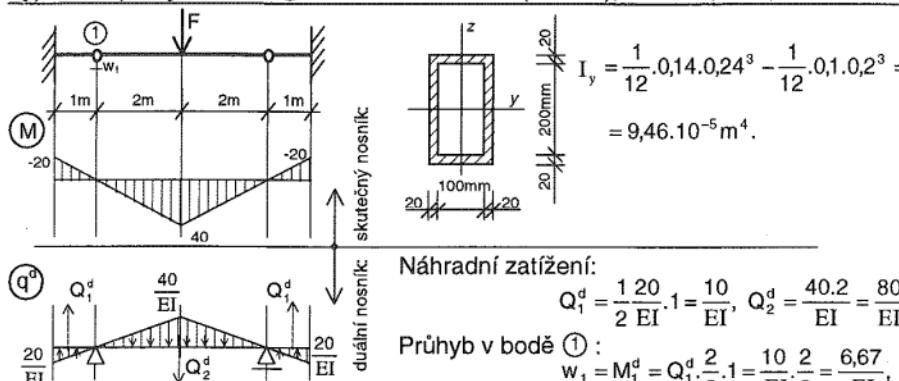
$$w_2 = M_2^d = +Q^d \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{53,3}{EI} \cdot 4 = \frac{160}{EI} [\text{m}],$$

$$\varphi_2 = +T_2^d = +Q^d = \frac{53,3}{EI}.$$

Obr.3.8

### PŘÍKLAD 3.7

Vypočtěte průhyb v bodě ① ocelového nosníku (obr.3.9),  $F=40\text{kN}$ ,  $E=2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ .



Náhradní zatížení:

$$Q_1^d = \frac{1}{2} \frac{20}{EI} \cdot 1 = \frac{10}{EI}, \quad Q_2^d = \frac{40 \cdot 2}{EI} = \frac{80}{EI}.$$

Průhyb v bodě ① :

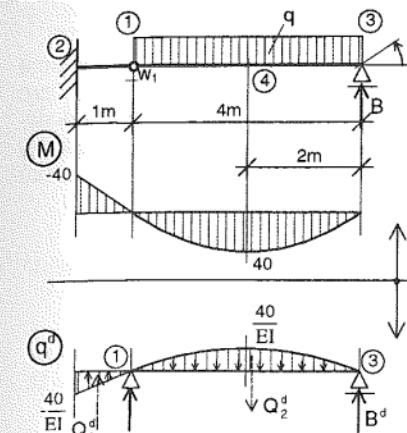
$$w_1 = M_1^d = Q_1^d \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{10}{EI} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6,67}{EI},$$

$$w_1 = \frac{6,67}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 9,46 \cdot 10^{-5}} = 0,000336 \text{ m} = 0,336 \text{ mm}.$$

Obr.3.9

### PŘÍKLAD 3.8

Určete průhyb v bodě ① a natočení v bodě ③ dle obr.3.10,  $q=20\text{kNm}^{-1}$ ,  $EI=\text{konst}$ .



$$\text{Reakce: } 1: B \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = 0, \quad B = 40 \text{ kN}.$$

Ohybové momenty:

$$M_4 = B \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 80 - 40 = 40 \text{ kNm},$$

$$M_2 = B \cdot 5 - q \cdot 4 \cdot 3 = 200 - 240 = -40 \text{ kNm}.$$

Náhradní břemena:

$$Q_1^d = \frac{1}{2} \frac{40}{EI} \cdot 1 = \frac{20}{EI}, \quad Q_2^d = \frac{2}{3} \frac{40}{EI} \cdot 4 = \frac{106,6}{EI}.$$

Průhyb v bodě ① (reakce nejsou nutné):

$$w_1 = M_1^d = Q_1^d \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{20}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{13,3}{EI} [\text{m}].$$

$$\text{Reakce: } 1: B^d \cdot 4 - Q_2^d \cdot 2 - Q_1^d \cdot \frac{2}{3} = 0,$$

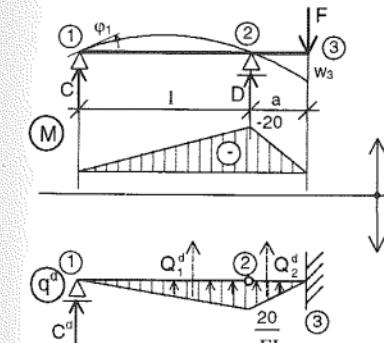
$$B^d = \frac{56,6}{EI} [\text{m}].$$

Natočení v bodě ① :

$$\varphi_3 = T_3^d = -B^d = -\frac{56,6}{EI}.$$

### PŘÍKLAD 3.9

Vypočtěte průhyb v bodě ③ a natočení v bodě ① (obr.3.11),  $I=4\text{m}$ ,  $a=1\text{m}$ ,  $F=20\text{kN}$ ,  $EI=\text{konst}$ .



$$\text{Reakce: } 2: C \cdot I + F \cdot a = 0$$

$$C = \frac{-20 \cdot 1}{4} = -5 \text{ kN},$$

$$\uparrow: D = 25 \text{ kN}.$$

Ohybový moment:  $M_2 = -F \cdot a = -20 \text{ kNm}$ .

Náhradní břemena:

$$Q_1^d = \frac{1}{2} \frac{20}{EI} \cdot 4 = \frac{40}{EI}, \quad Q_2^d = \frac{1}{2} \frac{20}{EI} \cdot 1 = \frac{10}{EI}.$$

$$\text{Reakce: } 2: C^d \cdot I + Q_1^d \cdot \frac{1}{3} I = 0,$$

$$C^d = -\frac{1}{3} Q_1^d = -\frac{40}{3EI}.$$

Natočení v bodě ① :

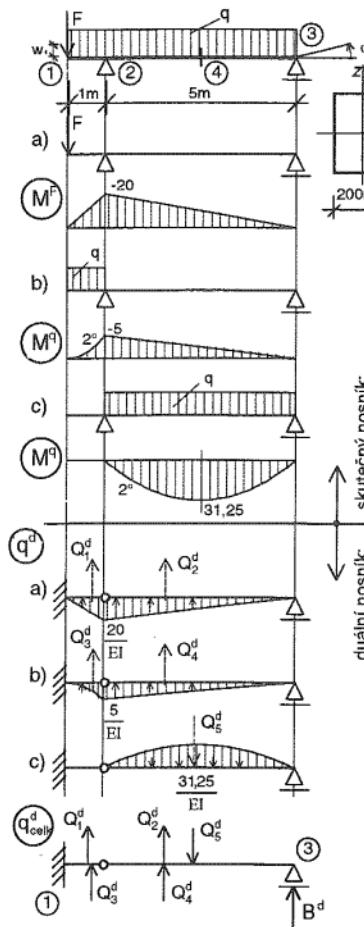
$$\varphi_1 = T_1^d = +C^d = -\frac{40}{3EI} = -\frac{13,3}{EI}.$$

Průhyb v bodě ③ :

$$w_3 = M_3^d = C^d (I+a) + Q_1^d \left( \frac{1}{3} + a \right) + Q_2^d \cdot \frac{2}{3} a = -\frac{40}{3EI} \cdot 5 + \frac{40}{EI} \cdot 2,33 + \frac{10}{EI} \cdot 0,66 = \frac{33}{EI} [\text{m}].$$

## PŘÍKLAD 3.10

Vypočtěte průhyb na konci konzoly a natočení v podpoře ③ obdélníkového průřezu dle obr.3.12,  $F=20\text{kN}$ ,  $q=10\text{kNm}^{-1}$ ,  $E=10^4\text{MPa}$ .



Obr.3.12

Zadané kombinované zatížení nahradíme třemi jednoduchými zatěžovacími stavami, pro které snadněji určíme velikost a polohu náhradního zatížení  $Q^d$ . Výsledné hodnoty přetvoření získáme superpozicí výsledků jednotlivých zatěžovacích stavů.

Ohybové momenty:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad M_2^F &= -F \cdot 1 = -20 \text{ kNm}, \\ \text{b)} \quad M_2^q &= -q \cdot 1 \cdot 0,5 = -5 \text{ kNm}, \\ \text{c)} \quad M_4^q &= \frac{1}{8} q \cdot 5^2 = \frac{1}{8} \cdot 10 \cdot 25 = 31,25 \text{ kNm}, \\ I_y &= \frac{1}{12} \cdot 0,2 \cdot 0,28^3 = 3,66 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4. \end{aligned}$$

Náhradní břemena na duálním nosníku:

$$\begin{aligned} Q_1^d &= \frac{1}{2} \frac{20}{EI} \cdot 1 = \frac{10}{EI}, & Q_4^d &= \frac{1}{2} \frac{5}{EI} \cdot 0,5 = \frac{12,5}{EI}, \\ Q_2^d &= \frac{1}{2} \frac{20}{EI} \cdot 0,5 = \frac{50}{EI}, & Q_5^d &= \frac{2}{3} \frac{31,25}{EI} \cdot 0,5 = \frac{104,2}{EI}, \\ Q_3^d &= \frac{1}{3} \frac{5}{EI} \cdot 1 = \frac{167}{EI}. \end{aligned}$$

Reakce na duálním nosníku:

$$\begin{aligned} 2 : B^d \cdot 5 + Q_2^d \cdot \frac{5}{3} + Q_4^d \cdot \frac{5}{3} - Q_5^d \cdot \frac{5}{2} &= 0, \\ B^d \cdot 5 + \frac{50}{EI} \cdot \frac{5}{3} + \frac{12,5}{EI} \cdot \frac{5}{3} - \frac{104,2}{EI} \cdot \frac{5}{2} &= 0, \\ B^d &= \frac{31,3}{EI}. \end{aligned}$$

Přetvoření:

$$\begin{aligned} w_1 &= M_1^d = Q_1^d \cdot 0,67 + Q_2^d \left(1 + \frac{5}{3}\right) + Q_3^d \cdot 0,7 + Q_4^d \left(1 + \frac{5}{3}\right) - Q_5^d \cdot 3,5 + B^d \cdot 6 = \\ &= \frac{1}{EI} [10,067 + 50,267 + 167,07 + 12,5,267 - 104,2,3,5 + 31,3,6] = \\ &= -\frac{2,16}{EI} = -\frac{2,16}{10^4 \cdot 10^3 \cdot 3,66 \cdot 10^{-4}} = -5,9 \cdot 10^{-4} \text{ m} = -0,59 \text{ mm}, \end{aligned}$$

$$\varphi_3 = T_3^d = -B^d = -\frac{31,3}{EI} = -0,0086 = -0,49^\circ.$$

4

## VZPĚRNÁ PEVNOST

### 4.1 EULEROVU KRITICKÉ BŘEMENO

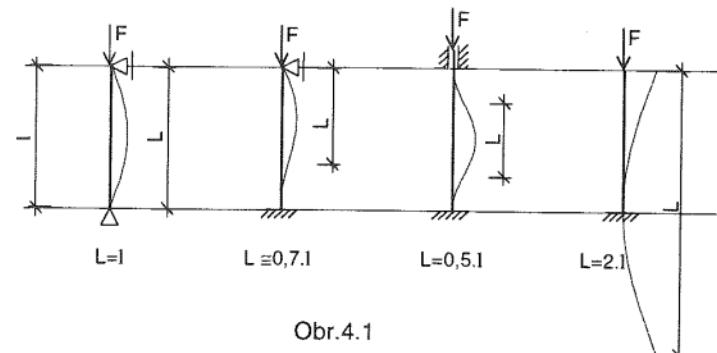
Je-li prut namáhan centrickou tlakovou silou  $F$ , pak je v rovnováze:

- stabilní, je-li  $F < F_k$ ,
- indiferentní, je-li  $F = F_k$ ,
- labilní, je-li  $F > F_k$ .

Velikost kritického břemene, nazývaného Eulerovo kritické břemeno, je:

$$F_k = EI_{min} \frac{\pi^2}{L^2}, \quad \text{kde } L \text{ je tzv. vzdělka.}$$

Vzdělka je vzdálenost inflexních bodů na ohybové čáře (sinusoidě) a závisí na způsobu uložení prutu (obr.4.1).



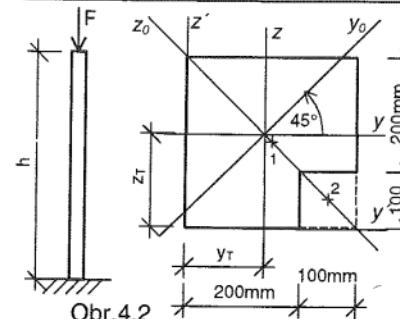
Obr.4.1

Větší únosnost má prut s vyšším kritickým břemencem. Nejvhodnější případ uložení tlačeného prutu je prut s nejmenší vzdělkou a naopak nejméně vhodný je prut s velkou vzdělkou, tzn. výhodnější je vysší kritické břemeno.

Poznámka: V různých rovinách může být různé uložení a tedy i různá vzdělná délka (viz obr.4.7).

### PŘÍKLAD 4.1

Vypočtěte velikost Eulerova kritického břemene dřevěného pilíře dle obr.4.2,  $h=3\text{m}$ ,  $E=10^4\text{MPa}$ .



Poloha těžiště:

$$y_T = \frac{\sum_i A_i y_i}{\sum_i A_i} = \frac{90000 \cdot 150 - 10000 \cdot 250}{90000 - 10000} = 137,5 \text{ mm},$$

$$z_T = 162,5 \text{ mm}.$$

Centrální momenty sestravnosti a deviační moment:

$$I_y = I_z = \frac{1}{12} \cdot 0,3 \cdot 0,3^3 + 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,0125^2 - \left[ \frac{1}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,1^3 + 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1125^2 \right] = 5,54 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4,$$

$$I_{yz} = 0 + 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,0125(-0,0125) - [0 + 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1125(-0,1125)] = 1,125 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4.$$

Hlavní centrální momenty sestravnosti:

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{I_y - I_z}{2} \right)^2 + I_{yz}^2} = 5,54 \cdot 10^{-4} \pm 1,125 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4,$$

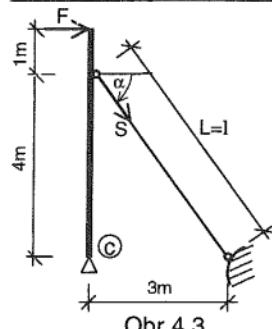
$$I_{\min} = 5,54 \cdot 10^{-4} - 1,125 \cdot 10^{-4} = 4,415 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4.$$

Eulerovo kritické břemeno:  $L=2h=6\text{m}$ ,

$$F_k = EI_{\min} \frac{\pi^2}{L^2} = 10^4 \cdot 4,415 \cdot 10^{-4} \frac{\pi^2}{6^2} = 1,21 \text{ MN}.$$

## PŘÍKLAD 4.2

Vypočtěte velikost síly  $F$  dle obr.4.3, aby v ocelovém kyvném prutu kruhového průřezu vydala sílu rovnou jedné třetině kritického zatížení,  $E=2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $r=20\text{mm}$ .



Osová síla v kyvném prutu:

$$c : F \cdot 5 + S \cdot \cos \alpha \cdot 4 = 0, \quad S = -\frac{5F}{4 \cdot \cos \alpha} = -\frac{5F}{4 \cdot 0,6} = -2,08F,$$

kyvný prut je tlačen.

Kritické zatížení v kyvném prutu:  $L=5\text{m}$ ,  $I_{\min} = \frac{\pi r^4}{4}$ ;

$$S_k = EI_{\min} \frac{\pi^2}{L^2} = 2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \frac{\pi \cdot 0,02^4}{4} \cdot \frac{\pi^2}{5^2} = 10,418 \text{ kN}.$$

Velikost kritické síly  $F_k$ :

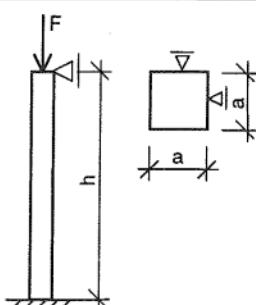
$$S_k = 2,08 F_k \Rightarrow F_k = \frac{S_k}{2,08} = \frac{10,418}{2,08} = 5 \text{ kN}.$$

Síla  $F$ , která vydívá v kyvném prutu sílu  $S$  rovnou jedné třetině kritického zatížení:

$$F = \frac{1}{3} F_k = \frac{5}{3} = 1,67 \text{ kN}.$$

## PŘÍKLAD 4.3

Navrhněte betonový pilíř čtvercového průřezu (obr.4.4) zatížený centrickou silou  $F$  tak, aby byla zachována trojnásobná bezpečnost proti možnému vybočení pilíře  $E=2,1 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ ,  $F=100\text{kN}$ ,  $h=5\text{m}$ .



Podmínka bezpečnosti:

$$F \leq \frac{F_k}{3},$$

Kritické zatížení:

$$F_k = EI_{\min} \frac{\pi^2}{L^2}, \quad L = 0,7h = 3,5 \text{ m}, \quad I_{\min} = \frac{1}{12} a^4,$$

$$F_k = 2,1 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{12} a^4 \frac{\pi^2}{3,5^2} = 1409943 a^4.$$

Dosazení do podmínky bezpečnosti:

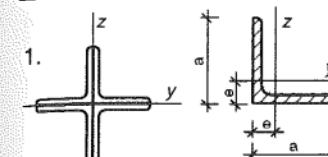
$$100 \leq \frac{1}{3} \cdot 1409943 a^4 \Rightarrow a \geq 0,1208 \text{ m}.$$

Navrheme  $a=0,13\text{m}$ .

Posouzení:  $100 \leq \frac{1}{3} \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,13^4 \cdot \frac{\pi^2}{3,5^2} = 134 \text{ kN}$ , návrh vyhovuje.

## PŘÍKLAD 4.4

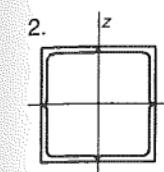
Porovnejte vhodnost uspořádání čtyř úhelníků v centricky tlačených průřezech pilířů dle obr.4.5. Spoluúčinění úhelníků je zajištěno svary, pilíře mají stejnou vzpěrnou délku  $L$ , úhelníky jsou 100/100/10.



Z tabulek získáme pro jeden úhelník:

$$a=100\text{mm}, e=28,2\text{mm}, A=1920\text{mm}^2,$$

$$I_y = I_z = 1,77 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$$



Hlavní centrální momenty sestravnosti:

$$\textcircled{1} \quad I_y = I_z = 4,177 \cdot 10^6 + 4 \cdot 1920 \cdot 28,2^2 = 13187443,2 \text{ mm}^4,$$

$$\textcircled{2} \quad I_y = I_z = 4,177 \cdot 10^6 + 4 \cdot 1920 \cdot 71,8^2 = 44300243,2 \text{ mm}^4.$$

Porovnáme kritická zatížení pro oba průřezy:

$$\frac{F_k^1}{F_k^2} = \frac{EI_{\min} \frac{\pi^2}{L^2}}{EI_{\min} \frac{\pi^2}{L^2}} = \frac{I_{\min}}{I_{\min}} = \frac{13187443,2}{44300243,2} = 0,298,$$

$$F_k^2 = 3,36 F_k^1.$$

Z výsledku vyplývá, že druhé uspořádání úhelníků je výhodnější, kritické zatížení je 3,36x větší než pro první případ.

## 4.2 VÝPOČET SE VZPĚRNOSTNÍMI SOUČINITELI

Při návrhu a posouzení tlačených prvků vycházíme z předpokladu, že normálové napětí v tlačených prutech nedosahuje hodnoty jako při prostém tlaku, platí:

$$\sigma_x = \frac{|N_x|}{A} \leq \varphi R,$$

kde  $R$  je mezní napětí v tlaku, součinitel  $\varphi$  se nazývá součinitel vzdělosti. Součinitel  $\varphi$  je vždy menší než 1 (s výjimkou prostého tlaku) a jeho velikost pro různé materiály udávají normy v závislosti na štíhlostním poměru.

Štíhlostní poměr:

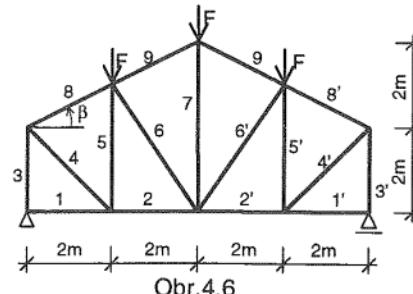
$$\lambda = \frac{L}{i_{\min}}, \quad \text{kde } L \text{ je vzpěrná délka (viz 4.1)} \text{ a } i_{\min} \text{ je minimální poloměr sestravnosti pro daný průřez},$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}.$$

Poznámka: Prut může být v různých rovinách uložen jiným způsobem a tedy vzdělná délka může být pro tentýž prut různá v různých rovinách.

## PŘÍKLAD 4.5

Navrhnete a posudte tlačené pruty dřevěné příhradové soustavy z příkladu 1.2,  $F=30\text{kN}$ ,  $R_d=10\text{MPa}$  (obr.4.6).



Osové síly jsou vypočteny v příkladu 1.2, tlačené pruty jsou:

pruty č.3, 3',  $N_x = -45\text{kN}$ ,

pruty č.5, 5',  $N_x = -30\text{kN}$ ,

pruty č.8, 8', 9, 9',  $N_x = -33,53\text{kN}$ .

$$\sin\beta = 0,447, \cos\beta = 0,894$$

Pruty č.3, 3':  $N_x = -45\text{kN}$ .

$$\text{Návrh: } \sigma_x = \frac{|N_x|}{A} \leq \varphi R_d, \text{ neznáme dvě hodnoty: } \varphi, A,$$

Odhad:  $\varphi = 0,6$ , jednu odhadneme, zpravidla  $\varphi$ .

$$A \geq \frac{|N_x|}{\varphi R_d} = \frac{45}{0,6 \cdot 10 \cdot 10^3} = 0,0075\text{m}^2, \text{ navrheme } \# 80x100\text{mm}.$$

$$\text{Posouzení: štíhlostní poměr: } \lambda = \frac{L}{i_{min}}, i_{min} = \sqrt{\frac{1}{A} \cdot 100 \cdot 80^3} = \sqrt{\frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 80} = 23\text{mm},$$

$$L = 2000\text{mm},$$

$$\lambda = \frac{2000}{23} = 87,$$

z tabulek:  $\varphi = 0,41$ ,

$$\sigma_x = \frac{45}{0,08,0,1} = 5625\text{kPa} < 0,41 \cdot 10 \cdot 10^3 = 4100\text{kPa}, \text{ návrh nevyhovuje.}$$

Nový návrh: navrheme čtverec o straně  $a=100\text{mm}$ ,  $i_{min} = \sqrt{\frac{100^4}{12 \cdot 100^2}} = 28,8\text{mm}$ .

$$\text{Posouzení: } \lambda = \frac{2000}{28,8} = 69,4, \varphi = 0,615,$$

$$\sigma_x = \frac{45}{0,1,0,1} = 4500\text{kPa} < 0,615 \cdot 10000 = 6150\text{kPa}, \text{ návrh vyhovuje.}$$

Pruty č.5, 5':  $N_x = -30\text{kN}$ ,  $\varphi$  odhadneme,  $\varphi=0,4$ ,  $L=3000\text{mm}$ .

$$\text{Návrh: } A \geq \frac{30}{0,4 \cdot 10 \cdot 10^3} = 0,0075\text{m}^2, \text{ navrheme } \# 100x100\text{mm}, i_{min} = 28,8\text{mm}.$$

$$\text{Posouzení: štíhlostní poměr } \lambda = \frac{3000}{28,8} = 104, \varphi = 0,287,$$

$$\sigma_x = \frac{30}{0,1^2} = 3000\text{kPa} < 0,287 \cdot 10000 = 2870\text{kPa}, \text{ návrh nevyhovuje.}$$

Nový návrh: navrheme  $\# 100x120\text{mm}$ ,  $i_{min} = \sqrt{\frac{120 \cdot 100^3}{12 \cdot 100 \cdot 120}} = 28,8\text{mm}$ .

$$\text{Posouzení: } \lambda = \frac{3000}{28,8} = 104, \varphi = 0,287,$$

$$\sigma_x = \frac{30}{0,1,0,12} = 2500\text{kPa} < 0,287 \cdot 10000 = 2870\text{kPa}, \text{ návrh vyhovuje.}$$

Pruty č.8, 8', 9, 9':  $N_x = -33,5\text{kN}$ ,  $\varphi$  odhadneme,  $\varphi=0,4$ .

$$\text{Návrh: } A \geq \frac{33,5}{0,4 \cdot 10 \cdot 10^3} = 0,008375\text{m}^2, \text{ navrheme } \# 100x100\text{mm}.$$

$$\text{Posouzení: } i_{min} = \sqrt{\frac{100^4}{12 \cdot 100^2}} = 28,8\text{mm}, L = \frac{2}{0,894} = 2,24\text{m},$$

$$\lambda = \frac{2240}{28,8} = 77,7, \varphi = 0,515,$$

$$\sigma_x = \frac{33,5}{0,1^2} = 3350\text{kPa} < 0,515 \cdot 10000\text{kPa}, \text{ návrh vyhovuje, předimenzováno.}$$

$$\text{Nový návrh: } \# 80x100\text{mm}, i_{min} = 23\text{mm}, \lambda = \frac{2240}{23} = 97,4, \varphi = 0,325.$$

$$\text{Posouzení: } \sigma_x = \frac{33,5}{0,08,0,1} = 4187\text{kPa} < 0,325 \cdot 10000 = 3250\text{kPa}, \text{ návrh nevyhovuje.}$$

Pruty navrheme čtvercového průřezu 100x100mm.

## PŘÍKLAD 4.6

Určete, jak velkou centrickou silou lze zatížit ocelový pilíř, je-li mezní napětí ocel  $R_o=210\text{MPa}$ . Pilíř je z válcovaného profilu I 280,  $h=4\text{m}$ .

Uložení pilíře ve směru  $y$  a  $z$  je zřejmé z obr.4.7 a 4.8.

$$\text{Z tabulek: I 280: } i_y = 111\text{mm} = 0,111\text{m},$$

$$i_z = 24,4\text{mm} = 0,0244\text{m},$$

$$A = 6,1 \cdot 10^3 \text{mm}^2 = 6,1 \cdot 10^{-3} \text{m}^2.$$

Vyvočení:

ve směru  $y$ , kolmo na osu  $z$ :      ve směru  $z$ , kolmo na osu  $y$ :

$$L = 0,7h = 2,8\text{m}, \quad L = 2h = 8\text{m},$$

$$i_z = 0,0244\text{m}, \quad i_y = 0,111\text{m},$$

$$\lambda = \frac{L}{i_z} = \frac{2,8}{0,0244} = 114,8, \quad \lambda = \frac{8}{0,111} = 72,1.$$

Rozhodující možné vychýlení je ve směru  $y$ , kolmo na osu  $z$ ; štíhlostní poměr je vyšší,  $\lambda=114,8$ . Z tabulek určíme  $\varphi=0,49$ .

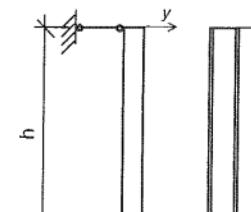


Výpočet velikosti síly F:

$$\sigma_x = \frac{|N_x|}{A} \leq \varphi R, \quad N_x = -F,$$

$$F \leq \varphi R_o A = 0,49 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 6,1 \cdot 10^{-3} = 628\text{kN}.$$

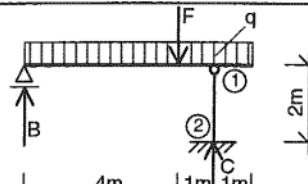
Maximální síla, kterou lze ocelový pilíř zatížit, je  $F=628\text{kN}$ .



Obr.4.8

## PŘÍKLAD 4.7

Navrhnete a posudte prut 1-2 (obr.4.9) z válcované oceli,  $R_o=210\text{MPa}$ ,  $q=20\text{kNm}^{-1}$ ,  $F=10\text{kN}$ . Hodnota štíhlostního poměru  $\lambda$  by měla být menší nebo rovna hodnotě 110.



Obr.4.9

Reakce:  $1: B.5 - F.1 - q.6.2 = 0$   
 $B = 50\text{kN}, C = 80\text{kN}$ .

Prut 1-2 je tlačen osovou silou C,  $N_x=-80\text{kN}$ , v prutu je  $M=T=0$ , jedná se o vzpěrný tlak.

Návrh:  $\sigma_x = \frac{|N_x|}{A} \leq \varphi R_o$ ,  $\varphi$  volíme 0,5,  $A \geq \frac{|N_x|}{\varphi R_o} = \frac{80}{0,5 \cdot 210 \cdot 10^3} = 7,62 \cdot 10^{-4} \text{m}^2$ ,

$$\lambda = \frac{L}{i_{min}} \leq 110, L = 0,7 \cdot 2 = 1,4 \text{m}, i_{min} \geq \frac{1400}{110} = 12,7 \text{mm},$$

navrhne **U 80**,  $A=1100\text{mm}^2$ ,  $i_{min}=13,3\text{mm}$ .

Posouzení:  $\lambda = \frac{L}{i_{min}} = \frac{1400}{13,3} = 105,3, \varphi = 0,56,$

$$\sigma_x = \frac{|N_x|}{A} = \frac{80}{1100 \cdot 10^{-6}} = 72727\text{kPa} < 0,56 \cdot 210 = 117,6\text{MPa}.$$

Návrh vyhovuje, ale průřez je předimenzován.

Nový návrh:  $\varphi = 0,5, A \geq 7,62 \cdot 10^{-4} \text{m}^2, i_{min} \geq 12,7 \text{mm}, L = 1,4 \text{m},$   
navrhne **L 65/65/6**,  $A=753\text{mm}^2$ ,  $i_{min}=12,8\text{mm}$ .

Posouzení:  $\lambda = \frac{L}{i_{min}} = \frac{1400}{12,8} = 109,4, \varphi = 0,53,$

$$\sigma_x = \frac{|N_x|}{A} = \frac{80}{753 \cdot 10^{-6}} = 106242\text{kPa} < 0,53 \cdot 210000 = 111300\text{kPa},$$

$\lambda < 110$ ,

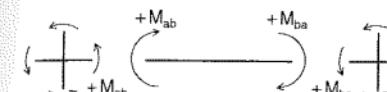
návrh vyhovuje.

Prut 1-2 navrhne z válcované oceli **L 65/65/6**.

5

## ROVINNÉ STATICKY NEURČITÉ KONSTRUKCE – CROSSOVA METODA

Jednotlivé pruty konstrukce se stýkají v bodech nazývaných styčníky. Styčníky se mohou pootočit a posunout. Vyjdeme od nepohyblivých styčníků (bez pootočení a posuvu), tzn. od prutů ve styčních veknutých. Momenty vyvozené v koncích prutů od zatížení nazýváme **momenty v dokonalem veknutí**.

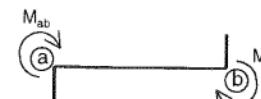


Kladné momenty v koncích prutů a kladné momenty působící na styčník předpokládáme dle obr.5.1.

Obr.5.1

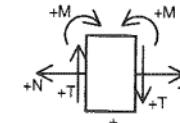
### Znaménková konvence:

Schema kladných momentů v koncích prutu:



Obr.5.2

Schema kladných vnitřních sil na prutu:



Obr.5.3

Pro posouvající a normálovou sílu jsou kladné směry jednoznačné, pro ohybové momenty jsou rozhodující „tažená vlákna“, tzn. kladný moment v konci prutu natahuje na levém konci spodní a na pravém konci horní vlákna, znaménko ohybových momentů na prutu závisí na volbě „spodních“ vláken, tzn. na postupu „zleva nebo „zprava“ (viz skriptum Statika 1, příklady).

### Ohybová tuhost prutu:

$$\text{Skutečná ohybová tuhost prutu: } k_{sk} = \frac{2EI}{l},$$

poměrná ohybová tuhost prutu:  $k = k_{sk} \cdot c$ , kde  $c$  je libovolná konstanta různá od nuly,

$$k = \frac{2EI}{l} \cdot c.$$

Je-li E konstantní pro všechny pruty:  $k = \frac{I}{l} \cdot c$ ,

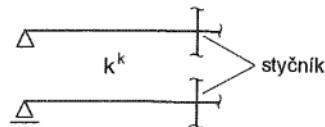
je-li EI konstantní pro všechny pruty:  $k = \frac{c}{l}$ .

Pro prut konstantního průřezu platí:  $k_{ab} = k_{ba}$ .

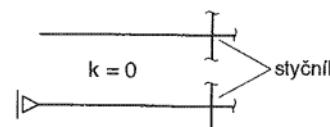
Pro prut ukončený kloubem nebo posuvem (obr.5.4) je poměrná ohybová ohybová tuhost:

$$k^k = \frac{3}{4}k,$$

pro konzolu a prut uložený na posuvu (obr.5.5) je poměrná ohybová tuhost  $k=0$ .



Obr.5.4



Obr.5.5

Rozdělovací součinitele:

$$\mu_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sum k_i} = \frac{\text{tuhost prutu } ij}{\text{součet tuhostí prutů stýkajících se ve styčníku } i}$$

#### TABULKA 2

Momenty v dokonalém veknutí:

zatížení	(a)	(b)	(a)	(b)
	$S_{ab}$	$S_{ba}$	$S_{ab}^k$	$S_{ba}^k$
	$-\frac{1}{12}ql^2$	$+\frac{1}{12}ql^2$	$-\frac{1}{8}ql^2$	$+\frac{1}{8}ql^2$
	$-F\frac{ab^2}{l^2}$	$+F\frac{a^2b}{l^2}$	$-F\frac{ab(1+b)}{2l^2}$	$+F\frac{ab(1+a)}{2l^2}$
	$\frac{6EI}{l^2} \cdot \Delta$	$\frac{6EI}{l^2} \cdot \Delta$	$\frac{3EI}{l^2} \cdot \Delta$	$\frac{3EI}{l^2} \cdot \Delta$

Celková tabulka pro různé typy zatížení je uvedena v přednáškových skriptech doc. Muka STATIKA 2.

Vyrovnání momentů ve styčnících:

Postupně uvolňujeme jednotlivé styčníky, nerovnováhu ve styčníku rozdělíme ve styčníku na pruty v poměru jejich tuhostí. Tyto hodnoty vyvolají v sousedních, dosud neuvolněných, styčnících momenty poloviční hodnoty stejného znaménka.

Výsledné ohybové momenty v koncích prutů získáme algebraickým součtem počátečních hodnot momentů S ve veknutí a přírustků momentů vzniklých postupným uvolněním styčníků.

Posouvající síly a ohybové momenty na prutu:

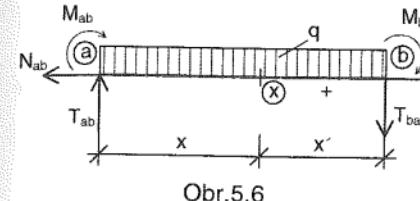
Posouvající sílu v obecném průřezu prutu vypočteme ze vzorce:

$$T_x = \frac{S_{ab} + S_{ba}}{l_{ab}}, \text{ kde } S_{ab}, S_{ba} \text{ jsou koncové momenty na prutu a-b se znaménky dle obr.5.2.}$$

$S_x$  je posouvající síla v průřezu x na prostém nosníku a - b od zatížení (bez koncových momentů).

Takto vypočteme posouvající síly v koncích prutu.

Pro výpočet posouvající síly a ohybového momentu uvnitř prutu zpravidla postupujeme stejně jako u staticky určitých konstrukcí. Prut a-b vyjmeme z konstrukce a v koncích nahradíme vnitřními silami:



Obr.5.6

Určíme postup zleva a zprava označením spodních vláken, která jsou natahována kladným ohybovým momentem, znaménkem +. Momenty M<sub>ab</sub> a M<sub>ba</sub> jsou momenty v koncích prutu, kladný smysl je dle obr.5.6.

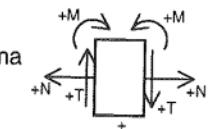
V obecném průřezu prutu a-b při zatížení plným rovnoměrným zatížením platí:

$$\text{postup zleva: } T_x = T_{ab} - qx \text{ nebo zprava: } T_x = T_{ba} + qx'$$

$$\text{postup zleva: } M_x = T_{ab} \cdot x + M_{ab} - \frac{1}{2}qx^2 \text{ nebo zprava: } M_x = -T_{ba} \cdot x' - M_{ba} - \frac{1}{2}qx'^2$$

Poznámka:

Pro určení znamének vnitřních sil použijeme známé schema



## 5.1 SPOJITÝ NOSNÍK

### PŘÍKLAD 5.1

Vypočte a vykreslete průběhy vnitřních sil na spojitém nosníku (obr.5.7), užijte Crossovu metodu.  $F=8\text{kN}$ ,  $q=4\text{kNm}^{-1}$ ,  $EI=\text{konst.}$

Styčníky: 2, 3, 4.

Poměrné ohybové tuhosti:  $k = \frac{c}{l}$ , c volíme,  $c=4$ ,  $k_{12} = 0$ , konzola, ohybová tuhost je nulová!

$$k_{23} = \frac{4}{3} = 1,33, k_{34} = \frac{4}{4} = 1,$$

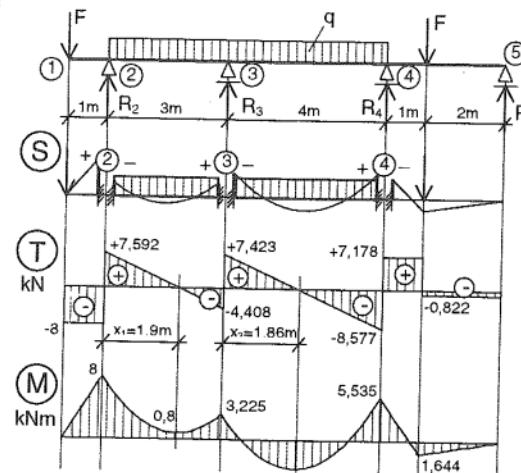
$$k_{45}^k = \frac{3}{4} = 1.$$

Rozdělovací součinitele:

$$\begin{aligned} \text{Styčník } (2) : \mu_{21} = 0, \\ \mu_{23} = 1. \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \text{Styčník } (3) : \\ \mu_{32} = \frac{1,33}{2,33} = 0,57, \\ \mu_{34} = \frac{1}{2,33} = 0,43. \end{aligned} \right\} 1$$

Styčník (4) :

$$\begin{aligned} \text{Styčník } (4) : \\ \sum k_4 = k_{43} + k_{45}^k = 1+1=2, \\ \mu_{43} = 0,5, \\ \mu_{45} = 0,5. \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \text{Styčník } (5) : \\ \mu_{54} = 0,5, \\ \mu_{52} = 0,5. \end{aligned} \right\} 1$$



Obr.5.7

### Momenty ve větknutí:

$$S_{21} = M_{21} = +F \cdot 1 = +8 \text{ kNm},$$

$$S_{23} = -\frac{1}{12} q l_{23}^2 = -\frac{1}{12} 4.3^2 = -3 \text{ kNm},$$

$$S_{32} = +\frac{1}{12} q l_{23}^2 = +3 \text{ kNm},$$

$$S_{34} = -\frac{1}{12} q l_{34}^2 = -\frac{1}{12} 4.4^2 = -5,33 \text{ kNm},$$

$$S_{43} = +\frac{1}{12} q l_{34}^2 = +5,33 \text{ kNm},$$

$$S_{45}^k = -F \frac{ab(1+b)}{2 \cdot 1^2} = -8 \frac{1.2(3+2)}{2 \cdot 3^2} = -4,44 \text{ kNm}.$$

Hodnoty momentů ve větknutí označíme ve schématu výrazným puntíkem •.

### Vyrovnání momentů:

- uvolníme styčník s největší nerovnováhou, tj. styčník (2), nerovnováha je: +8-3=+5kNm,
- rozdělíme tuto hodnotu s opačným znaménkem na pruty 2-1 a 2-3 v poměru tuhostí: na prut 2-1: (-5).0=0, na prut 2-3: (-5).1=-5kNm, podtrhneme pro vyznačení, že je styčník (2) vyrovnaný,
- tento moment vyvodí v sousedním styčníku (3) poloviční hodnotu momentu stejněho znaménka: (-5).0,5=-2,5kNm,
- uvolníme styčník (4), nerovnováha je 5,33-4,44=0,89kNm,
- nerovnováhu rozdělíme v poměru tuhostí s opačným znaménkem na pruty 4-3 a 4-5: na prut 4-3: (-0,89).0,5=-0,445kNm, na prut 4-5: (-0,89).0,5=-0,445kNm, podtrhnutím vyznačíme, že je styčník (4) vyrovnaný,
- v sousedním styčníku (3) je vyvozen moment (-0,445).0,5=-0,222kNm,
- uvolníme styčník (3), nerovnováha je: +3-5,33-2,5-0,222=-5,052kNm,
- opět rozdělíme v poměru tuhostí s opačným znaménkem na prut 3-2: 5,052.0,57=+2,88kNm a na prut 3-4: 5,052.0,43=2,172kNm, podtrhneme pro vyznačení, že je styčník (3) vyrovnaný,
- v sousedních styčnících jsou vyvozeny poloviční hodnoty momentů se stejným znaménkem, ve styčníku (2) hodnota 2,88.0,5=1,44kNm a ve styčníku (4) hodnota 2,172.0,5=1,086kNm.....
- pokračujeme s rozdělováním ve styčníku (2) a ve styčníku (4) jako na začátku.

Postupným uvolňováním jednotlivých styčníků se rozdělované hodnoty stále zmenšují. Výpočet ukončíme při dosažení požadované přesnosti.

**Výsledné hodnoty získáme algebraickým součtem všech hodnot v koncích prutů.**

**Pozor:** Při ukončení nesmí být „pod čarou“ nevyrovnaná hodnota v žádném styčníku!!!

1	0   2   1	0,57   3   0,43	0,5   4   0,5   5	
• +8	• -3	• +3	• -5,33	• +5,33
0	-5	→ -2,5	-0,222	← -0,445
+1,44	← +2,88	→ +2,172	→ +1,086	
0	-1,44	→ -0,72	-0,271	← -0,543
+0,282	← +0,565	→ +0,426	→ +0,213	
0	-0,282	[+3,225]	-3,225	-0,106
+8	-8			-0,107
				[+5,535] -5,535

**Poznámka:** Má-li konstrukce více styčníků, je vhodné uvolňovat styčníky ob jeden, aby ve styčníku mezi dvěma uvolněnými styčníky byly dvě vyvozené hodnoty, které se často vzájemně zmenšují a tím se zmenšují i přírůstky.

**Posouvající síly:**  $T_x = T_x - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_{ab}}$

$T_{12} = -F = -8 \text{ kN}$  (konzola),

$$T_{23} = T_{23} - \frac{M_{23} + M_{32}}{l_{23}} = 6 - \frac{-8 + 3,225}{3} = 7,592 \text{ kN},$$

$$T_{32} = -6 - \frac{-8 + 3,225}{3} = -4,408 \text{ kN},$$

$$T_{34} = 8 - \frac{-3,225 + 5,535}{4} = 7,423 \text{ kN},$$

$$T_{43} = -8 - \frac{-3,225 + 5,535}{4} = -8,577 \text{ kN},$$

$$T_{45} = 5,333 - \frac{-5,535 + 0}{3} = 7,178 \text{ kN},$$

$$T_{54} = -2,667 - \frac{-5,535 + 0}{3} = -0,822 \text{ kN}.$$

### Extrémy ohybového momentu:

$$\text{int. 2 - 3: } T_x = T_{23} - qx = 7,592 - 4x,$$

$$T_{x_1} = 7,592 - 4x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,9 \text{ m},$$

$$M_{x_1} = M_{23} + T_{23} \cdot x_1 - \frac{1}{2} qx_1^2 = -8 + 7,592 \cdot 1,9 - \frac{1}{2} 4 \cdot 1,9^2 = -0,8 \text{ kNm},$$

$$\text{int. 3 - 4: } T_x = 7,423 - 4x,$$

$$T_{x_2} = 7,423 - 4x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 1,86 \text{ m},$$

$$M_{x_2} = -3,225 + 7,423 \cdot 1,86 - \frac{1}{2} 4 \cdot 1,86^2 = -3,66 \text{ kNm},$$

$$\text{int. 4 - 5: } M_F = -5,535 + 7,178 \cdot 1 = 0,822 \cdot 2 = 1,644 \text{ kNm}.$$

### Reakce:

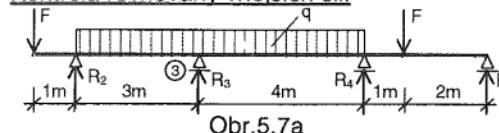
$$\uparrow: R = T^P - T^L, \quad R_2 = 7,592 - (-8) = 15,592 \text{ kN},$$

$$R_3 = 7,423 - (-4,408) = 11,831 \text{ kN},$$

$$R_4 = 7,178 - (-8,579) = 15,757 \text{ kN},$$

$$R_5 = 0 - (-0,822) = 0,822 \text{ kN}.$$

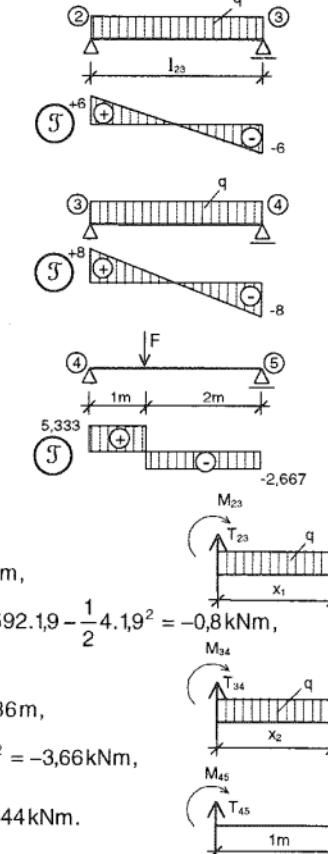
### Kontrola rovnováhy vnějších sil:



$$\uparrow: R_2 + R_3 + R_4 + R_5 - F - q \cdot 7 - F = 15,592 + 11,831 + 15,757 + 0,822 - 8 - 28 - 8 = 0,$$

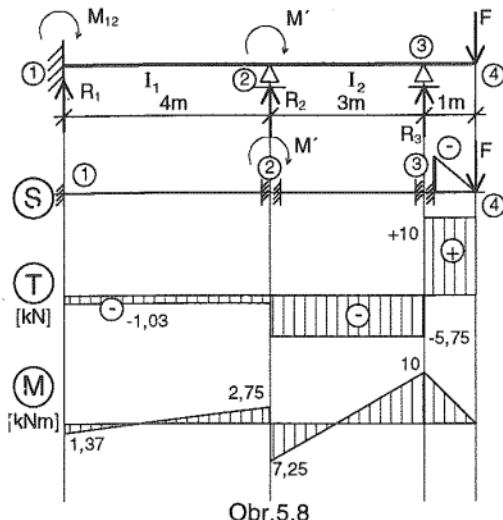
$$3: -F \cdot 4 + R_2 \cdot 3 + q \cdot 7 \cdot 0,5 - R_4 \cdot 4 + F \cdot 5 - R_5 \cdot 7 =$$

$$= -8 \cdot 4 + 15,592 \cdot 3 + 4 \cdot 7 \cdot 0,5 - 15,757 \cdot 4 + 8 \cdot 5 - 0,822 \cdot 7 = 0$$



## PŘÍKLAD 5.2

Vypočtěte a vykreslete průběhy vnitřních sil na spojitém nosníku (obr.5.8),  $F=10\text{kN}$ ,  $M'=10\text{kNm}$ ,  $I_1=0,8I_2$ .



Styčníky: 2, 3.

Poměrné ohybové tuhosti:

$$k = \frac{I}{l} \cdot c, \quad c \text{ volíme } \frac{3}{I_2}, \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{0,8} = 1,25,$$

$$k_{12} = \frac{I_1}{4} \cdot \frac{3}{I_2} = \frac{3}{4} \cdot 1,25 = 0,94,$$

$$k_{23} = \frac{I_2}{3} \cdot \frac{3}{I_2} = 1$$

$$k_{34} = 0, \text{ konzola.}$$

Rozdělovací součinitele:

Styčník ② :  $\sum k_2 = k_{12} + k_{23} = 1,94$ ,

$$\mu_{21} = \frac{0,94}{1,94} = 0,48, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

$$\mu_{23} = \frac{1}{1,94} = 0,52. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

Styčník ③ :  $\mu_{32} = 1, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$

$$\mu_{34} = 0. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

Momenty ve veknutí:

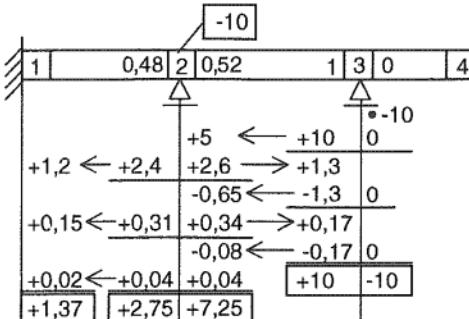
$$S_{12} = S_{21} = S_{23} = S_{32} = 0, \quad S_{34} = M_{34} = -F \cdot l = -10\text{kNm}.$$

Zatížení ve styčníku není v momentech ve veknutí, uplatní se až při uvolňování styčníku. !!!

Ve schematu ho označíme v rámečku k příslušnému styčníku.

Vyrovnání momentů:

Nejprve uvolníme styčník 3.



Kontrola rovnováhy:

Styčník ② :  $\sum M = 2,75 + 7,25 - 10 = 0$

Posouvající síly:  $T_x = \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_{ab}}$

$$T_{12} = T_{21} = 0 - \frac{1,37 + 2,75}{4} = -1,03\text{kN},$$

$$T_{23} = T_{32} = 0 - \frac{7,25 + 10}{3} = -5,75\text{kN},$$

$T_{34} = +F = +10\text{kN}$  (konzola).

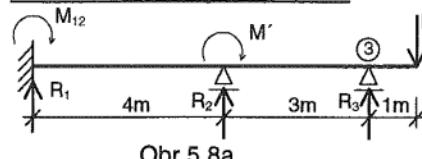
Reakce:

$$R_1 = T_{12} = -1,03\text{kN},$$

$$R_2 = -T_{21} + T_{23} = 1,03 - 5,75 = -4,72\text{kN},$$

$$R_3 = -T_{32} + T_{34} = 5,75 + 10 = 15,75\text{kN}.$$

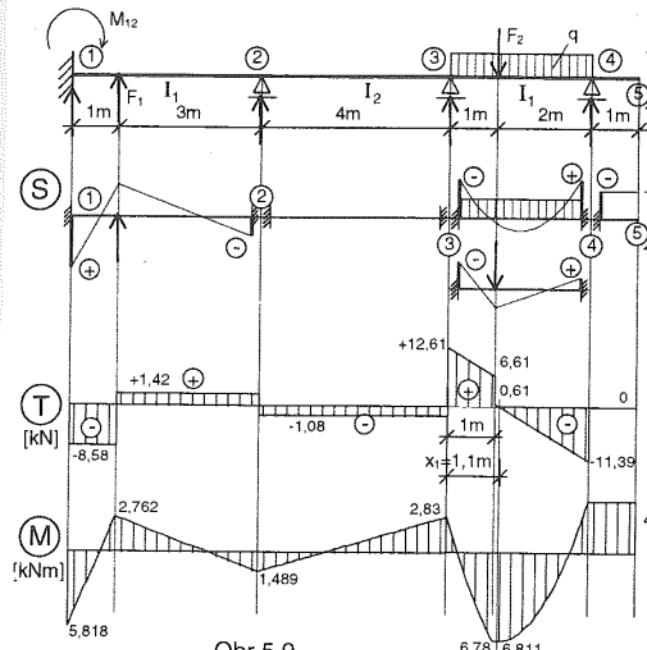
Kontrola rovnováhy vnějších sil:



$$\begin{aligned} \uparrow : & R_1 + R_2 + R_3 - F = \\ & = -1,03 - 4,72 + 15,75 - 10 = 0, \\ \curvearrowright : & R_1 \cdot 7 + R_2 \cdot 3 + F \cdot 1 + M_{12} + M' = \\ & = -1,03 \cdot 7 - 4,72 \cdot 3 + 10 \cdot 1 + 1,37 + 10 = 0. \end{aligned}$$

## PŘÍKLAD 5.3

Vypočtěte a vykreslete průběhy vnitřních sil na spojitém nosníku dle obr.5.9,  $q=6\text{kNm}^{-1}$ ,  $F_1=10\text{kN}$ ,  $F_2=6\text{kN}$ ,  $M'=4\text{kNm}$ ,  $E=\text{konst.}$ ,  $I_1: 300/500\text{mm}$ ,  $I_2: 300/400\text{mm}$ .



Styčníky: 2, 3, 4.

Poměrné ohybové tuhosti:

$$k = \frac{I}{l} \cdot c, \quad c \text{ volíme } \frac{4}{I_1},$$

$$k_{12} = \frac{I_1}{4} \cdot \frac{4}{I_1} = 1,$$

$$k_{23} = \frac{I_2}{4} \cdot \frac{4}{I_1} = \frac{1}{1} \cdot 0,3 \cdot 0,4^3 =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 0,3 \cdot 0,5^3 = \frac{4^3}{5^3} = 0,512,$$

$$k_{34} = \frac{I_1}{3} \cdot \frac{4}{I_1} = 1,33, \quad k_{45} = 0, \quad \text{konzola!}$$

Rozdělovací součinitele:

Styčník 2:

$$k_{21} + k_{23} = 1 + 0,512 = 1,512,$$

$$\mu_{21} = \frac{1}{1,512} = 0,66, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

$$\mu_{23} = \frac{0,512}{1,512} = 0,34, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

Styčník 3:

$$k_{32} + k_{34} = 0,512 + 1,33 = 1,842,$$

$$\mu_{32} = \frac{0,512}{1,842} = 0,28, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

$$\mu_{34} = \frac{1,33}{1,842} = 0,72, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

Styčník 4:

$$\mu_{43} = 1,$$

$$\mu_{45} = 0.$$

Momenty ve veknutí:

$$S_{12} = -(-F_1) \cdot \frac{ab^2}{l_{12}^2} = 10 \cdot \frac{1,3^2}{4^2} = 5,625\text{kNm},$$

$$S_{21} = +(-F_1) \cdot \frac{a^2b}{l_{12}^2} = -10 \cdot \frac{1^2 \cdot 3}{4^2} = -1,875\text{kNm},$$

$$S_{23} = S_{32} = 0,$$

$$S_{34} = -\frac{1}{12} q l_{34}^2 - F_2 \cdot \frac{ab^2}{l_{34}^2} = -\frac{1}{12} \cdot 6 \cdot 3^2 - 6 \cdot \frac{1,2^2}{3^2} = -7,166\text{kNm},$$

$$S_{43} = +\frac{1}{12} q l_{34}^2 + F_2 \cdot \frac{a^2b}{l_{34}^2} = \frac{1}{12} \cdot 6 \cdot 3^2 + 6 \cdot \frac{1^2 \cdot 2}{3^2} = 5,833\text{kNm},$$

$$S_{45} = M_{45} = -M' = -4\text{kNm},$$



## Posouvající síly:

Vyrovnání momentů: nejprve uvolníme styčník 3, dále styčníky 2 a 4.

1	0,66	2	0,34	3	0,28	0,72	4	1	0	5
• 5,625	• -1,875	+ 1,003	← + 2,006	+ 5,16	→ 2,58	• 5,833	• -4			
- 0,288	← + 0,576	+ 0,296	→ + 0,148	- 2,206	← - 4,413	0				
- 0,095	← + 0,288	← + 0,576	→ + 1,482	- 0,37	→ 0,741	0				
5,818	[ - 1,489]	[ 1,489]	[ + 0,1]	[ + 0,27]	[ + 4]	[ - 4]				
			[ 2,83]	[ - 2,83]						

$$\text{Posouvající síly: } T_x = \mathcal{T}_x - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_{ab}}$$

$$T_{12} = \mathcal{T}_{12} - \frac{M_{12} + M_{21}}{l_{12}} = -7,5 - \frac{5,818 - 1,489}{4} = -8,58 \text{ kN},$$

$$T_{21} = +2,5 - \frac{5,818 - 1,489}{4} = 1,42 \text{ kN},$$

$$T_{23} = T_{32} = 0 - \frac{1,489 + 2,83}{4} = -1,08 \text{ kN},$$

$$T_{34} = 9 + 4 - \frac{-2,83 + 4}{3} = +12,61 \text{ kN},$$

$$T_{F_2} = T_{34} - q \cdot 1 = 12,61 - 6 = 6,61 \text{ kN},$$

$$T_{43} = -9 - 2 - \frac{-2,83 + 4}{3} = -11,39 \text{ kN},$$

$$T_{45} = 0 \quad (\text{konzola zatížená momentem}).$$

Extrémy ohybového momentu:

$$\text{int. 1 - 2: } M_F = M_{12} + T_{12} \cdot 1 = 5,818 + (-8,58) \cdot 1 = -2,762 \text{ kNm},$$

$$\text{int. 3 - 4: } M_F = M_{34} + T_{34} \cdot 1 - \frac{1}{2} q \cdot 1^2 = -2,83 + 12,61 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1^2 = 6,78 \text{ kNm},$$

$$T_{x_1} = T_{34} - q \cdot x_1 - F_2 = 12,61 - 6 \cdot x_1 - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,1 \text{ m},$$

$$M_{x_1} = T_{34} \cdot x_1 + M_{34} - \frac{1}{2} q \cdot x_1^2 - F_2(x_1 - 1) = 12,61 \cdot 1,1 + (-2,83) - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1,1^2 - 6 \cdot (1,1 - 1) = 6,811 \text{ kNm}.$$

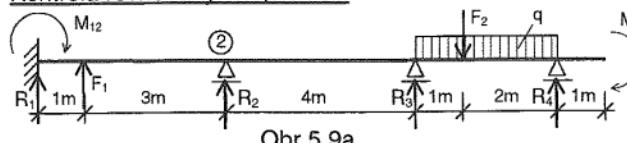
$$\text{Reakce: } R_1 = T_{12} = -8,58 \text{ kN},$$

$$R_2 = -T_{21} + T_{23} = -1,42 - 1,08 = -2,5 \text{ kN},$$

$$R_3 = -T_{32} + T_{34} = +1,08 + 12,61 = 13,69 \text{ kN},$$

$$R_4 = -T_{43} + T_{45} = -(-11,39) = 11,39 \text{ kN}.$$

Kontrola rovnováhy vnějších sil:



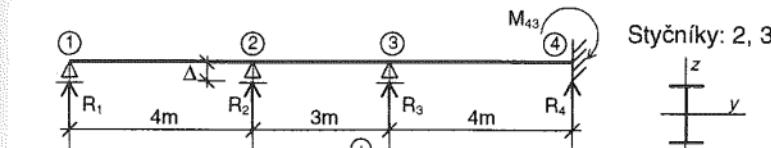
Obr.5.9a

$$\uparrow: R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + F_1 - F_2 - q \cdot 3 = -8,58 - 2,5 + 13,69 + 11,39 + 10 - 6 - 18 = 0,$$

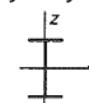
$$\begin{aligned} \curvearrowleft: & -M_{12} - R_1 \cdot 4 - F_1 \cdot 3 + R_3 \cdot 4 + R_4 \cdot 7 - F_2 \cdot 5 - q \cdot 3 \cdot 5,5 - M' = \\ & = -5,818 + 8,58 \cdot 4 - 10 \cdot 3 + 13,69 \cdot 4 + 11,39 \cdot 7 - 6 \cdot 5 - 6 \cdot 3 \cdot 5,5 - 4 = 0. \end{aligned}$$

## PŘÍKLAD 5.4

Stanovte průběh vnitřních sil na ocelovém spojitém nosníku profilu I 200, jestliže podpora 2 poklesne o 1,5cm (obr.5.10).  $E=2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $EI=\text{konst.}$



Styčníky: 2, 3.



Z tabulek určíme pro I 200:  
 $I_y = 21,4 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 = 21,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$ .

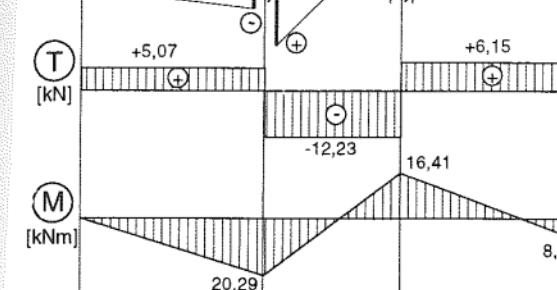
Poměrné ohybové tuhosti:

$$k = \frac{c}{1}, \quad c \text{ volíme} = 4,$$

$$k_{12}^k = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{4} = 0,75,$$

$$k_{23}^k = \frac{4}{3} = 1,33,$$

$$k_{34}^k = \frac{4}{4} = 1.$$



Obr.5.10

Rozdělovací součinitele:

$$\text{Styčník 2: } \mu_{21} = \frac{0,75}{0,75 + 1,33} = 0,36, \quad \mu_{23} = \frac{1,33}{0,75 + 1,33} = 0,64,$$

$$\text{Styčník 3: } \mu_{32} = \frac{1,33}{1,33 + 1} = 0,57, \quad \mu_{34} = \frac{1}{1,33 + 1} = 0,43.$$

Momenty ve veknutí:

$$S_{21}^k = -\frac{3EI}{l_{12}^2} \cdot \Delta = -\frac{3 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 21,4 \cdot 10^{-6}}{4^2} \cdot 0,015 = -12,6 \text{ kNm},$$

$$S_{23} = S_{32} = +\frac{6EI}{l_{23}^2} \cdot \Delta = +\frac{6 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 21,4 \cdot 10^{-6}}{3^2} \cdot 0,015 = +45 \text{ kNm}.$$

Vyrovnání momentů:

Nejprve uvolníme styčník 3.

1	0,36	2	0,64	3	0,57	4	0,43
Δ	• -12,6	• +45	• +45	0,57	0,43		
nic	← -7,05	← -12,83	← -25,65	→ -19,35	→ -9,67		
		→ -12,52	→ -6,26				
		+1,78	← +3,57	→ +2,69	→ +1,35		
		-0,64	-1,14	→ -0,57			
		[-20,29]	[+20,29]	+0,32	+0,25	→ +0,13	
				[16,41]	[ -16,41]		
						[ -8,19]	

$$\text{Posouvající síly: } T_x = \mathcal{T}_x - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_{ab}}$$

$$T_{12} = T_{21} = 0 - \frac{0 - 20,29}{4} = 5,07 \text{ kN},$$

$$T_{23} = T_{32} = 0 - \frac{20,29 + 16,41}{3} = -12,23 \text{ kN},$$

$$T_{34} = T_{43} = 0 - \frac{-16,41 - 8,19}{4} = 6,15 \text{ kN}.$$

Reakce v podporách:  $R = -T^L + T^P$ ,

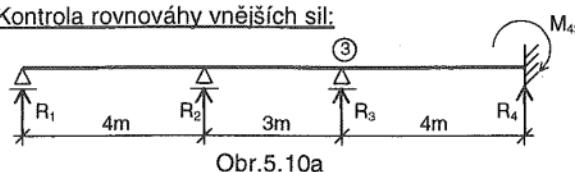
$$R_1 = +T_{12} = 5,07 \text{ kN},$$

$$R_2 = -T_{21} + T_{23} = -5,07 - 12,23 = -17,3 \text{ kN},$$

$$R_3 = -T_{32} + T_{34} = 12,23 + 6,15 = 18,38 \text{ kN},$$

$$R_4 = -T_{43} = -6,15 \text{ kN}.$$

Kontrola rovnováhy vnějších sil:



Obr. 5.10a

$$\uparrow: R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 5,07 - 17,3 + 18,38 - 6,15 = 0,$$

$$\curvearrowright: R_1 \cdot 7 + R_2 \cdot 3 - R_4 \cdot 4 + M_{43} = 5,07 \cdot 7 - 17,3 \cdot 3 + 6,15 \cdot 4 - 8,19 = 0.$$

## 5.2. RÁMY STATICKY NEURČITÉ

### 5.2.1 RÁMY STATICKY NEURČITÉ S NEPOSUVNÝMI STYČNÍKY.

Předpoklad: zanedbáme vliv normálových sil, délka všech prutů zůstane stejná. Styčníky se pootočí, ale neposunou, pokud jím v tom brání vnější podpora nebo osa symetrie.

Postup výpočtu je obdobný jako v kapitole 5.1. u spojitého nosníku. Určíme poměrné ohybové tuhosti prutů, rozdělovací součinitele a zatížení za stavu vetknutí styčníků, tj. momenty ve vetknutí. Postupně uvolňujeme jednotlivé styčníky a nerovnováhu ve styčníku rozdělíme s opačným znaménkem na pruty ve styčníku v poměru jejich tuhostí. Stanovíme vliv pootočení styčníku na sousední styčníky (dosud nepootočené), příp. na vetknutý konec, polovinou hodnoty přírůstku v pootočeném styčníku se stejným znaménkem.

### PŘÍKLAD 5.5

Vypočte a vykreslete průběhy vnitřních sil na rámu dle obr. 5.11, je-li  $EI = \text{konst.}$ ,  $q = 12 \text{ kNm}^{-1}$ ,  $M' = 6 \text{ kNm}$ .

Styčníky 4, 5.

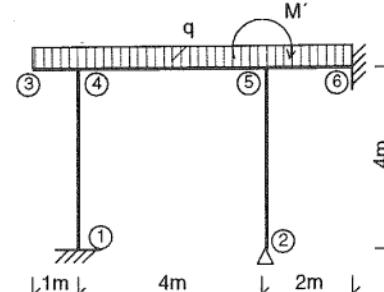
Poměrné ohybové tuhosti:

$$k = \frac{c}{l}, \quad c \text{ volíme} = 4,$$

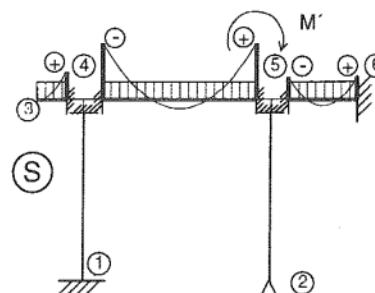
$$k_{14} = \frac{4}{4} = 1, \quad k_{45} = \frac{4}{4} = 1,$$

$$k_{25}^k = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{4} = 0,75, \quad k_{56} = \frac{4}{2} = 2,$$

$$k_{34} = 0, \text{ konzola!}$$



Obr. 5.11



Obr. 5.11a

Styčník 4:

$$\sum k_4 = k_{41} + k_{43} + k_{45} = 1 + 0 + 1 = 2,$$

$$\mu_{41} = 0,5,$$

$$\mu_{45} = 0,5. \quad \left. \begin{array}{l} \\ 1 \end{array} \right\}$$

Styčník 5:

$$\sum k_5 = k_{54} + k_{52}^k + k_{56} = 1 + 0,75 + 2 = 3,75,$$

$$\mu_{54} = \frac{1}{3,75} = 0,27, \quad \left. \begin{array}{l} \\ 1 \end{array} \right\}$$

$$\mu_{52} = \frac{0,75}{3,75} = 0,2, \quad \left. \begin{array}{l} \\ 1 \end{array} \right\}$$

$$\mu_{56} = \frac{2}{3,75} = 0,53.$$

Momenty ve vetknutí:

$$S_{14} = S_{41} = S_{52} = 0,$$

$$S_{43} = M_{43} = +\frac{1}{2} q l^2 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 1^2 = 6 \text{ kNm},$$

$$S_{45} = -\frac{1}{12} q l^2 = -\frac{1}{12} \cdot 12 \cdot 4^2 = -16 \text{ kNm},$$

$$S_{54} = +\frac{1}{12} q l^2 = +16 \text{ kNm},$$

$$S_{56} = -\frac{1}{12} q l^2 = -\frac{1}{12} \cdot 12 \cdot 2^2 = -4 \text{ kNm},$$

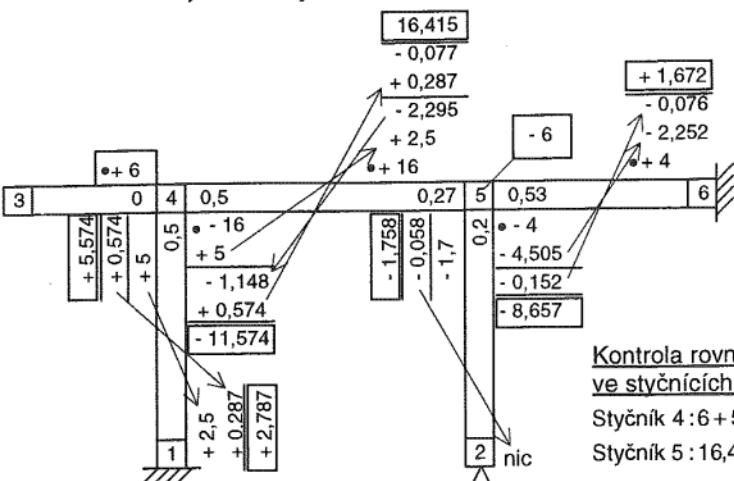
$$S_{65} = +\frac{1}{12} q l^2 = +4 \text{ kNm}.$$

Poznámka:

Jakékoliv zatížení ve styčníku nevyvolá momenty ve vetknutí S !!!  
Zatížení M' není v hodnotách S !!!

### Vyrovnání momentů:

Styčníky 4, 5. Nejprve uvolníme styčník 4, vyrovnáme, podtrhneme, polovičku převédeme se stejným znaménkem do styčníku 5 a veknutí 1, dále pokračujeme ve styčníku 5.

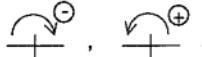


### Kontrola rovnováhy momentů ve styčnících:

$$\text{Styčník } 4: 6 + 5,574 - 11,574 = 0,$$

$$\text{Styčník } 5: 16,415 - 1,758 - 8,657 - 6 = 0.$$

Poznámka: - přírůstky připisujeme k jednotlivým prutům vějířovitě,  
- zatížení momentem  $M'$  připisujeme ke styčníku ve kterém působí,  $M'$  není na žádném prutu a uplatní se ve styčníkové nerovnováze až po uvolnění styčníku, znaménko momentu  $M'$



Posouvající síly:  $T_x = \mathcal{T}_x - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_{ab}}$ ,

$$T_{14} = T_{41} = 0 - \frac{2,787 + 5,574}{4} = -2,09 \text{ kN},$$

$$T_{25} = T_{52} = 0 - \frac{0 - 1,758}{4} = +0,44 \text{ kN},$$

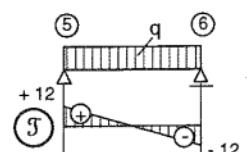
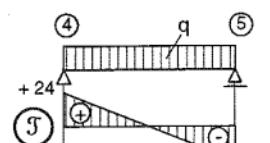
$$T_{43} = -q l_{34} = -12 \cdot 1 = -12 \text{ kN, (konzola)}$$

$$T_{45} = \mathcal{T}_{45} - \frac{M_{45} + M_{54}}{l_{45}} = 24 - \frac{-11,574 + 16,415}{4} = 22,79 \text{ kN},$$

$$T_{54} = \mathcal{T}_{54} - \frac{M_{45} + M_{54}}{l_{45}} = -24 - \frac{-11,574 + 16,415}{4} = -25,21 \text{ kN},$$

$$T_{56} = 12 - \frac{-8,657 + 1,672}{2} = +15,49 \text{ kN},$$

$$T_{65} = -12 - \frac{-8,657 + 1,672}{2} = -8,51 \text{ kN.}$$



### Normálové síly:

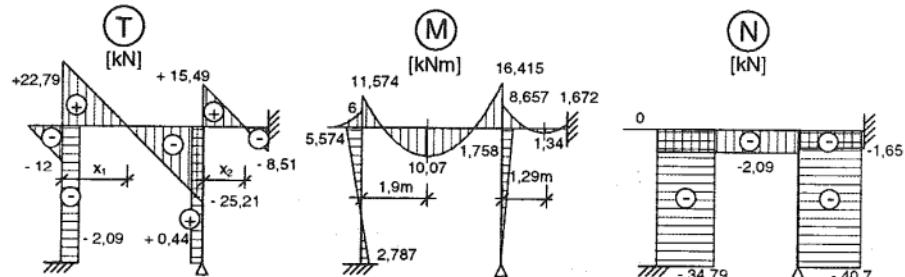
Styčník 4:

$$\rightarrow: N_{45} - T_{41} - N_{43} = 0, \quad \uparrow: T_{43} - T_{45} - N_{41} = 0, \\ N_{41} = T_{43} - T_{45} = \\ = -12 - 22,79 = \\ = -34,79 \text{ kN,} \\ N_{45} = T_{41} = -2,09 \text{ kN,}$$

Styčník 5:

$$\rightarrow: N_{56} - N_{54} - T_{52} = 0, \quad \downarrow: N_{52} + T_{56} - T_{54} = 0, \\ N_{56} = N_{54} + T_{52} = \\ = -2,09 + 0,44 = -1,65 \text{ kN,} \\ N_{52} = T_{54} - T_{56} = \\ = -25,21 - 15,49 = -40,7 \text{ kN.}$$

### Průběhy vnitřních sil:



Obr.5.12

### Extrémy ohybového momentu:

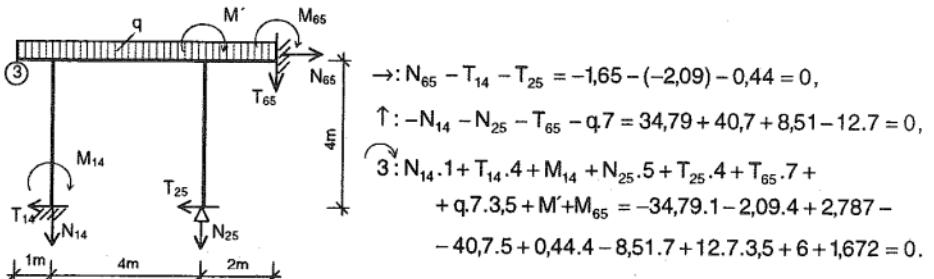
$$\text{int. } 4 - 5: \quad T_{x_1} = T_{45} - qx_1 = 22,79 - 12x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,9 \text{ m,}$$

$$M_{x_1} = T_{45} \cdot x_1 + M_{45} - \frac{1}{2}qx_1^2 = 22,79 \cdot 1,9 - 11,574 - \frac{1}{2}12 \cdot 1,9^2 = 10,07 \text{ kNm,}$$

$$\text{int. } 5 - 6: \quad T_{x_2} = T_{56} - qx_2 = 15,49 - 12x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 1,29 \text{ m,}$$

$$M_{x_2} = T_{56} \cdot x_2 + M_{56} - \frac{1}{2}qx_2^2 = 15,49 \cdot 1,29 - 8,657 - \frac{1}{2}12 \cdot 1,29^2 = 1,34 \text{ kNm.}$$

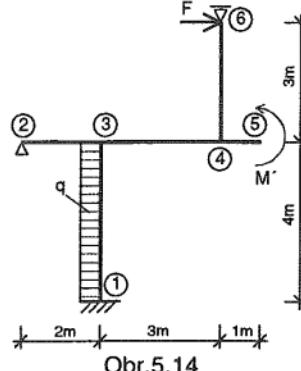
### Kontrola rovnováhy sil na celku:



Obr.5.13

## PŘÍKLAD 5.6

Vypočtěte a vykreslete průběhy vnitřních sil na rámu dle obr.5.14, použijte Crossovu metodu,  $EI=\text{konst.}$ ,  $q=3\text{kNm}^{-1}$ ,  $F=2\text{kN}$ ,  $M'=4\text{kNm}$ .



Obr.5.14

Styčníky 3, 4.

Poměrné ohybové tuhosti:  $k = \frac{c}{l}$ , c volíme = 3,

$$k_{13} = \frac{3}{4} = 0,75,$$

$$k_{34} = \frac{3}{3} = 1,$$

$$k_{23}^k = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = 1,125,$$

$k_{45} = 0$ , konzola,

$k_{46} = 0$ , konzola.

Rozdělovací součinitele:

Styčník 3:

$$\sum k = k_{13} + k_{23}^k + k_{34} = 0,75 + 1,125 + 1 = 2,875,$$

$$\mu_{31} = \frac{0,75}{2,875} = 0,26, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

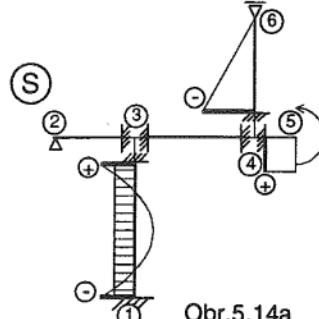
$$\mu_{32} = \frac{1,125}{2,875} = 0,39, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

$$\mu_{34} = \frac{1}{2,875} = 0,35. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

$$\text{Styčník 4: } \mu_{43} = 1, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

$$\mu_{45} = 0, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

$$\mu_{46} = 0. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$



Obr.5.14a

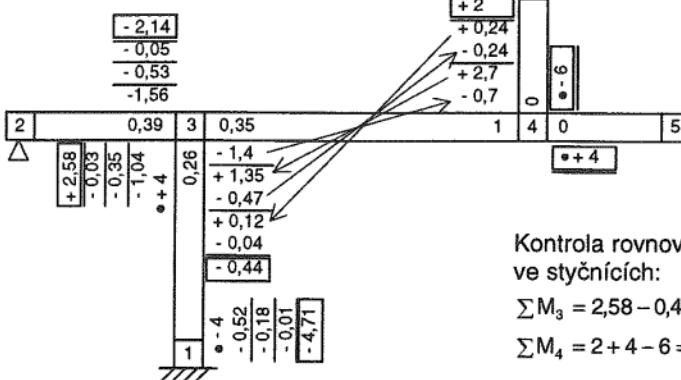
Momenty ve větknutí:

$$S_{13} = -\frac{1}{12}q l^2 = -\frac{1}{12} \cdot 3,4^2 = -4\text{kNm}, \quad S_{32} = S_{34} = S_{43} = 0,$$

$$S_{31} = +\frac{1}{12}q l^2 = +4\text{kNm}, \quad S_{45} = M_{45} = +M' = +4\text{kNm}, \quad S_{46} = M_{46} = -F \cdot 3 = -6\text{kNm}.$$

Vyrovnání momentů:

Nejprve uvolníme styčník 3.



Kontrola rovnováhy momentů  
ve styčnících:

$$\sum M_3 = 2,58 - 0,44 - 2,14 = 0,$$

$$\sum M_4 = 2 + 4 - 6 = 0.$$

Posouvající síly:  $T_x = \sum x_i - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_{ab}}$ ,

$$T_{13} = \sum x_i - \frac{M_{13} + M_{31}}{l_{13}} = 6 - \frac{-4,71 + 2,58}{4} = 6,53\text{kN},$$

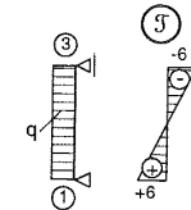
$$T_{31} = -6 - \frac{-4,71 + 2,58}{4} = -5,47\text{kN},$$

$$T_{23} = T_{32} = 0 - \frac{0 - 2,14}{2} = +1,07\text{kN},$$

$$T_{34} = T_{43} = 0 - \frac{-0,44 + 2}{3} = -0,52\text{kN},$$

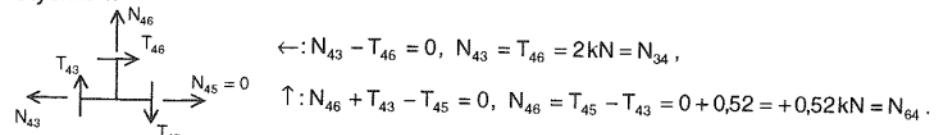
$T_{45} = 0$  (konzola zatížená momentem),

$T_{46} = +F = +2\text{kN}$  (konzola).



Normálové síly: vyjdeme ze styčníku 4, kde jsou neznámé pouze dvě normálové síly.

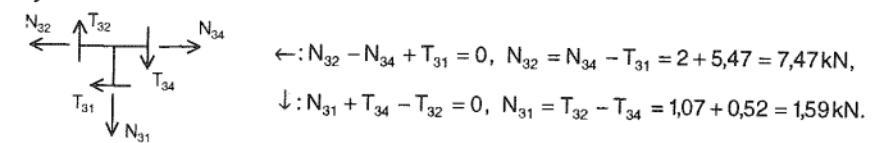
Styčník 4:



$$\leftarrow: N_{43} - T_{46} = 0, \quad N_{43} = T_{46} = 2\text{kN} = N_{34},$$

$$\uparrow: N_{46} + T_{43} - T_{45} = 0, \quad N_{46} = T_{45} - T_{43} = 0 + 0,52 = +0,52\text{kN} = N_{64}.$$

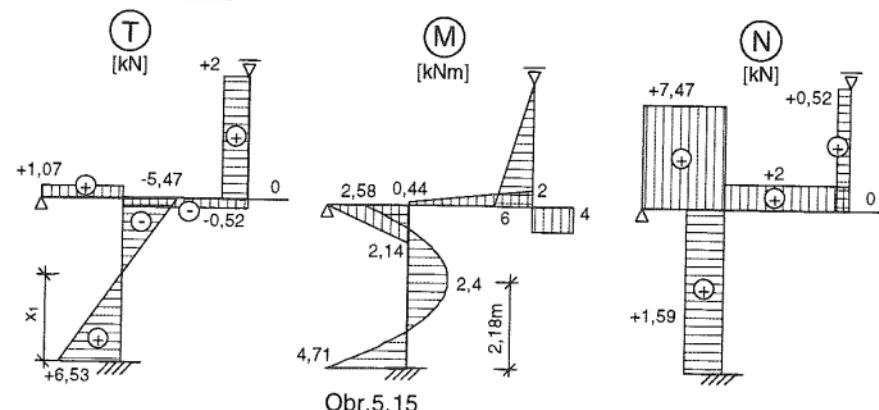
Styčník 3:



$$\leftarrow: N_{32} - N_{34} + T_{31} = 0, \quad N_{32} = N_{34} - T_{31} = 2 + 5,47 = 7,47\text{kN},$$

$$\downarrow: N_{31} + T_{34} - T_{32} = 0, \quad N_{31} = T_{32} - T_{34} = 1,07 + 0,52 = 1,59\text{kN}.$$

Průběhy vnitřních sil:



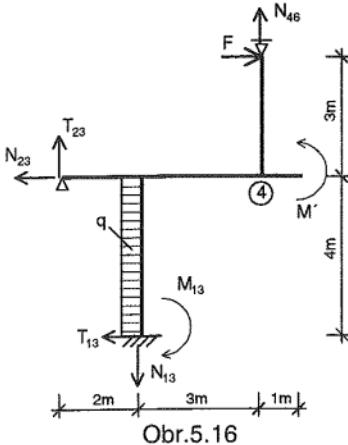
Obr.5.15

Extrém ohybového momentu:

$$\text{interval 1-3: } T_{x_1} = T_{13} - qx_1 = 6,53 - 3x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2,18\text{m},$$

$$M_e = M_{13} + T_{13} \cdot x_1 - \frac{1}{2}qx_1^2 = -4,71 + 6,53 \cdot 2,18 - \frac{3}{2} \cdot 2,18^2 = 2,4\text{kNm}.$$

Kontrola rovnováhy na celé konstrukci:

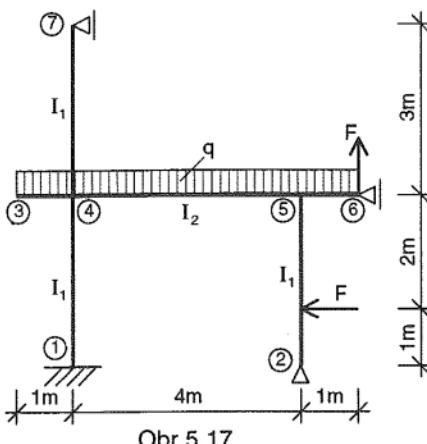


Obr. 5.16

$$\begin{aligned} \rightarrow &: F + q \cdot 4 - N_{23} - T_{13} = 2 + 12 - 7,47 - 6,53 = 0, \\ \uparrow &: T_{23} - N_{31} + N_{46} = 1,07 - 1,59 + 0,52 = 0, \\ \curvearrowright &: 4 \cdot T_{23} \cdot 5 + T_{13} \cdot 4 + M_{13} + F \cdot 3 - N_{13} \cdot 3 - M' - q \cdot 4 \cdot 2 = \\ &= 1,07 \cdot 5 + 6,53 \cdot 4 - 4,71 + 2 \cdot 3 - 1,59 \cdot 3 - 4 - 3 \cdot 4 \cdot 2 = 0. \end{aligned}$$

## PŘÍKLAD 5.7

Stanovte průběhy vnitřních sil na rámu dle obr. 5.17,  $I_2 = 2I_1$ ,  $q = 6 \text{ kNm}^{-1}$ ,  $F = 4 \text{ kN}$ .



Obr. 5.17

Styčníky 4 a 5.

Poměrné ohybové tuhosti:

$$k = \frac{I}{l} \cdot c, \quad c \text{ volíme } = \frac{3}{I_1}, \quad \frac{I_2}{I_1} = 2,$$

$$k_{14} = \frac{I_1}{3} \cdot \frac{3}{I_1} = 1,$$

$$k_{25}^k = \frac{3}{4} \cdot \frac{I_1}{3} \cdot \frac{3}{I_1} = 0,75,$$

$$k_{45} = \frac{I_2}{4} \cdot \frac{3}{I_1} = \frac{3}{4} \cdot 2 = 1,5,$$

$$k_{47}^k = \frac{3}{4} \cdot \frac{I_1}{3} \cdot \frac{3}{I_1} = 0,75,$$

$$k_{34} = k_{56} = 0 \text{ (konzoly).}$$

Rozdělovací součinitele:

Styčník 4:

$$\sum k_4 = k_{14} + k_{45} + k_{47}^k + k_{34} = 1 + 1,5 + 0,75 + 0 = 3,25,$$

$$\mu_{41} = \frac{1}{3,25} = 0,31,$$

$$\mu_{45} = \frac{1,5}{3,25} = 0,46,$$

$$\mu_{47} = \frac{0,75}{3,25} = 0,23,$$

$$\mu_{34} = 0.$$

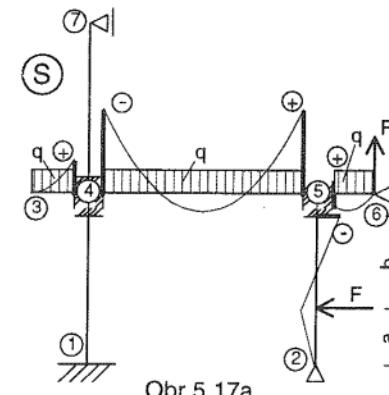
Styčník 5:

$$\sum k_5 = k_{52}^k + k_{54} + k_{56} = 0,75 + 1,5 + 0 = 2,25,$$

$$\mu_{52} = \frac{0,75}{2,25} = 0,33,$$

$$\mu_{54} = \frac{1,5}{2,25} = 0,67,$$

$$\mu_{56} = 0.$$



Obr. 5.17a

Momenty ve větknutí:

$$S_{14} = S_{41} = S_{47} = 0,$$

$$S_{43} = M_{43} = +\frac{1}{2} q l_{34}^2 = \frac{1}{2} 6 \cdot 1^2 = 3 \text{ kNm},$$

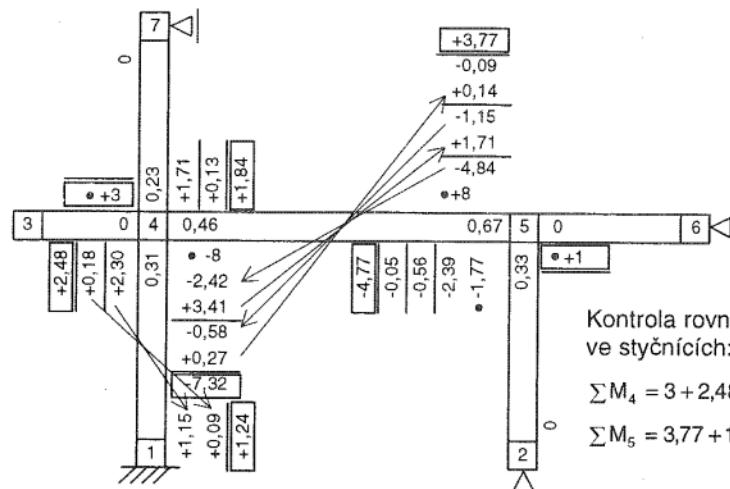
$$S_{45} = -\frac{1}{12} q l_{45}^2 = -\frac{1}{12} 6 \cdot 4^2 = -8 \text{ kNm},$$

$$S_{54} = +\frac{1}{12} q l_{45}^2 = +8 \text{ kNm},$$

$$S_{56} = F \cdot 1 - q \cdot 1 \cdot 0,5 = 4 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot 0,5 = 1 \text{ kNm},$$

$$S_{52} = +(-F) \frac{ab(1+a)}{2 l^2} = -4 \frac{1 \cdot 2(3+1)}{2 \cdot 3^2} = -1,77 \text{ kNm}.$$

Rozdělení momentů: Nejdříve uvolníme styčník 5.



Kontrola rovnováhy momentů ve styčnících:

$$\sum M_4 = 3 + 2,48 - 7,32 + 1,84 = 0,$$

$$\sum M_5 = 3,77 + 1 - 4,77 = 0.$$

Posouvající síly:  $T_x = \Gamma_x - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_{ab}}$ ,

$$T_{41} = T_{14} = 0 - \frac{1,24 + 2,48}{3} = -1,24 \text{ kN},$$

$$T_{45} = 12 - \frac{-7,32 + 3,77}{4} = 12,89 \text{ kN},$$

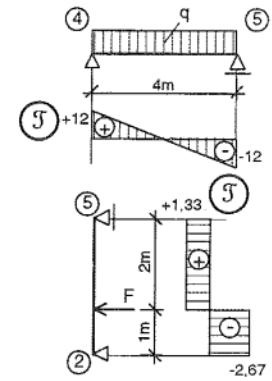
$$T_{54} = -12 - \frac{-7,32 + 3,77}{4} = -11,11 \text{ kN},$$

$$T_{25} = -2,67 - \frac{0 - 4,77}{3} = -1,08 \text{ kN},$$

$$T_{52} = 1,33 - \frac{0 - 4,77}{3} = 2,92 \text{ kN},$$

$$T_{47} = T_{74} = -\frac{0 + 1,84}{3} = -0,61 \text{ kN},$$

$$T_{43} = -q \cdot 1 = -6 \text{ kN} \text{ (konzola)}, \quad T_{56} = +q \cdot 1 - F = +6 - 4 = 2 \text{ kN} \text{ (konzola)}.$$



normálové síly:

Styčník 4:

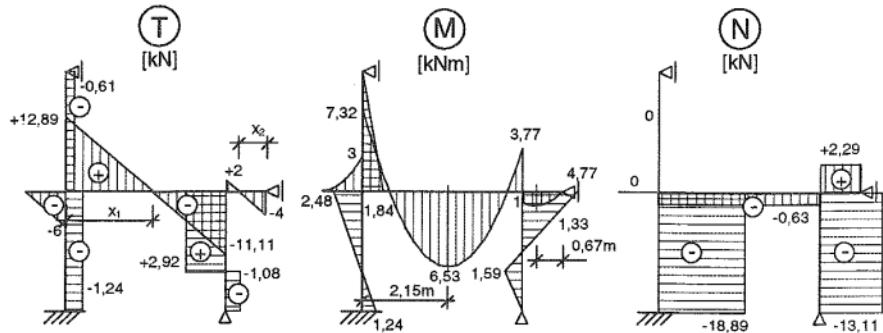
$$\begin{aligned} N_{47} &= 0 \\ T_{43} &\leftarrow \quad \uparrow T_{47} \\ N_{45} &\leftarrow \quad \downarrow N_{41} \\ T_{41} &\leftarrow \quad \downarrow T_{45} \\ N_{41} &= T_{43} - T_{45} = -6 - 12,89 = -18,89 \text{ kN} = N_{14}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{45} + T_{47} - T_{41} &= 0, \\ N_{45} = T_{41} - T_{47} &= -1,24 + 0,61 = -0,63 \text{ kN} = N_{54}, \\ \downarrow N_{41} + T_{45} - T_{43} &= 0, \\ N_{41} = T_{43} - T_{45} &= -6 - 12,89 = -18,89 \text{ kN} = N_{14}. \end{aligned}$$

Styčník 5:

$$\begin{aligned} N_{56} - N_{54} - T_{52} &= 0, \\ N_{56} = N_{54} + T_{52} &= -0,63 + 2,92 = 2,29 \text{ kN} = N_{65}, \\ \downarrow N_{52} + T_{56} - T_{54} &= 0, \\ N_{52} = T_{54} - T_{56} &= -11,11 - 2 = -13,11 \text{ kN} = N_{25}. \end{aligned}$$

růběhy vnitřních sil:



Obr.5.18

Extrémy ohybového momentu:

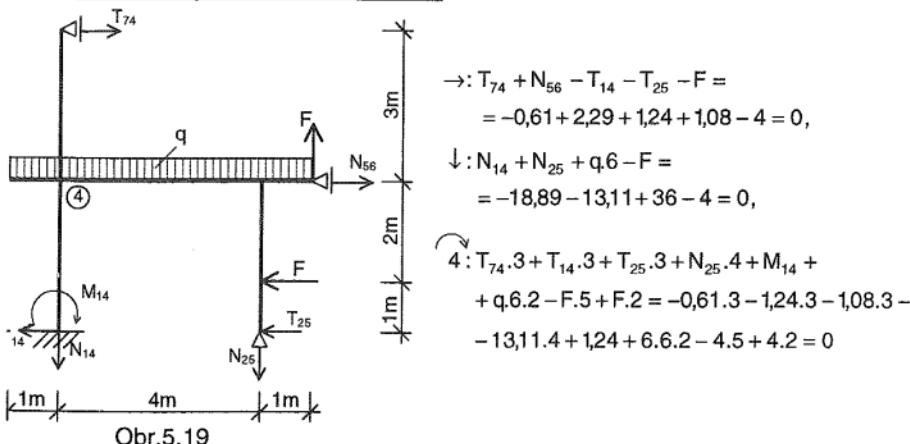
interval 4 – 5:  $T_{x_1} = T_{45} - qx_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{12,89}{6} = 2,15 \text{ m},$

$$M_{x_1} = M_{45} + T_{45} \cdot x_1 - qx_1 \cdot \frac{x_1}{2} = -7,32 + 12,89 \cdot 2,15 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2,15^2 = 6,53 \text{ kNm},$$

interval 5 – 6:  $T_{x_2} = -F + qx_2 = -4 + 6 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0,67 \text{ m},$

$$M_{x_2} = F \cdot x_2 - \frac{1}{2} q x_2^2 = 4 \cdot 0,67 - 3 \cdot 0,67^2 = 1,33 \text{ kNm}.$$

Controla rovnováhy sil na celé konstrukci:



Obr.5.19

## PŘÍKLAD 5.8

Určete vnitřní síly na rámu z ocelových válcovaných profilů (obr.5.20), užijte Crossovu metodu.  $F=8\text{kN}$ ,  $q=6\text{kNm}^{-1}$ ,  $I_1: I_{200}$ ,  $I_2: I_{160}$ .

Z tabulek určíme:

$$I_1: I_{200}, I_y = 21,4 \cdot 10^6 \text{ mm}^4,$$

$$I_2: I_{160}, I_y = 9,34 \cdot 10^6 \text{ mm}^4,$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{9,34}{21,4} = 0,436.$$

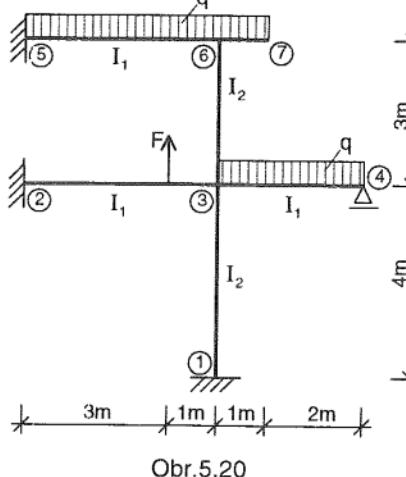
Poměrné ohybové tuhosti:

$$k = \frac{I}{l} \cdot c, \quad c \text{ volíme} = \frac{4}{I_1},$$

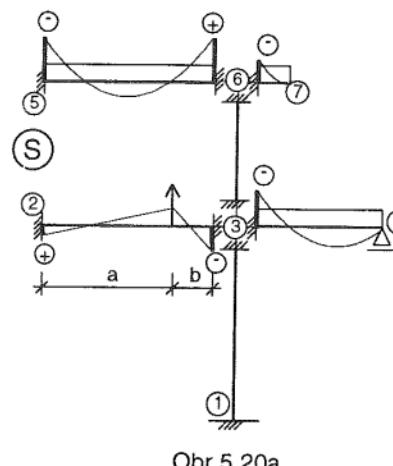
$$k_{13} = \frac{I_2}{4} \cdot \frac{4}{I_1} = 0,436, \quad k_{67} = 0 \text{ (konzola)},$$

$$k_{23} = \frac{I_1}{4} \cdot \frac{4}{I_1} = 1, \quad k_{34}^k = \frac{3}{4} \cdot \frac{I_1}{3} \cdot \frac{4}{I_1} = 1,$$

$$k_{36} = \frac{I_2}{3} \cdot \frac{4}{I_1} = 0,582, \quad k_{56} = \frac{I_1}{4} \cdot \frac{4}{I_1} = 1.$$



Obr.5.20



Obr.5.20a

Rozdělovací součinitele:

$$\text{Styčník 3: } \sum k_3 = k_{31} + k_{32} + k_{34}^k + k_{36} = 0,436 + 1 + 1 + 0,582 = 3,018,$$

$$\mu_{31} = \frac{0,436}{3,018} = 0,145,$$

$$\mu_{32} = \frac{1}{3,018} = 0,331,$$

$$\mu_{34} = \frac{1}{3,018} = 0,331,$$

$$\mu_{36} = \frac{0,582}{3,018} = 0,193.$$

} 1

Styčník 6:  $\sum k_6 = k_{63} + k_{65} + k_{67} =$

$$= 0,582 + 1 + 0 = 1,582,$$

$$\mu_{63} = \frac{0,582}{1,582} = 0,368,$$

$$\mu_{65} = \frac{1}{1,582} = 0,632,$$

$$\mu_{67} = 0.$$

} 1

Momenty ve větknutí:

$$S_{23} = -(-F) \frac{ab^2}{l^2} = 8 \frac{3 \cdot 1^2}{4^2} = 1,5 \text{ kNm},$$

$$S_{32} = +(-F) \frac{a^2b}{l^2} = -8 \frac{3^2 \cdot 1}{4^2} = -4,5 \text{ kNm},$$

$$S_{34} = -\frac{1}{8} q l^2 = -\frac{1}{8} 6 \cdot 3^2 = -6,75 \text{ kNm},$$

$$S_{13} = S_{31} = S_{36} = S_{63} = 0.$$

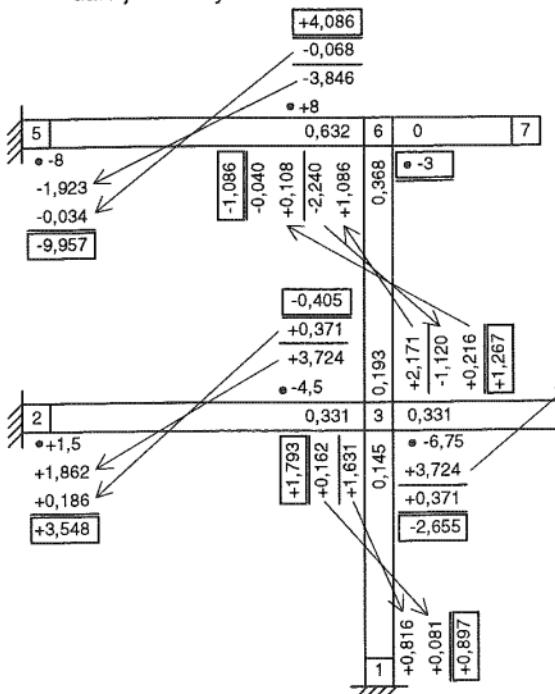
$$S_{56} = -\frac{1}{12} q l^2 = -\frac{1}{12} 6 \cdot 4^2 = -8 \text{ kNm},$$

$$S_{65} = +\frac{1}{12} q l^2 = +8 \text{ kNm},$$

$$S_{67} = M_{67} = -q \cdot 1 \cdot 0,5 = -3 \text{ kNm},$$

### Vyrovnání momentů:

- vyrovnáme styčník 3, nerovnováha je  $-4,5 - 6,75 = -11,25 \text{ kNm}$ ,
- poloviny se stejným znaménkem převedeme do styčníku 6 a větknutí 1 a 2,
- vyrovnáme styčník 6, nerovnováha je  $+8 - 3 + 1,086 = +6,086 \text{ kNm}$ ,
- dále jako u styčníku 3.



### Kontrola rovnováhy momentů ve styčnících:

Styčník 3:  
 $1,793 - 2,655 + 1,267 - 0,405 = 0,$

Styčník 6:  
 $-1,086 - 3 + 4,086 = 0.$

Posouvající síly:  $T_x = \mathcal{T}_x - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_{ab}}$ ,

$$T_{13} = T_{31} = 0 - \frac{0,897 + 1,793}{4} = -0,672 \text{ kN},$$

$$T_{23} = -2 - \frac{3,548 - 0,405}{4} = -2,786 \text{ kN},$$

$$T_{32} = 6 - \frac{3,548 - 0,405}{4} = +5,214 \text{ kN},$$

$$T_{34} = 9 - \frac{-2,655 + 0}{3} = 9,885 \text{ kN},$$

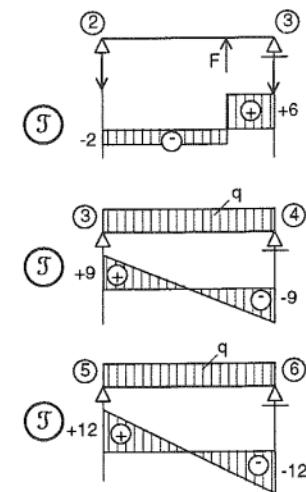
$$T_{43} = -9 - \frac{-2,655 + 0}{3} = -8,115 \text{ kN},$$

$$T_{36} = T_{63} = 0 - \frac{1,267 - 1,086}{3} = -0,06 \text{ kN},$$

$$T_{56} = 12 - \frac{-9,957 + 4,086}{4} = +13,468 \text{ kN},$$

$$T_{65} = -12 - \frac{-9,957 + 4,086}{4} = -10,532 \text{ kN},$$

$$T_{67} = +q_1 = 6 \text{ kN (konzola)}, \quad T_{76} = 0.$$



### Normálové síly:

$$N_{67} = N_{34} = 0,$$

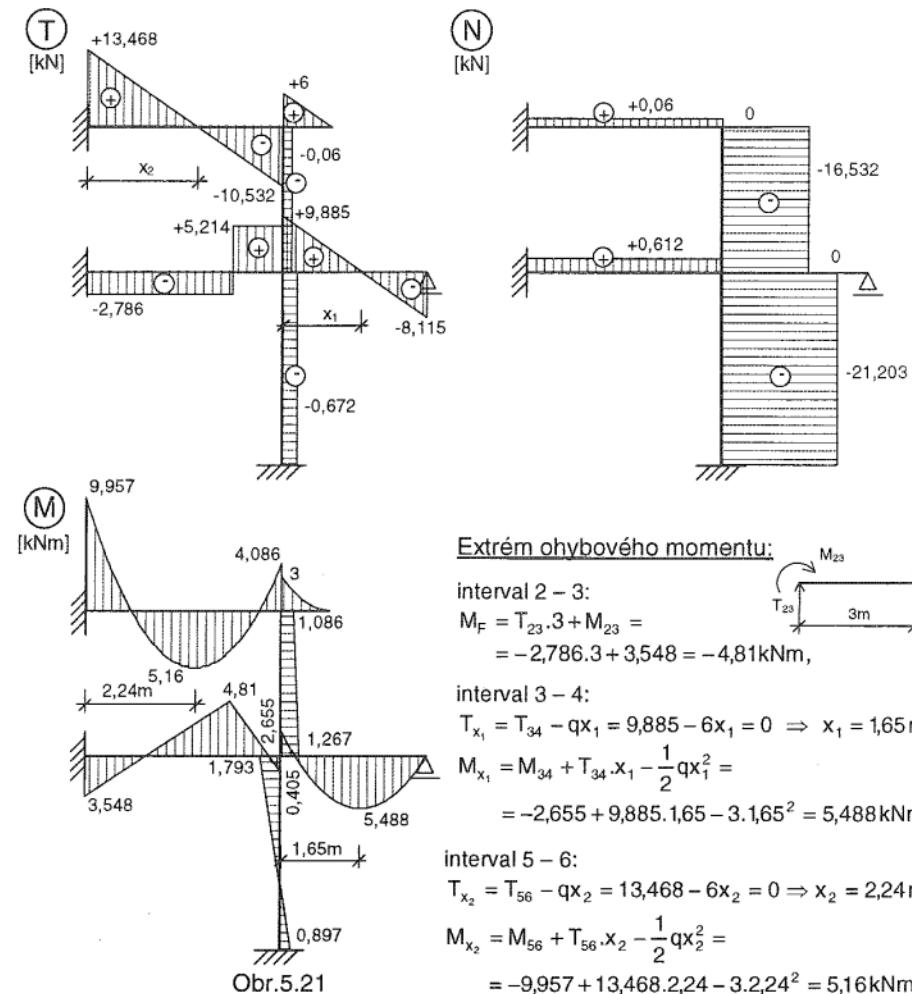
Styčník 6:

$$\begin{aligned} \leftarrow: N_{65} + T_{63} &= 0, & N_{65} = N_{56} = -T_{63} &= \\ &= +0,06 \text{ kN}, \\ \downarrow: N_{63} + T_{67} - T_{65} &= 0, & N_{63} = T_{65} - T_{67} &= \\ &= -10,532 - 6 & &= -16,532 \text{ kN}, \\ N_{36} &= N_{63}, & & \end{aligned}$$

Styčník 3:

$$\begin{aligned} \leftarrow: N_{32} + T_{31} - T_{36} &= 0, & N_{32} = N_{23} = T_{36} - T_{31} &= \\ &= -0,06 + 0,672 & &= 0,612 \text{ kN}, \\ \downarrow: N_{31} + T_{34} - T_{32} - N_{36} &= 0, & N_{31} = T_{32} - T_{34} + N_{36} &= \\ &= 5,214 - 9,885 - 16,532 & &= -21,203 \text{ kN} = N_{13}. \end{aligned}$$

### Průběhy vnitřních sil:



### Extrém ohybového momentu:

interval 2 – 3:

$$M_F = T_{23} \cdot 3 + M_{23} = -2,786 \cdot 3 + 3,548 = -4,81 \text{ kNm},$$

interval 3 – 4:

$$T_{x_1} = T_{34} - qx_1 = 9,885 - 6x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,65 \text{ m},$$

$$M_{x_1} = M_{34} + T_{34} \cdot x_1 - \frac{1}{2} qx_1^2 = -2,655 + 9,885 \cdot 1,65 - 3 \cdot 1,65^2 = 5,488 \text{ kNm},$$

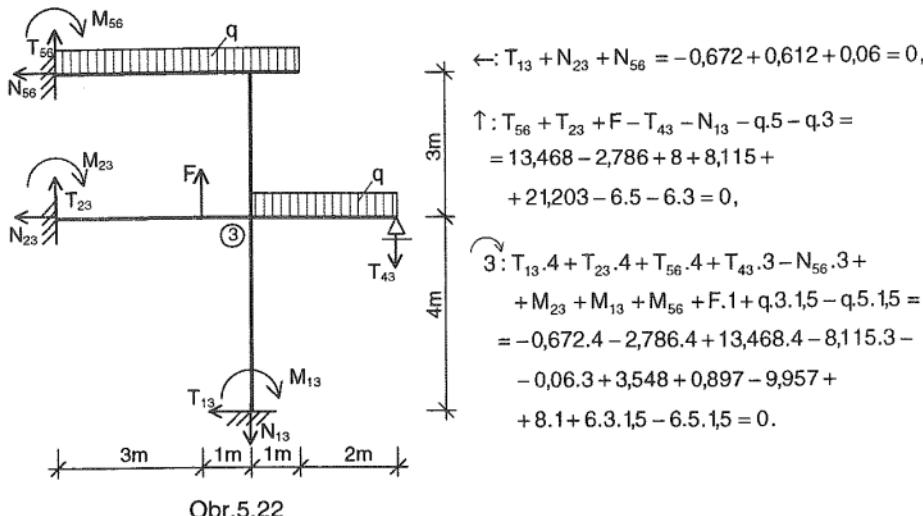
interval 5 – 6:

$$T_{x_2} = T_{56} - qx_2 = 13,468 - 6x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2,24 \text{ m},$$

$$M_{x_2} = M_{56} + T_{56} \cdot x_2 - \frac{1}{2} qx_2^2 = -9,957 + 13,468 \cdot 2,24 - 3 \cdot 2,24^2 = 5,16 \text{ kNm}.$$

Obr.5.21

### Kontrola rovnováhy sil na celém rámu:

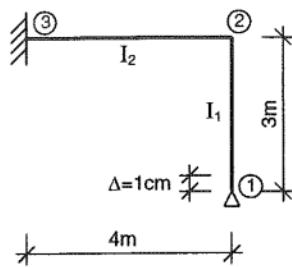


Obr.5.22

### PŘÍKLAD 5.9

Vypočtěte a vykreslete průběhy vnitřních sil, posune-li se podpora 1 železobetonového rámu (obr.5.23) o 1 cm směrem vzhůru.  $E=2,1 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ ,  $I_1:300/300\text{mm}$ ,  $I_2:300/500\text{mm}$ .

Styčník 2:  $\Delta$  je známý posun bodu 1 a tedy i známý posun styčníku 2.



Obr.5.23

#### Poměrné ohybové tuhosti:

$$k = \frac{1}{1} \cdot c, \quad c \text{ volíme} = \frac{4}{I_1},$$

$$k_{12}^k = \frac{3}{4} \cdot \frac{I_1}{3} \cdot \frac{4}{I_1} = 1,$$

$$k_{23} = \frac{I_2}{4} \cdot \frac{4}{I_1} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{1}{12} \cdot 0,3 \cdot 0,5^3}{\frac{1}{12} \cdot 0,3 \cdot 0,3^3} = \frac{5^3}{3^3} = 4,63.$$

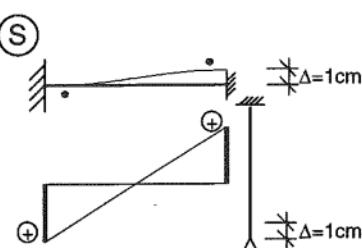
#### Rozdělovací součinitely:

$$\text{Styčník } 2: \sum k_2 = 1 + 4,63 = 5,63,$$

$$\begin{aligned} \mu_{21} &= \frac{1}{5,63} = 0,18, \\ \mu_{23} &= \frac{4,63}{5,63} = 0,82. \end{aligned} \quad \left. \right\} 1$$

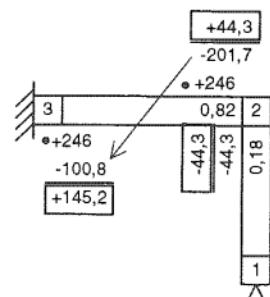
#### Momenty ve veknutí:

$$S_{23} = S_{32} = + \frac{6EI_2}{l^2} \cdot \Delta = \frac{6 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,3 \cdot 0,5^3}{4^2} \cdot 0,01 = 246 \text{ kNm.}$$

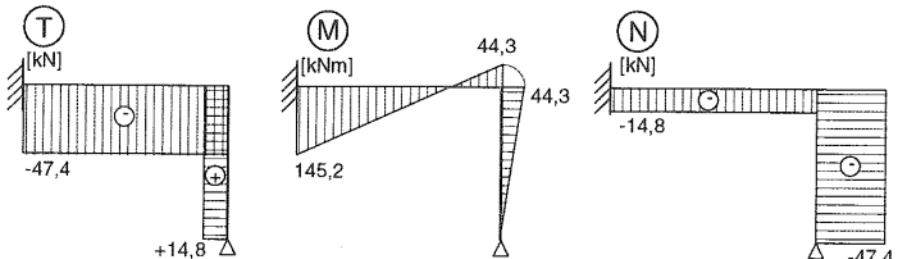


Obr.5.23a

### Vyrovnání momentů:



### Průběhy vnitřních sil:



Obr.5.24

## 5.2.2 RÁMY STATICKY NEURČITÉ S POSUVNÝMI STYČNÍKY

- Předpoklady:
- zanedbáváme vliv normálových sil, pruty se nezkrátí ani neprodlouží,
  - posuv styčníku  $\Delta$  je velmi malá hodnota vzhledem k délce prutu, styčník se posune po kolmici k osě prutu (ne po kružnici),
  - „patro“ je část konstrukce, která se může posunout svisle nebo vodorovně, nebrání-li tomu vnější podpora.

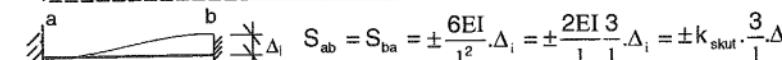
Řešení: Hodnotu patrového posuvu  $\Delta_1$  (resp. patrových posuvů  $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ ) neznáme. Zatížení rozdělíme na:

- zatížení známé: silami, momenty, známým posuvem  $\Delta$ , např. posuvem podpory (viz př.5.9),
- zatížení neznámé: patrovými posuvy  $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ , kde  $\Delta_1, \Delta_2, \dots$  zvolíme,
- styčníky s možným posuvem podepřeme přidanými podporami, ve kterých při jednotlivých zatěžovacích stavech (známým a neznámým zatížením) vzniknou reakce  $H_1^0, H_1^I, H_1^{II}, \dots, H_2^0, H_2^I, H_2^{II}, \dots$ ,
- z podmínky, že výsledná reakce v přidané podpoře je nulová určíme velikosti  $X_1, X_2, \dots$ .

### Momenty ve vektoru od zvoleného $\Delta_1$ :

Z tabulky II určíme:

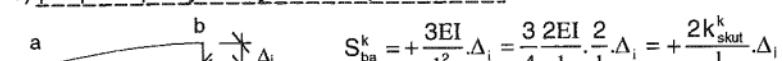
a) pro prut oboustranně upnutý ve styčnících:



protože  $\Delta_1$  neznáme, volíme je libovolně a vzhledem k tomu, že  $k = k_{skut} \cdot c$  můžeme psát:

$$S_{ab} = S_{ba} = \pm \frac{3k}{1} \cdot D, \text{ kde } D \text{ je libovolná konstanta různá od nuly, znaménko určíme podle smyslu zvoleného posuvu } \Delta_1, \text{ k je poměrná ohybová tuhost prutu a-b.}$$

b) pro prut upnutý ve styčníku na jedné straně:

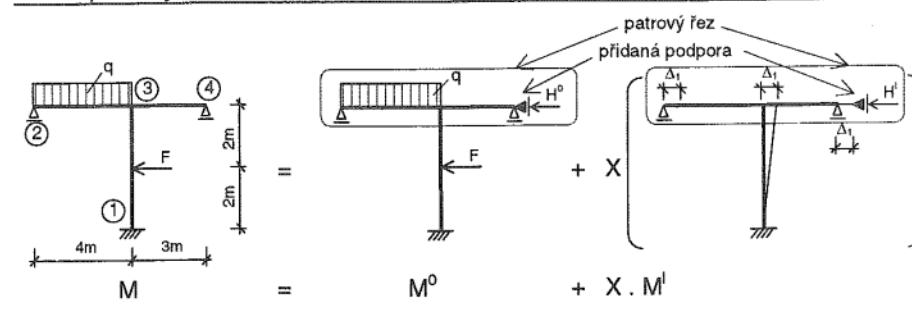


opět  $\Delta_1$  volíme a pro libovolné  $\Delta_1$  lze psát:

$$S_{ba}^k = \pm \frac{2k^k}{1} \cdot D, \text{ kde } D \text{ je libovolná konstanta různá od nuly, znaménko určíme podle smyslu zvoleného posuvu } \Delta_1, \text{ k je poměrná ohybová tuhost prutu a-b.}$$

### PŘÍKLAD 5.10

Určete průběhy vnitřních sil na rámu dle obr.5.25, EI=konst., F=8kN, q=8kNm<sup>-1</sup>.



Obr.5.25

### Poměrné ohybové tuhosti:

$$k = \frac{c}{l}, \text{ c volíme } = 4,$$

$$k_{13} = \frac{4}{4} = 1,$$

$$k_{23}^k = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{4} = 0,75,$$

$$k_{34}^k = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1.$$

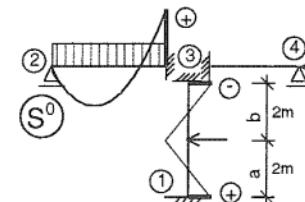
### Rozdělovací součinitele:

Styčník 3 :

$$\begin{aligned} \sum k_3 &= k_{13} + k_{23}^k + k_{34}^k = 1 + 0,75 + 1 = 2,75, \\ \mu_{31} &= \frac{1}{2,75} = 0,364, \\ \mu_{32} &= \frac{0,75}{2,75} = 0,272, \\ \mu_{34} &= \frac{1}{2,75} = 0,364. \end{aligned} \quad \left. \right\} 1$$

### 1. stadium výpočtu – první zatěžovací stav (známé zatížení):

#### Momenty ve vektoru:



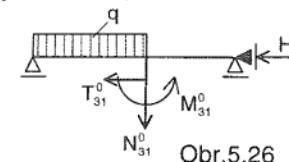
$$S_{13}^0 = +F \cdot \frac{a \cdot b^2}{l^2} = 8 \cdot \frac{2 \cdot 2^2}{4^2} = 4 \text{ kNm},$$

$$S_{31}^0 = -F \cdot \frac{a^2 \cdot b}{l^2} = -4 \text{ kNm},$$

$$S_{32}^k = +\frac{1}{8} q l^2 = \frac{1}{8} \cdot 8 \cdot 4^2 = 16 \text{ kNm}.$$

#### Reakce v přidané podpoře:

Patrovým řezem odřízneme tu část konstrukce, která se posune o  $\Delta_1$  a části, které jsme odřízli, nahradíme vnitřními silami M, T, N (viz Statika 1, příklady).



$$\leftarrow : H^0 + T_{31}^0 = 0,$$

$$H^0 = -T_{31}^0,$$

$$H^0 = -5,64 \text{ kN}.$$

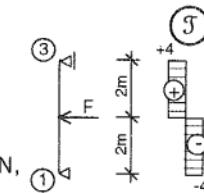
$$T_{31}^0 = \frac{M_{31}^0 + M_{13}^0}{l_{13}} = \frac{-8,37 + 1,82}{4} = 5,64 \text{ kN},$$

$$\Sigma M_3 = 12,74 - 4,37 - 8,37 = 0.$$

#### Kontrola rovnováhy momentů:

$$\Sigma M_3 = 12,74 - 4,37 - 8,37 = 0.$$

Reakci v přidané podpoře určíme z podmínky rovnováhy sil na odříznuté části ve směru reakce H^0.

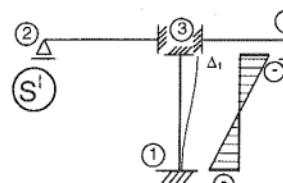


**Poznámka:** Normálovou sílu a ohybový moment pro sestavení rovnice pro reakci v přidané podpoře nepotřebujeme, nebudeme je zakreslovat.

### 2. stadium výpočtu – druhý zatěžovací stav (neznámé zatížení $\Delta_1$ ):

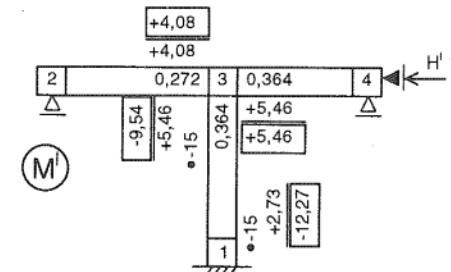
#### Momenty ve vektoru:

#### Vyrovnání momentů:



$$S_{13}^1 = S_{31}^1 = -\frac{3k_{31}}{l} \cdot D, \text{ D volíme } = 20,$$

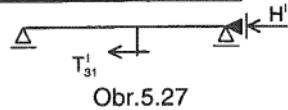
$$S_{13}^1 = S_{31}^1 = -\frac{3 \cdot 1}{4} \cdot 20 = -15 \text{ kNm}.$$



#### Kontrola rovnováhy momentů:

$$\Sigma M_3 = -9,54 + 4,08 + 5,46 = 0.$$

### Reakce v přidané podpoře:



Obr.5.27

$$\leftarrow: H^I + T^I_{31} = 0,$$

$$H^I = -T^I_{31} = -5,45 \text{ kN}.$$

$$T^I_{31} = T^I_{31} - \frac{M^I_{31} + M^I_{13}}{I_{13}} = 0 - \frac{-9,54 - 12,27}{4} = +5,45 \text{ kN}.$$

### Výsledná reakce v přidané podpoře:

$$H = H^0 + H^I \cdot X = 0,$$

$$-5,64 - 5,45 \cdot X = 0,$$

$$X = -\frac{5,64}{5,45} = -1,03.$$

### Výsledné ohybové momenty:

$$M = M^0 + X \cdot M^I,$$

$$M_{13} = 1,82 + (-1,03)(-12,27) = 14,46 \text{ kNm},$$

$$M_{31} = -8,37 - 1,03(-9,54) = 1,46 \text{ kNm},$$

$$M_{32} = 12,74 - 1,03 \cdot 4,08 = 8,54 \text{ kNm},$$

$$M_{34} = -4,37 - 1,03 \cdot 5,46 = -10 \text{ kNm},$$

$$\left. \right\} 0$$

### Posouvající síly:

$$T_x = T_x - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{I_{ab}},$$

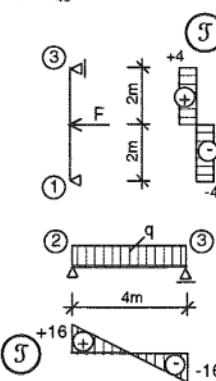
$$T_{13} = -4 - \frac{14,46 + 1,46}{4} = -8 \text{ kN},$$

$$T_{31} = 4 - \frac{14,46 + 1,46}{4} = 0$$

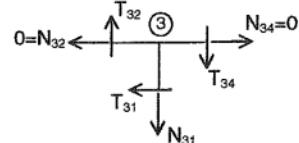
$$T_{23} = T_{23} - \frac{M_{23} + M_{32}}{I_{23}} = 16 - \frac{0 + 8,54}{4} = 13,87 \text{ kN},$$

$$T_{32} = -16 - \frac{0 + 8,54}{4} = -18,13 \text{ kN},$$

$$T_{34} = T_{43} = 0 - \frac{-10 + 0}{3} = 3,33 \text{ kN}.$$



### Normálové síly:

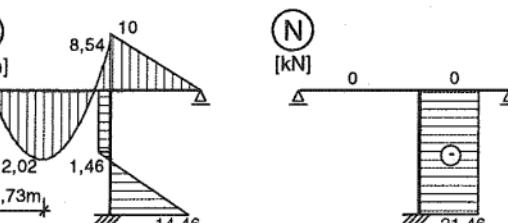
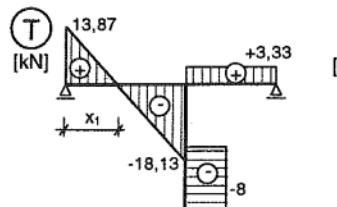


$$\rightarrow: N_{34} - N_{32} - T_{31} = 0, \quad T_{31} = 0,$$

$$\downarrow: N_{31} + T_{34} - T_{32} = 0,$$

$$N_{31} = T_{32} - T_{34} = -18,13 - 3,33 = -21,46 \text{ kN}.$$

### Průběhy vnitřních sil:



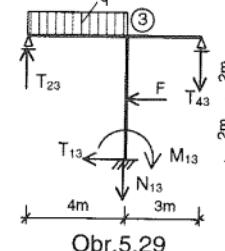
Obr.5.28

### Extrémy ohybového momentu:

$$\text{interval } 2-3: T_{x_1} = T_{23} - q \cdot x_1 = 13,87 - 8 \cdot x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,73 \text{ m},$$

$$M_{x_1} = M_{23} + T_{23} \cdot x_1 - \frac{1}{2} q x_1^2 = 0 + 13,87 \cdot 1,73 - \frac{1}{2} 8 \cdot 1,73^2 = 12,02 \text{ kNm}.$$

### Kontrola rovnováhy vnějších sil:



Obr.5.29

$$\rightarrow: -T_{13} - F = +8 - 8 = 0,$$

$$\uparrow: T_{23} - T_{43} - N_{13} - q \cdot 4 = 13,87 - 3,33 + 21,46 - 8,4 = 0,$$

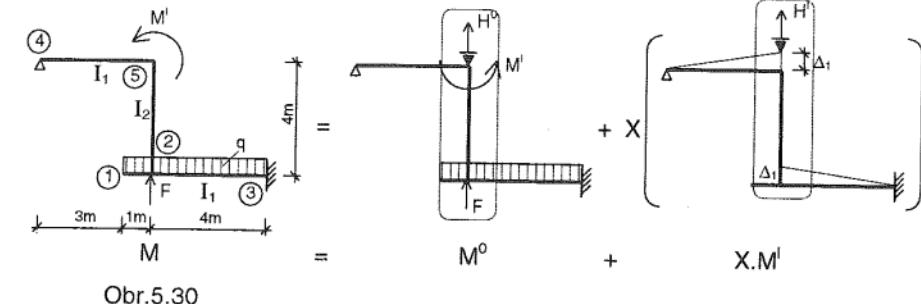
$$\curvearrowright: T_{23} \cdot 4 + T_{13} \cdot 4 + T_{43} \cdot 3 + M_{13} + F \cdot 2 - q \cdot 4 \cdot 2 =$$

$$= 13,87 \cdot 4 - 8 \cdot 4 + 3,33 \cdot 3 + 14,46 + 8 \cdot 2 - 8 \cdot 4 \cdot 2 = 0.$$

## PŘÍKLAD 5.11

Vypočtěte a vykreslete průběhy vnitřních sil na rámu dle obr.5.30,  $I_1=2I_2$ ,  $F=6 \text{ kN}$ ,  $q=3 \text{ kNm}^{-1}$ ,  $M^I=3 \text{ kNm}$ .

Styčníky 2, 5.



Obr.5.30

### Poměrné ohybové tuhosti:

$$k = \frac{I}{l} \cdot c, \quad c \text{ volíme} = \frac{4}{I_1},$$

$$k_{12} = 0 \text{ (konzola)},$$

$$k_{23} = \frac{I_1}{4} \cdot \frac{4}{I_1} = 1,$$

$$k_{25} = \frac{I_2}{4} \cdot \frac{4}{I_1} = \frac{I_2}{I_1} = 0,5,$$

$$k_{45}^k = \frac{3}{4} \frac{I_1}{4} \cdot \frac{4}{I_1} = 0,75.$$

### Rozdělovací součinitele:

$$\text{Styčník 2: } \sum k = k_{21} + k_{23} + k_{25} = 0 + 1 + 0,5 = 1,5,$$

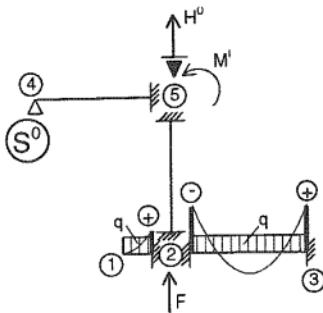
$$\begin{cases} \mu_{21} = 0, \\ \mu_{23} = \frac{1}{1,5} = 0,67, \\ \mu_{25} = \frac{0,5}{1,5} = 0,33. \end{cases} \quad 1$$

$$\text{Styčník 5: } \sum k = k_{52} + k_{54}^k = 0,5 + 0,75 = 1,25,$$

$$\begin{cases} \mu_{52} = \frac{0,5}{1,25} = 0,4, \\ \mu_{54} = \frac{0,75}{1,25} = 0,6. \end{cases} \quad 1$$

## 1. stadium výpočtu – první zatěžovací stav (známé zatížení):

### Momenty ve větknutí:



$$S_{21}^0 = M_{21} = \frac{1}{2}q l^2 = \frac{1}{2}3.1^2 = 1,5 \text{ kNm (konzola)},$$

$$S_{23}^0 = -\frac{1}{12}q l^2 = -\frac{1}{12}3.4^2 = -4 \text{ kNm},$$

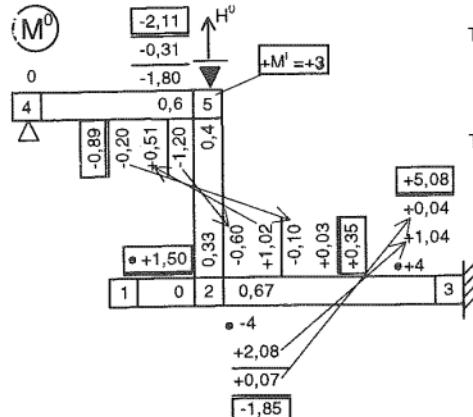
$$S_{32}^0 = \frac{1}{12}q l^2 = +4 \text{ kNm},$$

$$S_{25}^0 = S_{52}^0 = S_{54}^0 = 0.$$

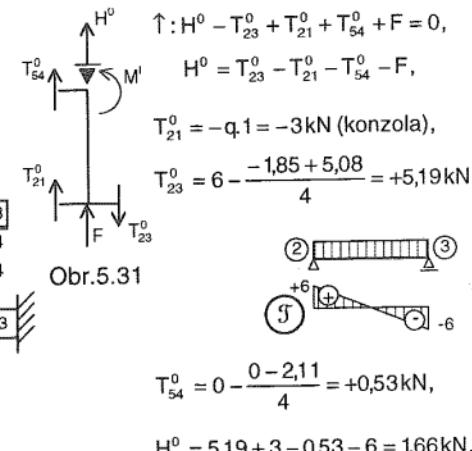
Síla  $F$  a moment  $M^I$  působí ve styčníku, nejsou v  $S$  !!!

### Výrovnání momentů:

Nejprve uvolníme styčník 5:



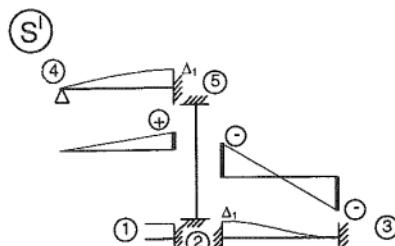
### Reakce v přidané podpoře:



$$\sum M_2 = 1,5 + 0,35 - 1,85 = 0, \quad \sum M_5 = -2,11 - 0,89 + 3 = 0.$$

## 2. stadium výpočtu – druhý zatěžovací stav (neznámé zatížení $\Delta_1$ ):

### Momenty ve větknutí:



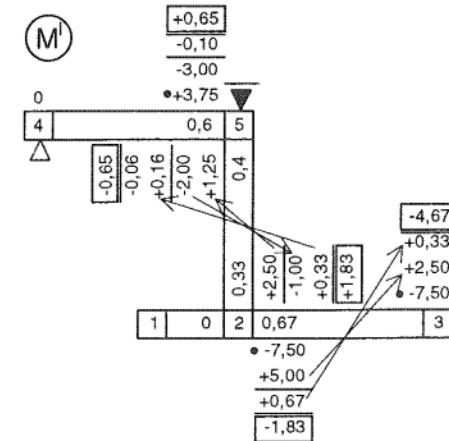
$$S_{21}^I = 0, S_{25}^I = S_{52}^I = 0, D \text{ volíme } = 10,$$

$$S_{23}^I = S_{32}^I = -\frac{3k_{23}}{l_{23}} \cdot D = -\frac{3.1}{4} \cdot 10 = -7,5 \text{ kNm},$$

$$S_{54}^I = +\frac{2k_{54}}{l_{54}} \cdot D = \frac{2.075}{4} \cdot 10 = 3,75 \text{ kNm}.$$

### Výrovnání momentů:

Nejprve uvolníme styčník 2:



### Reakce v přidané podpoře:

$$\begin{aligned} & \uparrow : H^I - T_{23}^I + T_{21}^I + T_{54}^I = 0, \\ & T_{21}^I = 0, \end{aligned}$$

Obr.5.32

$$T_{23}^I = -\frac{-1,83 - 4,67}{4} = 1,63 \text{ kN},$$

$$T_{54}^I = -\frac{0 + 0,65}{4} = -0,16 \text{ kN},$$

$$\begin{aligned} & H^I = T_{23}^I - T_{21}^I - T_{54}^I = \\ & = 1,63 - 0 + 0,16 = +1,79 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Výsledná reakce v přidané podpoře je nulová:

$$\begin{aligned} H &= H^0 + XH^I = 0, \\ 1,66 + X \cdot 1,79 &= 0 \quad \Rightarrow \quad X = -\frac{1,66}{1,79} = -0,93. \end{aligned}$$

Výsledné ohybové momenty:  $M = M^0 + XM^I$ ,

$$M_{21} = 1,5 - 0,93 \cdot 0 = 1,5 \text{ kNm (konzola)},$$

$$M_{23} = -1,85 - 0,93(-1,83) = -0,15 \text{ kNm},$$

$$M_{25} = 0,35 - 0,93 \cdot 1,83 = -1,35 \text{ kNm},$$

$$M_{32} = 5,08 - 0,93(-4,67) = +9,42 \text{ kNm},$$

$$M_{54} = -2,11 - 0,93 \cdot 0,65 = -2,71 \text{ kNm},$$

$$M_{52} = -0,89 - 0,93(-0,65) = -0,29 \text{ kNm},$$

$$M^I = +3 \text{ kNm},$$

$$M_{45} = 0.$$

Posouvající síly:  $T_x = \mathcal{J}_x - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_{ab}}$ ,

$$T_{21} = -q \cdot 1 = -3 \cdot 1 = -3 \text{ kN (konzola)},$$

$$T_{23} = \mathcal{J}_{23} - \frac{M_{23} + M_{32}}{l_{23}} =$$

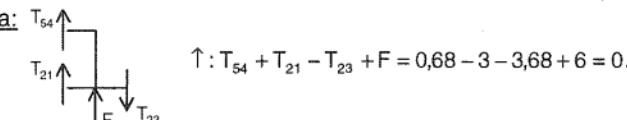
$$= +6 - \frac{-0,15 + 9,42}{4} = 3,68 \text{ kN},$$

$$T_{32} = -6 - \frac{9,42 - 0,15}{4} = -8,32 \text{ kN},$$

$$T_{25} = T_{52} = 0 - \frac{-1,35 - 0,29}{4} = 0,41 \text{ kN},$$

$$T_{54} = T_{45} = 0 - \frac{0 - 2,71}{4} = +0,68 \text{ kN}.$$

### Kontrola:



### Normálové síly:

Styčník 2:  $N_{21} = 0$  (konzola),

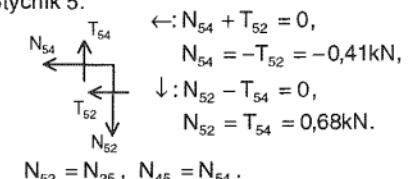
$$\rightarrow: N_{23} + T_{25} = 0,$$

$$N_{23} = -T_{25} = -0,41 \text{ kN},$$

$$\uparrow: N_{25} + T_{21} - T_{23} + F = 0,$$

$$\begin{aligned} N_{25} &= T_{23} - T_{21} - F = \\ &= 3,68 + 3 - 6 = 0,68 \text{ kN}. \end{aligned}$$

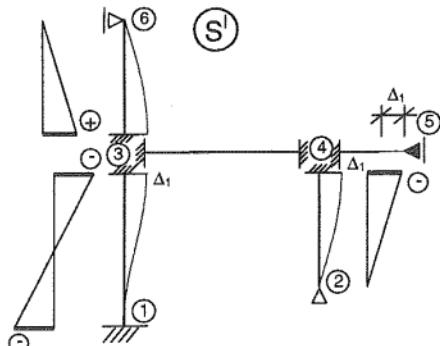
Styčník 5:





## 2. stadium výpočtu – druhý zatěžovací stav (neznámé zatížení $\Delta_1$ ):

Momenty ve větknutí:



D volíme = 12

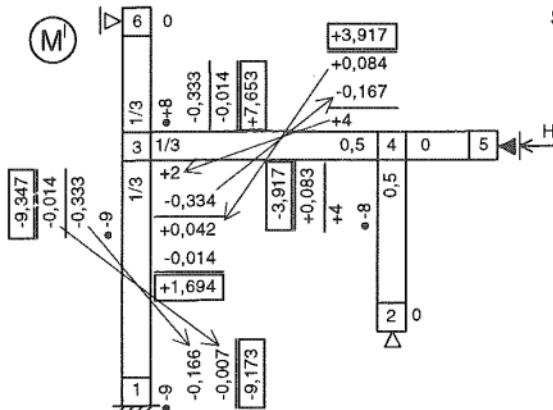
$$S_{13} = S_{31} = -\frac{3k_{13}}{l_{13}} \cdot D = -\frac{3.1}{4} \cdot 12 = -9 \text{ kNm},$$

$$S_{42}^k = -\frac{2k_{42}^k}{l_{42}} \cdot D = -\frac{2.1}{3} \cdot 12 = -8 \text{ kNm},$$

$$S_{36}^k = +\frac{2k_{36}^k}{l_{36}} \cdot D = \frac{2.1}{3} \cdot 12 = 8 \text{ kNm}.$$

Vyrovnání momentů:

Nejprve uvolníme stycník 4:

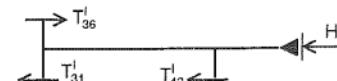


Kontrola rovnováhy momentů:

$$\text{Stycník } 3 : -9,347 + 1,694 + 7,653 = 0,$$

$$\text{Stycník } 4 : 3,917 - 3,917 = 0.$$

Reakce v přidané podpoře:



$$\begin{aligned} H^I + T_{31}^I + T_{42}^I - T_{36}^I &= 0, \\ T_{31}^I &= -\frac{9,173 - 9,347}{4} = +4,63 \text{ kN}, \\ T_{42}^I &= -\frac{0 - 3,917}{3} = +1,306 \text{ kN}, \\ T_{36}^I &= -\frac{7,653 + 0}{3} = -2,551 \text{ kN}, \end{aligned}$$

$$H^I = T_{36}^I - T_{31}^I - T_{42}^I = -2,551 - 4,63 - 1,306 = -8,487 \text{ kN}.$$

Výsledná reakce v přidané podpoře je nulová:  $H^0 + X \cdot H^I = 0$ ,

$$5,275 + X \cdot (-8,487) = 0 \Rightarrow X = \frac{5,275}{8,487} = 0,622.$$

Výsledné ohybové momenty:  $M = M^0 + X \cdot M^I :$

$$M_{13} = 1,198 + 0,622 \cdot (-9,173) = -4,508 \text{ kNm},$$

$$M_{31} = 2,395 + 0,622 \cdot (-9,347) = -3,419 \text{ kNm},$$

$$M_{34} = -4,790 + 0,622 \cdot 1,694 = -3,736 \text{ kNm},$$

$$M_{36} = 2,395 + 0,622 \cdot 7,653 = +7,155 \text{ kNm},$$

$$M_{43} = 4,724 + 0,622 \cdot 3,917 = +7,160 \text{ kNm},$$

$$M_{42} = -2,474 + 0,622 \cdot (-3,917) = -4,910 \text{ kNm},$$

$$M_{45} = -2,25 \text{ kNm (konzola)},$$

$$M_{63} = 0, \quad M_{24} = 0, \quad M_{54} = 0.$$

Posouvající síly:  $T_x = \mathcal{T}_x - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_{ab}}$ ,

$$T_{13} = T_{31} = 0 - \frac{-4,508 - 3,419}{4} = +1,982 \text{ kN},$$

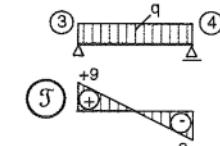
$$T_{34} = \mathcal{T}_{34} - \frac{M_{34} + M_{43}}{l_{34}} = +9 - \frac{-3,736 + 7,16}{4} = +8,144 \text{ kN},$$

$$T_{43} = -9 - \frac{-3,736 + 7,16}{4} = -9,856 \text{ kN},$$

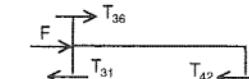
$$T_{42} = T_{24} = 0 - \frac{-4,910 + 0}{3} = +1,633 \text{ kN},$$

$$T_{45} = +q \cdot l_{45} = 4,5 \cdot 1 = +4,5 \text{ kN (konzola)},$$

$$T_{36} = T_{63} = 0 - \frac{0 + 7,155}{3} = -2,385 \text{ kN}.$$



Kontrola patrové rovnice:



$$\rightarrow F + T_{36} - T_{31} - T_{42} = 6 - 2,385 - 1,982 - 1,633 = 0.$$

Normálové síly:

$$N_{36} = 0, \quad N_{45} = 0,$$

Stycník 3:

$$\begin{aligned} N_{36} &= 0 \quad \rightarrow: N_{34} + T_{36} - T_{31} + F = 0 \\ N_{34} &= T_{31} - T_{36} - F = 1,982 + 2,385 - 6 = -1,633 \text{ kN}, \\ T_{31} &\leftarrow: N_{31} + T_{34} = 0, \quad N_{31} = -T_{34} = -8,144 \text{ kN} = N_{13}, \\ N_{31} &= -T_{34} = -8,144 \text{ kN} = N_{13}, \end{aligned}$$

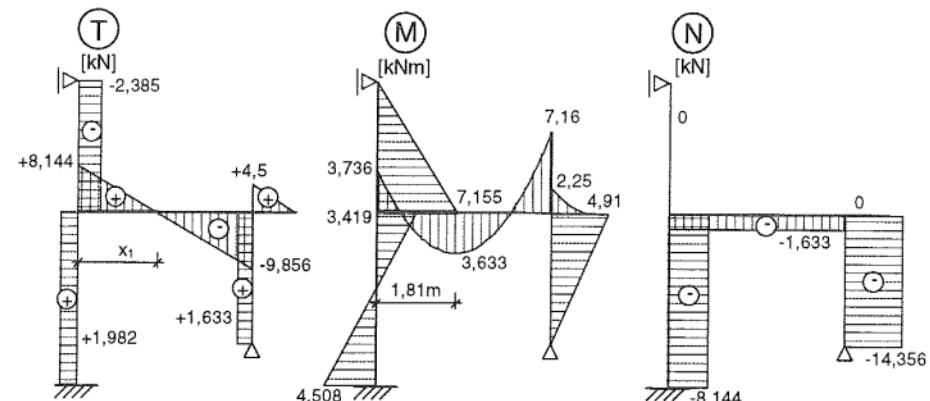
$$N_{43} + T_{42} = 0, \quad N_{43} = -T_{42} = -1,633 \text{ kN},$$

$$N_{43} = N_{34},$$

$$\downarrow: N_{42} + T_{45} - T_{43} = 0,$$

$$N_{42} = T_{43} - T_{45} = -9,856 - 4,5 = -14,356 \text{ kN}.$$

Průběhy vnitřních sil:



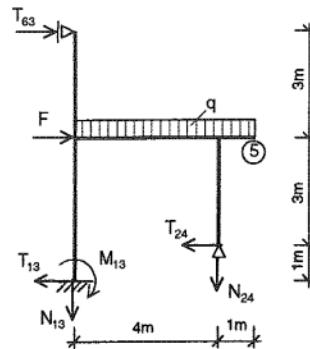
Obr.5.38

Extrém ohybového momentu:

$$\text{interval } 3-4: T_{x_1} = T_{34} - q \cdot x_1 = 8,144 - 4,5 \cdot x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,81 \text{ m},$$

$$M_{x_1} = T_{34} \cdot x_1 + M_{34} - \frac{1}{2} q x_1^2 = 8,144 \cdot 1,81 - 3,736 - \frac{1}{2} 4,5 \cdot 1,81^2 = +3,633 \text{ kNm}.$$

Kontrola rovnováhy sil na celé konstrukci:



Obr.5.39

$$\rightarrow: F - T_{13} - T_{24} + T_{63} = 6 - 1,982 - 1,633 - 2,385 = 0,$$

$$\downarrow: N_{13} + N_{24} + q \cdot 5 = -8,144 - 14,356 + 4,5 \cdot 5 = 0,$$

$$\curvearrowleft: T_{13} \cdot 4 + T_{24} \cdot 3 + T_{63} \cdot 5 - N_{13} \cdot 1 - N_{24} \cdot 1 + M_{13} - q \cdot 5 \cdot 2,5 =$$

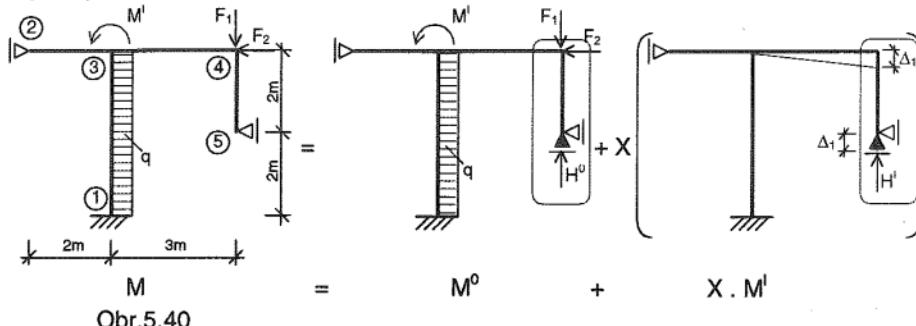
$$= 1,982 \cdot 4 + 1,633 \cdot 3 - 2,385 \cdot 5 + 8,144 \cdot 5 + 14,356 \cdot 1 -$$

$$- 4,508 - 4,5 \cdot 5 \cdot 2,5 = 0.$$

### PŘÍKLAD 5.13

Vypočtěte a vykreslete průběhy vnitřních sil na rámu (obr.5.40),  $EI=\text{konst.}$ ,  $q=6\text{kNm}^{-1}$ ,  $M^I=8\text{kNm}$ ,  $F_1=10\text{kN}$ ,  $F_2=4\text{kN}$ .

Styčníky 3, 4.



Obr.5.40

Poměrné ohybové tuhosti:

$$k = \frac{c}{1}, \quad c \text{ volíme } = 4,$$

$$k_{13} = \frac{4}{4} = 1,$$

$$k_{23} = 0,$$

$$k_{34} = \frac{4}{3} = 1,33,$$

$$k_{45}^k = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{2} = 1,5.$$

Rozdělovací součinitele:

$$\text{Styčník 3: } \sum k_3 = k_{13} + k_{23} + k_{34} = 1 + 0 + 1,33 = 2,33,$$

$$\begin{aligned} \mu_{31} &= \frac{1}{2,33} = 0,43, \\ \mu_{32} &= 0, \\ \mu_{34} &= \frac{1,33}{2,33} = 0,57. \end{aligned} \quad \left. \right\} 1$$

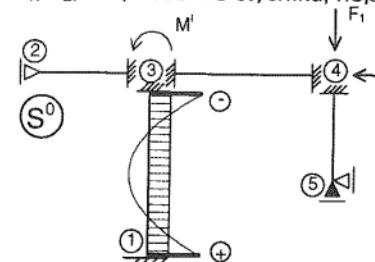
$$\text{Styčník 4: } \sum k_4 = k_{43} + k_{45}^k = 1,33 + 1,5 = 2,83,$$

$$\begin{aligned} \mu_{43} &= \frac{1,33}{2,83} = 0,47, \\ \mu_{45} &= \frac{1,5}{2,83} = 0,53. \end{aligned} \quad \left. \right\} 1$$

1. stadium výpočtu – první zatěžovací stav (známé zatížení):

Momenty ve větknutí:

$F_1, F_2, M^I$  působí ve styčníku, nejsou v S !!!



$$S_{32} = S_{34} = S_{43} = S_{45} = 0,$$

$$S_{13} = +\frac{1}{12} q l^2 = \frac{1}{12} 6 \cdot 4^2 = +8 \text{ kNm},$$

$$S_{31} = -\frac{1}{12} q l^2 = -8 \text{ kNm}.$$

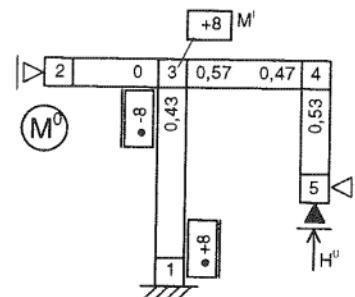
Reakce v přidané podpoře:

$$\uparrow: T_{43}^0 - F_1 + H^0 = 0,$$

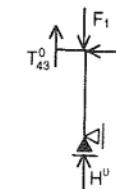
$$T_{43}^0 = 0,$$

$$H^0 = F_1 - T_{43}^0 = F_1 = 10 \text{ kN}.$$

Vyrovnání momentů:



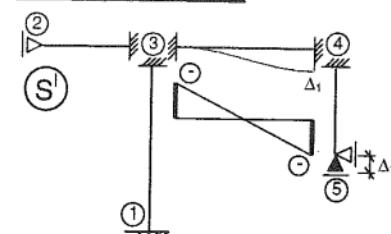
Při neposuvných styčnících jsou momenty ve styčnících v rovnováze.



Obr.5.41

2. stadium výpočtu – druhý zatěžovací stav (neznámé zatížení  $\Delta_1$ ):

Momenty ve větknutí:



D volíme = 6

$$S_{34} = S_{43} = -\frac{3k_{34}}{l_{34}} \cdot D = -\frac{3 \cdot 1,33}{3} \cdot 6 = -8 \text{ kNm}.$$

Reakce v přidané podpoře:

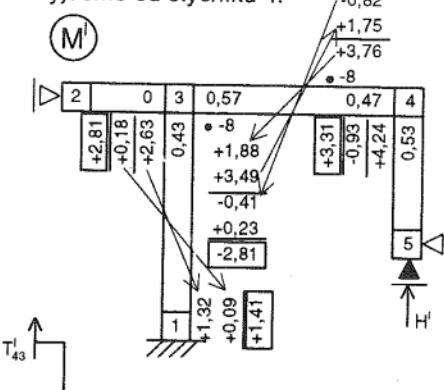
$$\uparrow: H^I + T_{43}^I = 0,$$

$$T_{43}^I = -\frac{-2,81 - 3,31}{3} = +2,04 \text{ kN},$$

$$H^I = -T_{43}^I = -2,04 \text{ kN}.$$

Vyrovnání momentů:

Vyjdeme od styčníku 4.



Obr.5.42

Výsledná reakce v přidané podpoře musí být rovna nule.

$$H^0 + X \cdot H^I = 0,$$

$$10 + X \cdot (-2,04) = 0 \Rightarrow X = 4,9.$$

Výsledné ohybové momenty:  $M = M^0 + X \cdot M^I$ :

$$M_{13} = 8 + 4,9 \cdot 1,41 = 14,91 \text{ kNm},$$

$$M_{31} = -8 + 4,9 \cdot 2,81 = 5,77 \text{ kNm},$$

$$M_{32} = 0,$$

$$M_{34} = 0 + 4,9 \cdot (-2,81) = -13,77 \text{ kNm},$$

$$M_{43} = 0 + 4,9 \cdot (-3,31) = -16,22 \text{ kNm}, \quad \left. \begin{array}{l} \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$M_{45} = 0 + 4,9 \cdot 3,31 = +16,22 \text{ kNm},$$

$$M_{54} = 0.$$

Posouvající síly:  $T_x = \mathcal{T}_x - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_{ab}}$ ,

$$T_{13} = -12 - \frac{14,91 + 5,77}{4} = -17,17 \text{ kN},$$

$$T_{31} = 12 - \frac{14,91 + 5,77}{4} = 6,83 \text{ kN},$$

$$T_{23} = 0,$$

$$T_{34} = T_{43} = 0 - \frac{-13,77 - 16,22}{3} = +10 \text{ kN},$$

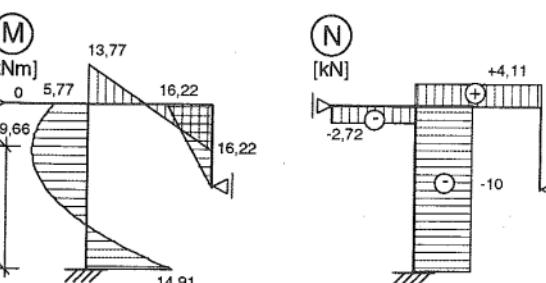
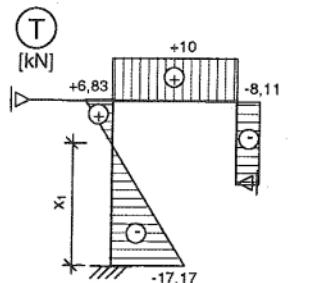
$$T_{54} = T_{45} = 0 - \frac{0 - 16,22}{2} = -8,11 \text{ kN}.$$

Normálové síly:

Styčník 4:  $\downarrow : N_{45} + F_1 - T_{43} = 0, \quad N_{45} = -10 + 10 = 0,$   
 $\leftarrow : N_{43} + F_2 + T_{45} = 0, \quad N_{43} = -4 + 8,11 = +4,11 \text{ kN} = N_{34}.$

Styčník 3:  $\leftarrow : N_{32} + T_{31} - N_{34} = 0, \quad N_{32} = N_{34} - T_{31} = 4,11 - 6,83 = -2,72 \text{ kN},$   
 $\downarrow : N_{31} + T_{34} - T_{32} = 0, \quad N_{31} = T_{32} - T_{34} = 0 - 10 = -10 \text{ kN}.$

Průběhy vnitřních sil:



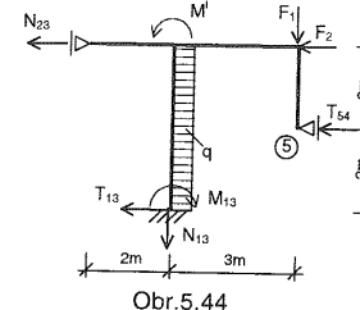
Obr.5.43

Extrém ohybového momentu:

$$\text{interval } 1 - 3: \quad T_{x_1} = T_{13} + q \cdot x_1 = -17,17 + 6x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2,86 \text{ m},$$

$$M_{x_1} = T_{13} \cdot x_1 + M_{13} + \frac{1}{2} q \cdot x_1^2 = -17,17 \cdot 2,86 + 14,91 + \frac{1}{2} 6 \cdot 2,86^2 = -9,66 \text{ kNm}.$$

Kontrola rovnováhy sil na celé konstrukci:



$$\leftarrow : T_{13} + T_{54} + N_{23} + F_2 + q \cdot 4 = -17,17 - 8,11 - 2,72 + 4 + 24 = 0,$$

$$\downarrow : N_{13} + F_1 = -10 + 10 = 0,$$

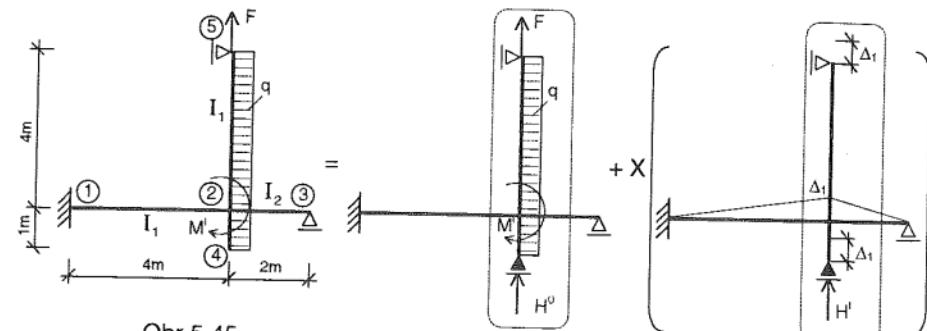
$$\curvearrowleft : T_{13} \cdot 2 - N_{13} \cdot 3 - N_{23} \cdot 2 - F_2 \cdot 2 + M_{13} - M^I = -17,17 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 2,72 \cdot 2 - 4 \cdot 2 + 14,91 - 8 = 0.$$

Obr.5.44

### PŘÍKLAD 5.14

Stanovte průběhy vnitřních sil,  $q=6 \text{ kNm}^{-1}$ ,  $M^I=4 \text{ kNm}$ ,  $F=3 \text{ kN}$ ,  $I_1:400/600 \text{ mm}$ ,  $I_2:400/400 \text{ mm}$  (obr.5.45).

Styčník 2.



Obr.5.45

Poměrné ohybové tuhosti:

$$k = \frac{I}{I_1} \cdot c, \quad c \text{ volíme} = \frac{4}{I_1},$$

$$k_{12} = \frac{I_1}{4} \cdot \frac{4}{I_1} = 1,$$

$$k_{23}^k = \frac{3}{4} \cdot \frac{I_2}{2} \cdot \frac{4}{I_1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{0,4^4}{0,4 \cdot 0,6^3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4^3}{6^3} = 0,44,$$

$$k_{25}^k = \frac{3}{4} \cdot \frac{I_1}{4} \cdot \frac{4}{I_1} = 0,75,$$

$$k_{24} = 0, \text{ konzola.}$$

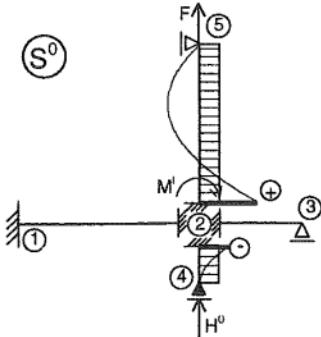
Rozdělovací součinitele:

$$\text{Styčník 2: } \sum k_2 = k_{21} + k_{23}^k + k_{25}^k + k_{24} = 1 + 0,44 + 0,75 + 0 = 2,19,$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu_{21} = \frac{1}{2,19} = 0,46, \\ \mu_{23} = \frac{0,44}{2,19} = 0,2, \\ \mu_{25} = \frac{0,75}{2,19} = 0,34, \\ \mu_{24} = 0. \end{array} \right\} 1$$

### 1. stadium výpočtu – první zatěžovací stav (známé zatížení):

Momenty ve veknutí:

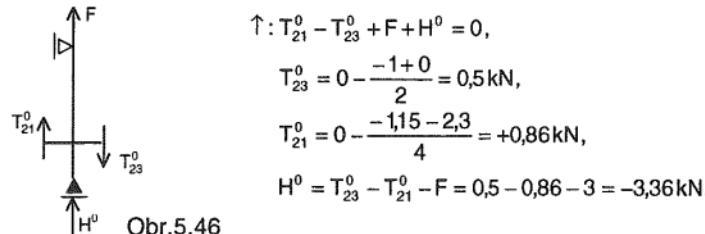


$$S_{12} = S_{21} = S_{23} = 0,$$

$$S_{25}^k = +\frac{1}{8}q l^2 = \frac{1}{8}6.4^2 = 12 \text{ kNm},$$

$$M_{24} = S_{24} = -\frac{1}{2}q l^2 = -\frac{1}{2}6.1^2 = -3 \text{ kNm (konzola).}$$

Reakce v přidané podpoře:



$$\uparrow : T_{21}^0 - T_{23}^0 + F + H^0 = 0,$$

$$T_{23}^0 = 0 - \frac{-1+0}{2} = 0,5 \text{ kN},$$

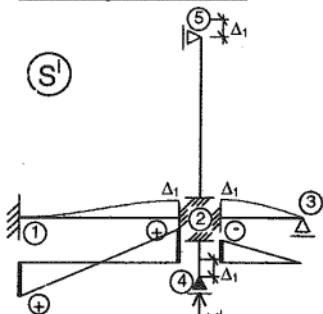
$$T_{21}^0 = 0 - \frac{-1,15-2,3}{4} = +0,86 \text{ kN},$$

$$H^0 = T_{23}^0 - T_{21}^0 - F = 0,5 - 0,86 - 3 = -3,36 \text{ kN.}$$

Obr.5.46

### 2. stadium výpočtu – druhý zatěžovací stav (neznámé zatížení $\Delta_1$ ):

Momenty ve veknutí:

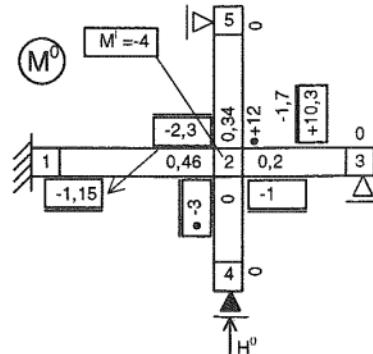


D volíme 10,

$$S_{12} = S_{21} = +\frac{3k_{12}}{l_{12}} \cdot D = \frac{3,1}{4} \cdot 10 = 7,5 \text{ kN},$$

$$S_{23}^k = -\frac{2k_{23}}{l_{23}} \cdot D = -\frac{2,044}{2} \cdot 10 = -4,4 \text{ kN.}$$

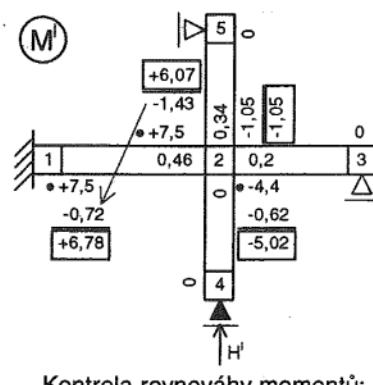
Vyrovnání momentů:



Vyrovnáváme pouze styčník 2 s nerovnováhou +12-3-4=5kNm.

Kontrola rovnováhy momentů:  
 $\sum M_2 = -3 - 1 + 10,3 - 2,3 - 4 = 0.$

Vyrovnání momentů:



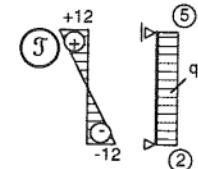
Kontrola rovnováhy momentů:  
 $\sum M_2 = 6,07 - 1,05 - 5,02 = 0$

Reakce v přidané podpoře:

$$\uparrow : T_{21}^I - T_{23}^I + H^I = 0, \\ T_{21}^I = 0 - \frac{6,78 + 6,07}{4} = -3,21 \text{ kN,} \\ T_{23}^I = 0 - \frac{-5,02 + 0}{2} = +2,51 \text{ kN,} \\ H^I = T_{23}^I - T_{21}^I = 2,51 + 3,21 = 5,72 \text{ kN.}$$

Výsledná reakce v přidané podpoře:

$$H = H^0 + X \cdot H^I = 0, \\ -3,36 + X \cdot 5,72 = 0 \Rightarrow X = \frac{3,36}{5,72} = 0,59.$$



Výsledné ohybové momenty:  $M = M^0 + X \cdot M^l :$

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= -1,15 + 0,59 \cdot 6,78 = 2,85 \text{ kNm,} \\ M_{21} &= -2,3 + 0,59 \cdot 6,07 = 1,28 \text{ kNm,} \\ M_{23} &= -1 + 0,59 \cdot (-5,02) = -3,96 \text{ kNm,} \\ M_{24} &= -3 + 0,59 \cdot 0 = -3 \text{ kNm,} \\ M_{25} &= 10,3 + 0,59 \cdot (-1,05) = +9,68 \text{ kNm,} \\ M^l &= -4 \text{ kNm.} \end{aligned} \right\} 0$$

Posouvající síly:  $T_x = J_x - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_{ab}},$

$$T_{12} = T_{21} = 0 - \frac{2,85 + 1,28}{4} = -1,02 \text{ kN,}$$

$$T_{23} = T_{32} = 0 - \frac{-3,96 + 0}{2} = +1,98 \text{ kN,}$$

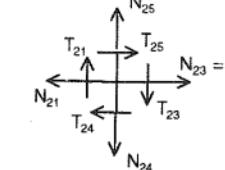
$$T_{24} = +q l_{24} = +6 \text{ kN (konzola),}$$

$$T_{25} = -12 - \frac{9,68 + 0}{4} = -14,42 \text{ kN,}$$

$$T_{52} = 12 - \frac{9,68 + 0}{4} = +9,58 \text{ kN.}$$

Normálové síly:

Styčník 2:  $N_{25} = +F = 3 \text{ kN,}$



$$N_{23} = 0,$$

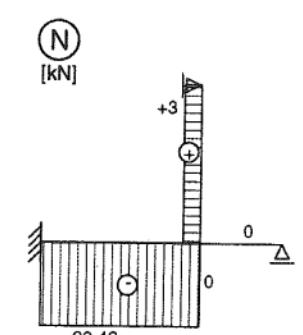
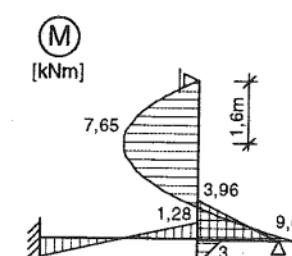
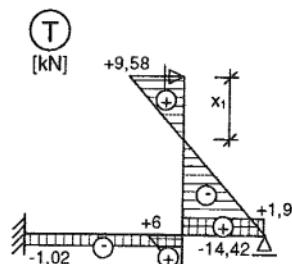
$$\rightarrow : T_{25} - T_{24} - N_{21} = 0,$$

$$N_{21} = -T_{24} + T_{25} = -6 - 14,42 = -20,42 \text{ kN,}$$

$$\downarrow : T_{24} + T_{23} - T_{21} - N_{25} = 0,$$

$$N_{24} = T_{21} + N_{25} - T_{23} = -1,02 + 3 - 1,98 = 0.$$

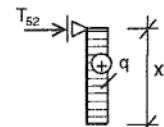
Průběhy vnitřních sil:



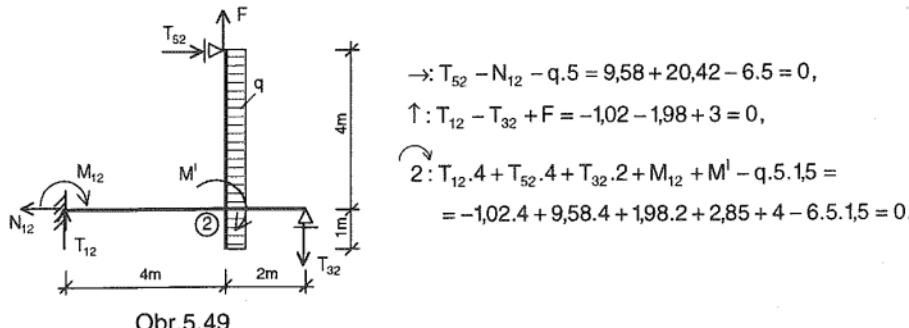
Obr.5.48

### Extrém ohybového momentu:

interval 5 - 2:  $T_{x_1} = T_{52} - qx_1 = 9,58 - 6x_1 = 0, \Rightarrow x_1 = 1,6\text{m},$   
 $M_{x_1} = -T_{52}x_1 + q \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} = -9,58 \cdot 1,6 + 3,16^2 = -7,65 \text{ kNm}.$



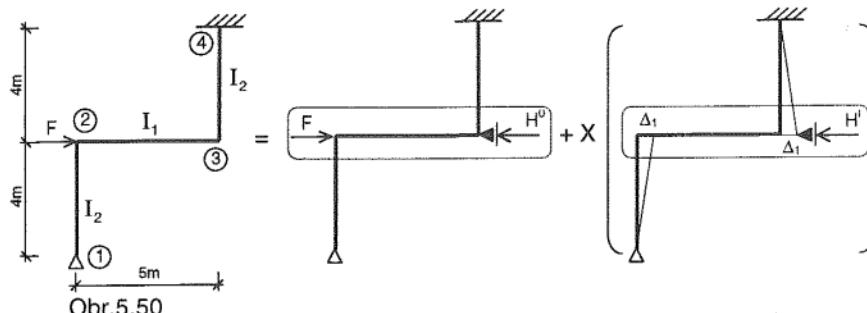
Kontrola rovnováhy na celé konstrukci:



Obr.5.49

### **PŘÍKLAD 5.15**

Vypočtěte a vykreslete průběhy vnitřních sil (obr.5.50),  $F=10\text{kN}$ ,  $I_1:300/500\text{mm}$ ,  $I_2:300/400\text{mm}$ .



Poměrné ohybové tuhosti:

$$k = \frac{I}{l} \cdot c, \quad c \text{ volíme } = \frac{4}{I_2},$$

$$k_{12}^k = \frac{3}{4} \cdot \frac{l_2}{4} \cdot \frac{4}{I_2} = 0,75,$$

$$k_{23} = \frac{I_1}{5} \cdot \frac{4}{I_2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{1} \cdot \frac{0,305^3}{0,3 \cdot 0,4^3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5^3}{4^3} = 1,56,$$

$$k_{34} = \frac{l_2}{4} \cdot \frac{4}{I_2} = 1.$$

Rozdělovací součinitele:

Styčník 2:

$$\sum k_2 = k_{21}^k + k_{23} = 0,75 + 1,56 = 2,31,$$

$$\mu_{21} = \frac{0,75}{2,31} = 0,325, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

$$\mu_{23} = \frac{1,56}{2,31} = 0,675, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

Styčník 3:

$$\sum k_3 = k_{32} + k_{34} = 1,56 + 1 = 2,56,$$

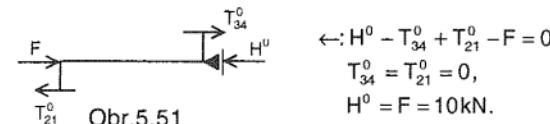
$$\mu_{32} = \frac{1,56}{2,56} = 0,61, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

$$\mu_{34} = \frac{1}{2,56} = 0,39. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

### 1. stadium výpočtu – první zatěžovací stav (známé zatížení):

Momenty ve veknutí jsou nulové, zatížení je pouze silou  $F$  ve styčníku 2,  $M^0=0$ ,  $T^0=0$ .

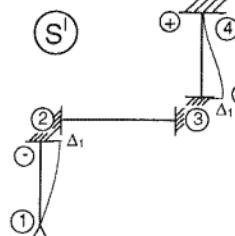
Reakce v přidané podpoře:



$$\leftarrow: H^0 - T_{34}^0 + T_{21}^0 - F = 0, \\ T_{34}^0 = T_{21}^0 = 0, \\ H^0 = F = 10\text{kN}.$$

### 2. stadium výpočtu – druhý zatěžovací stav (neznámé zatížení } \Delta\_1):

Momenty ve veknutí:



Vyrovnání momentů:

Nejprve uvolníme styčník 3.



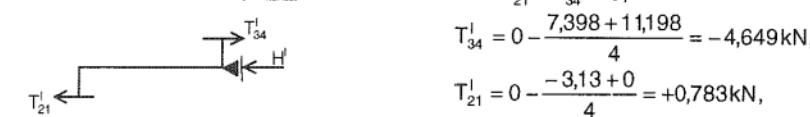
D volíme 20,

$$S_{21}^k = -\frac{2k_{12}^k \cdot D}{l_{12}} = -\frac{2 \cdot 0,75}{4} \cdot 20 = -7,5 \text{ kNm},$$

$$S_{34} = S_{43} = +\frac{3k_{34}^k \cdot D}{l_{34}} = +\frac{3 \cdot 1}{4} \cdot 20 = 15 \text{ kNm}.$$

2	0,675	0,61
-4,575	-9,150	
+8,151	+4,075	
-1,243	-2,486	
+0,839	+0,419	
-0,128	-0,256	
+0,086	-7,398	
+3,13		
0		
0,325		
-3,13		
1		

Reakce v přidané podpoře:



$$\leftarrow: H^I + T_{21}^I - T_{34}^I = 0, \\ T_{34}^I = 0 - \frac{7,398 + 11,198}{4} = -4,649 \text{ kN},$$

$$T_{21}^I = 0 - \frac{-3,13 + 0}{4} = +0,783 \text{ kN},$$

$$H^I = T_{34}^I - T_{21}^I = -4,649 - 0,783 = -5,432 \text{ kN}.$$

Výsledná reakce v přidané podpoře:

$$H = H^0 + X \cdot H^I = 10 + X(-5,432) = 0 \Rightarrow X = 1,84.$$

Výsledné ohybové momenty:  $M = M^0 + X \cdot M^I :$

$$M_{12} = 0,$$

$$M_{21} = 0 + 1,84 \cdot (-3,13) = -5,759 \text{ kNm},$$

$$M_{23} = 0 + 1,84 \cdot 3,13 = 5,759 \text{ kNm},$$

$$M_{32} = 0 + 1,84 \cdot (-7,398) = -13,612 \text{ kNm},$$

$$M_{34} = 0 + 1,84 \cdot 7,398 = 13,612 \text{ kNm},$$

$$M_{43} = 0 + 1,84 \cdot 11,198 = 20,604 \text{ kNm}.$$

$$\text{Posouvající síly: } T_x = \mathcal{T}_x - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_{ab}},$$

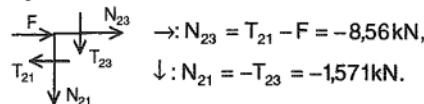
$$T_{12} = T_{21} = 0 - \frac{-5,759 + 0}{4} = +1,44 \text{ kN},$$

$$T_{23} = T_{32} = 0 - \frac{5,759 - 13,612}{5} = +1,571 \text{ kN},$$

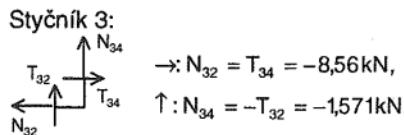
$$T_{34} = T_{43} = 0 - \frac{13,612 + 20,604}{4} = -8,56 \text{ kN}.$$

Normálové síly:

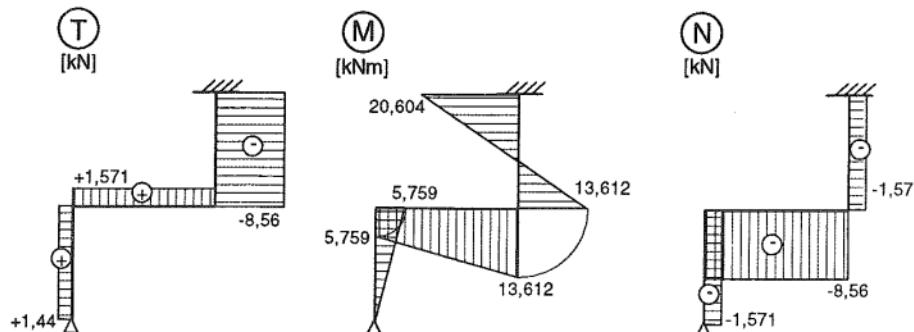
Styčník 2:



Styčník 3:

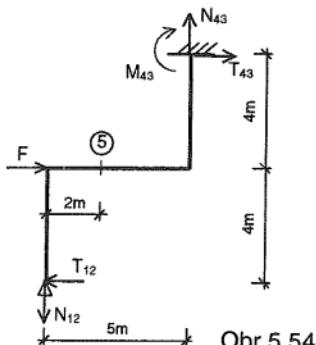


Průběhy vnitřních sil:



Obr.5.53

Kontrola rovnováhy na celé konstrukci:



$$\rightarrow F + T_{43} - T_{12} = 10 - 8,56 - 1,44 = 0,$$

$$\uparrow : N_{43} - N_{12} = -1,571 + 1,571 = 0,$$

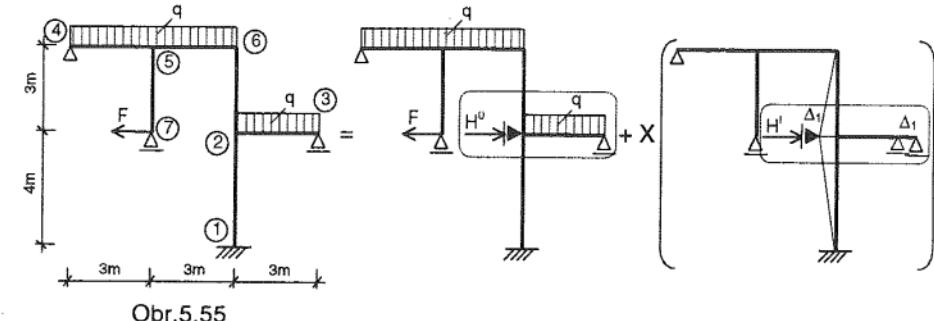
$$\curvearrowleft 5 : T_{12} \cdot 4 + T_{43} \cdot 4 - N_{12} \cdot 2 - N_{43} \cdot 3 + M_{43} = \\ = 1,44 \cdot 4 - 8,56 \cdot 4 + 1,571 \cdot 2 + 1,571 \cdot 3 + 20,604 = 0.$$

Obr.5.54

## PRÍKLAD 5.16

Vypočte a vykreslete průběhy vnitřních sil (obr.5.55),  $EI=\text{konst.}$ ,  $q=6\text{kNm}^{-1}$ ,  $F=4\text{kN}$ .

Styčníky 2, 5, 6.



Obr.5.55

Poměrné ohybové tuhosti:

$$k = \frac{c}{l}, \quad c \text{ volíme } = 3,$$

$$k_{12} = \frac{3}{4} = 0,75,$$

$$k_{26} = \frac{3}{3} = 1,$$

$$k_{23}^k = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{3} = 0,75,$$

$$k_{45}^k = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{3} = 0,75,$$

$$k_{56} = \frac{3}{3} = 1,$$

$$k_{57} = 0.$$

Rozdělovací součinitely:

$$\text{Styčník 2: } \sum k = k_{12} + k_{23}^k + k_{26} = 0,75 + 0,75 + 1 = 2,5,$$

$$\mu_{21} = \frac{0,75}{2,5} = 0,3,$$

$$\mu_{23} = \frac{0,75}{2,5} = 0,3,$$

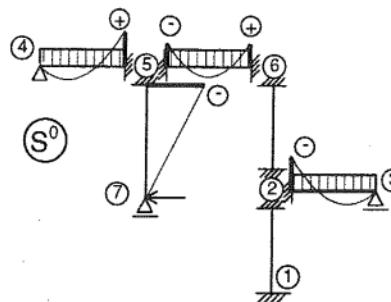
$$\mu_{26} = \frac{1}{2,5} = 0,4,$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Styčník 5: } \sum k = k_{54}^k + k_{56} + k_{57} = 0,75 + 1 + 0 = 1,75, \\ \mu_{54} = \frac{0,75}{1,75} = 0,43, \\ \mu_{56} = \frac{1}{1,75} = 0,57, \\ \mu_{57} = 0, \end{array} \right\} 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Styčník 6: } \mu_{65} = \frac{1}{2} = 0,5, \\ \mu_{62} = \frac{1}{2} = 0,5. \end{array} \right\} 1$$

1. stadium výpočtu – první zatěžovací stav (známé zatížení):

Momenty ve veknutí:



$$S_{12} = S_{21} = S_{26} = S_{62} = 0,$$

$$S_{23}^k = -\frac{1}{8} q l^2 = -\frac{1}{8} 6 \cdot 3^2 = -6,75 \text{ kNm},$$

$$S_{54}^k = +\frac{1}{8} q l^2 = +\frac{1}{8} 6 \cdot 3^2 = +6,75 \text{ kNm},$$

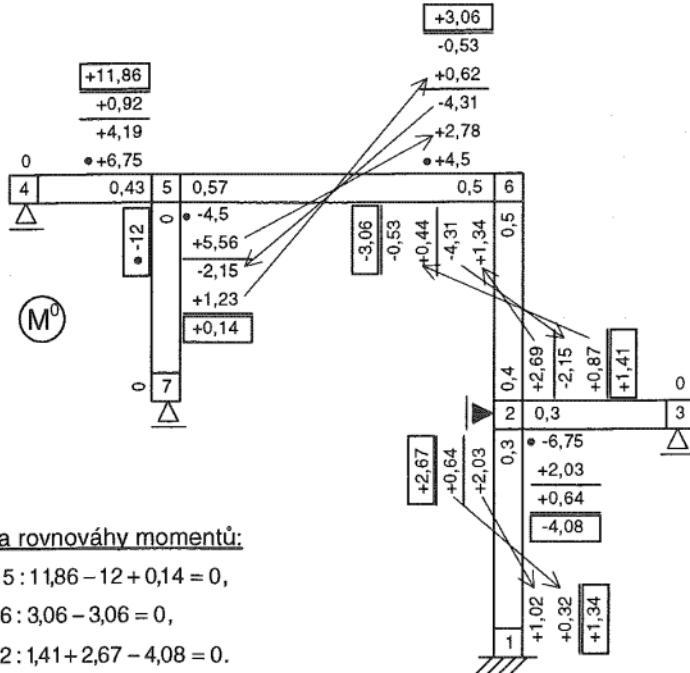
$$S_{56} = -\frac{1}{12} q l^2 = -\frac{1}{12} 6 \cdot 3^2 = -4,5 \text{ kNm},$$

$$S_{65} = \frac{1}{12} q l^2 = \frac{1}{12} 6 \cdot 3^2 = +4,5 \text{ kNm},$$

$$S_{57} = M_{57} = -F \cdot 3 = -12 \text{ kNm (konzola!).}$$

### Vyrovnaní momentů:

Vyrovnáme styčníky 5 a 2, pak vyrovnáme styčník 6.



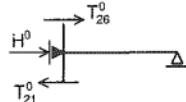
### Kontrola rovnováhy momentů:

$$\text{styčník } 5 : 11,86 - 12 + 0,14 = 0,$$

$$\text{styčník } 6 : 3,06 - 3,06 = 0,$$

$$\text{styčník } 2 : 1,41 + 2,67 - 4,08 = 0.$$

### Reakce v přidané podpoře:

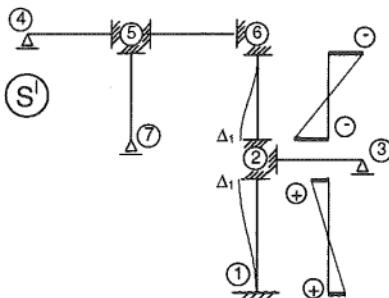


Obr.5.56

$$\rightarrow: H^0 + T_{26}^0 - T_{21}^0 = 0, \\ T_{26}^0 = 0 - \frac{1,41 - 3,06}{3} = +0,55 \text{ kN}, \\ T_{21}^0 = 0 - \frac{2,67 + 1,34}{4} = -1 \text{ kN}, \\ H^0 = -T_{26}^0 + T_{21}^0 = -0,55 - 1 = -1,55 \text{ kN}.$$

### 2. stadium výpočtu – druhý zatěžovací stav (neznámé zatížení $\Delta_1$ ):

#### Momenty ve větknutí:



D volíme = 10,

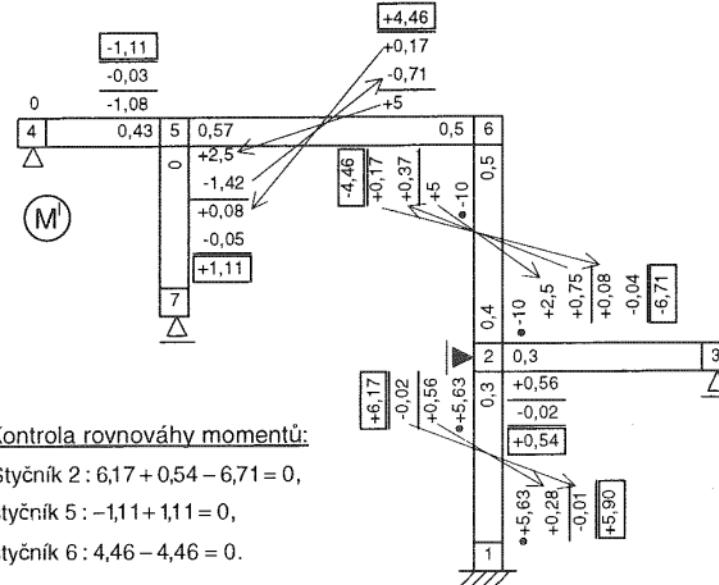
$$S_{54} = S_{56} = S_{65} = S_{57} = S_{23} = 0,$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{3k_{12}}{l_{12}} \cdot D = \frac{3,075}{4} \cdot 10 = 5,63 \text{ kNm},$$

$$S_{26} = S_{62} = -\frac{3k_{62}}{l_{26}} \cdot D = -\frac{3,1}{3} \cdot 10 = -10 \text{ kNm}.$$

### Vyrovnaní momentů:

Nejprve uvolníme styčník 6, dále styčníky 5 a 2.



### Kontrola rovnováhy momentů:

$$\text{styčník } 2 : 6,17 + 0,54 - 6,71 = 0,$$

$$\text{styčník } 5 : -1,11 + 1,11 = 0,$$

$$\text{styčník } 6 : 4,46 - 4,46 = 0.$$

### Reakce v přidané podpoře:

$$\rightarrow: H^I + T_{26}^I - T_{21}^I = 0, \\ T_{21}^I = -\frac{5,90 + 6,17}{4} = -3,02 \text{ kN}, \\ T_{26}^I = \frac{-6,71 - 4,46}{3} = 3,72 \text{ kN}, \\ H^I = T_{21}^I - T_{26}^I = -3,02 - 3,72 = -6,74 \text{ kN}.$$

Výsledná reakce v přidané podpoře je nulová:

$$H = H^0 + X \cdot H^I = -1,55 + X \cdot (-6,74) = 0 \Rightarrow X = -0,23.$$

### Výsledné ohybové momenty: $M = M^0 + X \cdot M^I$ ,

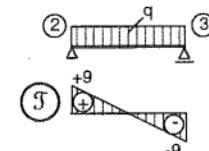
$$\left. \begin{array}{l} M_{12} = 1,34 - 0,23 \cdot 5,90 = -0,02 \text{ kNm}, \\ M_{21} = 2,67 - 0,23 \cdot 6,17 = +1,25 \text{ kNm}, \\ M_{23} = -4,08 - 0,23 \cdot 0,54 = -4,20 \text{ kNm}, \\ M_{26} = 1,41 - 0,23 \cdot (-6,71) = +2,95 \text{ kNm}, \\ M_{32} = M_{45} = M_{75} = 0. \end{array} \right\} 0 \quad \left. \begin{array}{l} M_{54} = 11,86 - 0,23 \cdot (-1,11) = +12,12 \text{ kNm}, \\ M_{56} = 0,14 - 0,23 \cdot 1,11 = -0,12 \text{ kNm}, \\ M_{57} = -12 \text{ kNm}, \\ M_{65} = 3,06 - 0,23 \cdot 4,46 = +2,03 \text{ kNm}, \\ M_{62} = -3,06 - 0,23 \cdot (-4,46) = -2,03 \text{ kNm}, \end{array} \right\} 0$$

$$\text{Posouvající síly: } T_x = \mathcal{T}_x - \frac{M_{ab} + M_{pa}}{l_{ab}},$$

$$T_{12} = T_{21} = 0 - \frac{-0,02 + 1,25}{4} = -0,31 \text{ kN},$$

$$T_{23} = +9 - \frac{-4,2 + 0}{3} = +10,4 \text{ kN},$$

$$T_{32} = -9 - \frac{-4,2 + 0}{3} = -7,6 \text{ kN},$$



$$T_{26} = T_{62} = 0 - \frac{2,95 - 2,03}{3} = -0,31\text{kN},$$

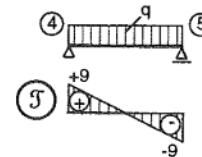
$$T_{45} = +9 - \frac{0 + 12,12}{3} = +4,96\text{kN},$$

$$T_{54} = -9 - \frac{0 + 12,12}{3} = -13,04\text{kN},$$

$$T_{56} = +9 - \frac{-0,12 + 2,03}{3} = +8,36\text{kN},$$

$$T_{65} = -9 - \frac{-0,12 + 2,03}{3} = -9,64\text{kN},$$

$$T_{57} = T_{75} = +F = +4\text{kN} (\text{konzola}).$$



Normálové síly; vyjdeme od styčníku 6, kde jsou dvě neznámé normálové síly:

Styčník 6:

$$\begin{aligned} &\leftarrow: N_{65} + T_{62} = 0, \quad N_{65} = -T_{62} = +0,31\text{kN} = N_{56}, \\ &\downarrow: N_{62} - T_{65} = 0, \quad N_{62} = T_{65} = -9,64\text{kN} = N_{26}, \end{aligned}$$

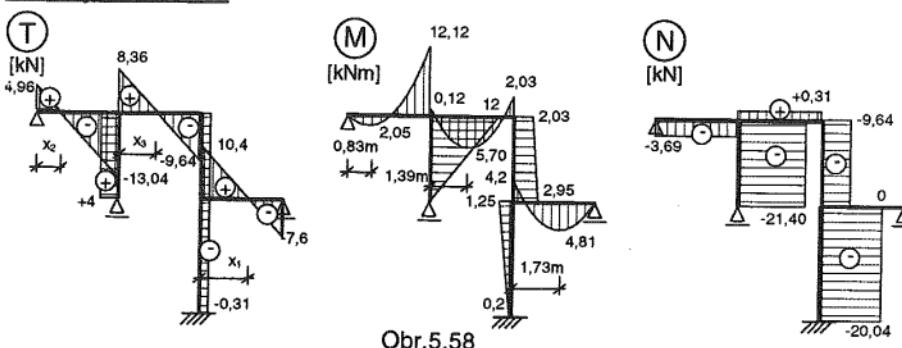
Styčník 5:

$$\begin{aligned} &\leftarrow: N_{54} + T_{57} - N_{56} = 0, \quad N_{54} = -T_{57} + N_{56} = -4 + 0,31 = -3,69\text{kN}, \\ &\downarrow: N_{57} + T_{56} - T_{54} = 0, \quad N_{57} = T_{54} - T_{56} = -13,04 - 8,36 = -21,40\text{kN}, \end{aligned}$$

Styčník 2:

$$\begin{aligned} &N_{26} = 0, \\ &\rightarrow: T_{26} - T_{21} = 0,31 - 0,31 = 0, (\text{kontrola}) \\ &\downarrow: N_{21} + T_{23} - N_{26} = 0, \\ &N_{21} = N_{26} - T_{23} = -9,64 - 10,4 = -20,04\text{kN}. \end{aligned}$$

Průběhy vnitřních sil:



Extrémy ohybového momentu:

$$\text{interval } 2 - 3: \quad T_{x_1} = 10,4 - 6 \cdot x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,73\text{m},$$

$$M_{x_1} = T_{23} \cdot x_1 + M_{23} - \frac{1}{2} q x_1^2 = 10,4 \cdot 1,73 - 4,2 - 3 \cdot 1,73^2 = 4,81\text{kNm},$$

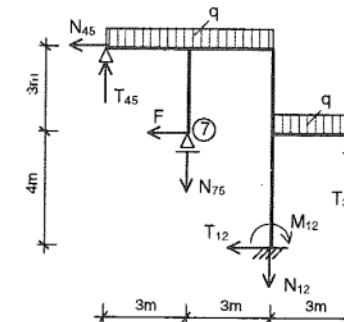
$$\text{interval } 4 - 5: \quad T_{x_2} = 4,96 - 6 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0,83\text{m},$$

$$M_{x_2} = 4,96 \cdot 0,83 + 0 - \frac{1}{2} 6 \cdot 0,83^2 = 2,05\text{kNm},$$

$$\text{interval } 5 - 6: \quad T_{x_3} = 8,36 - 6 \cdot x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 1,39\text{m},$$

$$M_{x_3} = 8,36 \cdot 1,39 - \frac{1}{2} 6 \cdot 1,39^2 - 0,12 = 5,70\text{kNm}.$$

Kontrola rovnováhy sil na celé konstrukci:



$$\leftarrow: N_{45} + F + T_{12} = -3,69 + 4 - 0,31 = 0,$$

$$\downarrow: N_{12} + N_{75} + T_{32} - T_{45} + q \cdot 9 =$$

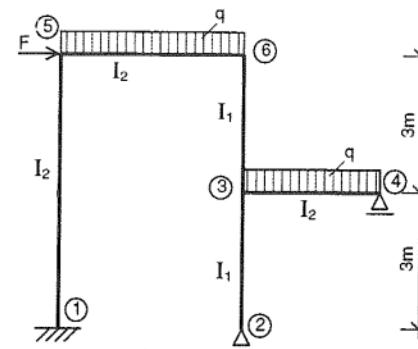
$$= -20,04 - 21,4 - 7,6 - 4,96 + 6,9 = 0,$$

$$\curvearrowright: T_{12} \cdot 4 + T_{45} \cdot 3 + T_{32} \cdot 6 + N_{12} \cdot 3 - N_{45} \cdot 3 + M_{12} + q \cdot 9 \cdot 1,5 = \\ = (-0,31) \cdot 4 + 4,96 \cdot 3 - 7,6 \cdot 6 - 20,04 \cdot 3 - \\ - (-3,69) \cdot 3 - 0,02 + 6,9 \cdot 1,5 = 0.$$

Obr.5.59

## PŘÍKLAD 5.17

Vypočtěte a vykreslete průběhy vnitřních sil na rámu dle obr.5.60,  $I_1=0,5I_2$ ,  $F=6\text{kN}$ ,  $q=6\text{kNm}^{-1}$ .

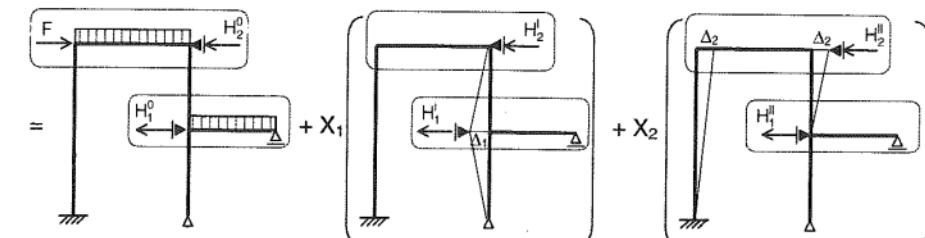


Rám má dvě možnosti posuvu styčníků:  $\Delta_1, \Delta_2$ . Neznámé velikosti a směry posuvů, zvolíme je a velikosti součinitelů  $X_1$  a  $X_2$  určíme z podmínek, že na původním rámu jsou  $H_1$  a  $H_2$  nulové. Platí:

$$H_1 = H_1^0 + H_1^I \cdot X_1 + H_1^{II} \cdot X_2 = 0,$$

$$H_2 = H_2^0 + H_2^I \cdot X_1 + H_2^{II} \cdot X_2 = 0.$$

Obr.5.60



### Poměrné ohybové tuhosti:

$$k = \frac{I}{l} \cdot c, c \text{ volíme} = \frac{3}{I_2},$$

$$k_{15} = \frac{I_2}{6} \cdot \frac{3}{I_2} = 0,5,$$

$$k_{23}^k = \frac{3}{4} \frac{I_1}{3} \cdot \frac{3}{I_2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{I_1}{I_2} = \frac{3}{4} \cdot 0,5 = 0,375,$$

$$k_{34}^k = \frac{3}{4} \frac{I_2}{3} \cdot \frac{3}{I_2} = 0,75,$$

$$k_{36} = \frac{I_1}{3} \cdot \frac{3}{I_2} = 0,5,$$

$$k_{56} = \frac{I_2}{4} \cdot \frac{3}{I_2} = 0,75.$$

### Rozdělovací součinitele:

Styčník 3:  $\sum k = 0,375 + 0,75 + 0,5 = 1,625,$

$$\mu_{32} = \frac{0,375}{1,625} = 0,23, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

$$\mu_{34} = \frac{0,75}{1,625} = 0,46, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

$$\mu_{36} = \frac{0,5}{1,625} = 0,31,$$

styčník 5:  $\sum k = 0,5 + 0,75 = 1,25,$

$$\mu_{51} = \frac{0,5}{1,25} = 0,4, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

$$\mu_{56} = \frac{0,75}{1,25} = 0,6,$$

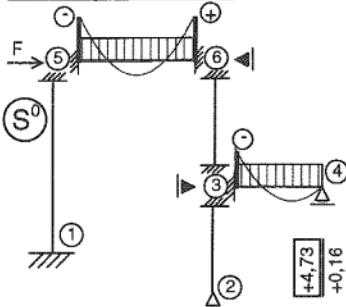
styčník 6:  $\sum k = 0,75 + 0,5 = 1,25,$

$$\mu_{65} = \frac{0,75}{1,25} = 0,6, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

$$\mu_{63} = \frac{0,5}{1,25} = 0,4.$$

### 1. stadium výpočtu – první zatěžovací stav (známé zatížení):

#### Momenty ve veknutí:



$$S_{15} = S_{51} = S_{32} = S_{36} = S_{63} = 0,$$

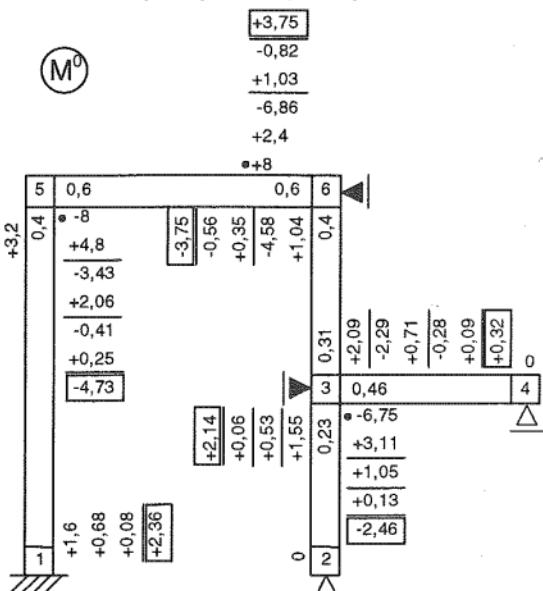
$$S_{34} = -\frac{1}{8}q l^2 = -\frac{1}{8} \cdot 6 \cdot 3^2 = -6,75 \text{ kNm},$$

$$S_{56} = -\frac{1}{12}q l^2 = -\frac{1}{12} \cdot 6 \cdot 4^2 = -8 \text{ kNm},$$

$$S_{65} = \frac{1}{12}q l^2 = +8 \text{ kNm}.$$

#### Vyrovnání momentů:

uvolníme styčníky 5 a 3, pak styčník 6:



Kontrola rovnováhy momentů:

$$\text{Styčník } 5: 4,73 - 4,73 = 0, \quad \text{styčník } 6: 3,75 - 3,75 = 0, \quad \text{styčník } 3: 2,14 + 0,32 - 2,46 = 0.$$

### Reakce v přidaných podporách:

$$\leftarrow: H_1^0 + T_{32}^0 - T_{36}^0 = 0, \quad T_{32}^0 = 0 - \frac{0+2,14}{3} = -0,71 \text{ kN}, \quad T_{36}^0 = 0 - \frac{0,32-3,75}{3} = +1,14 \text{ kN},$$

$$H_1^0 = T_{36}^0 - T_{32}^0 = 1,14 + 0,71 = 1,85 \text{ kN}.$$

$$\leftarrow: H_2^0 + T_{51}^0 + T_{63}^0 - F = 0, \quad T_{51}^0 = 0 - \frac{2,36+4,73}{6} = -1,18 \text{ kN}, \quad T_{63}^0 = 0 - \frac{0,32-3,75}{3} = +1,14 \text{ kN},$$

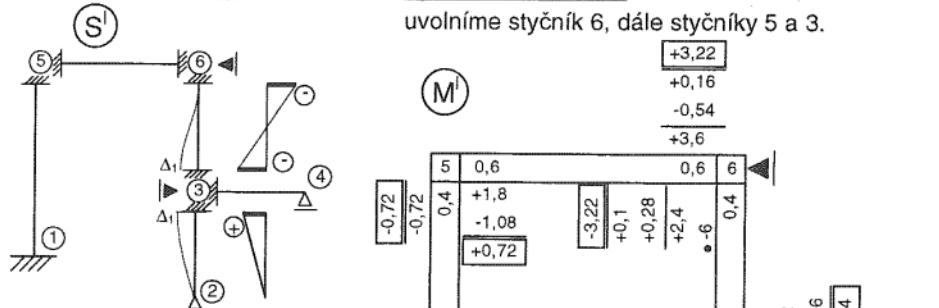
$$H_2^0 = -T_{51}^0 - T_{63}^0 + F = 1,18 - 1,14 + 6 = 6,04 \text{ kN}.$$

### 2. stadium výpočtu – druhý zatěžovací stav (neznámé zatížení $\Delta_1$ ):

#### Momenty ve veknutí:

#### Vyrovnání momentů:

uvolníme styčník 6, dále styčníky 5 a 3.



$$D^I \text{ volíme} = 12$$

$$S_{32}^k = +\frac{2k_{23}^k}{l_{23}} \cdot D^I = +\frac{2,0375}{3} \cdot 12 = 3 \text{ kNm},$$

$$S_{36} = S_{63} = -\frac{3k_{36}}{l_{36}} \cdot D^I = -\frac{3,05}{3} \cdot 12 = -6 \text{ kNm}.$$

Kontrola rovnováhy momentů:

$$\text{Styčník } 3: 3,41 + 0,83 - 4,24 = 0.$$

### Reakce v přidaných podporách:

$$\leftarrow: H_1^I + T_{32}^I - T_{36}^I = 0, \quad T_{32}^I = -\frac{0+3,41}{3} = -1,14 \text{ kN}, \quad T_{36}^I = -\frac{-4,24-3,22}{3} = 2,49 \text{ kN},$$

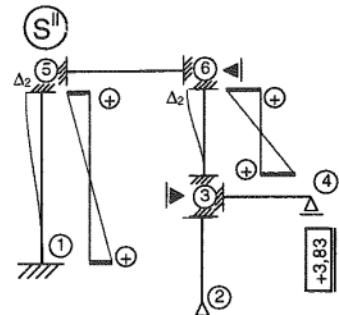
$$H_1^I = T_{36}^I - T_{32}^I = 2,49 + 1,14 = 3,63 \text{ kN}.$$

$$\leftarrow: H_2^I + T_{51}^I + T_{63}^I = 0, \quad T_{51}^I = -\frac{0,72-0,36}{6} = +0,18 \text{ kN}, \quad T_{63}^I = -\frac{-4,24-3,22}{3} = 2,49 \text{ kN},$$

$$H_2^I = -T_{51}^I - T_{63}^I = -0,18 - 2,49 = -2,67 \text{ kN}.$$

### 3. stadium výpočtu – druhý zatěžovací stav (neznámé zatížení $\Delta_2$ ):

Momenty ve veknuti:



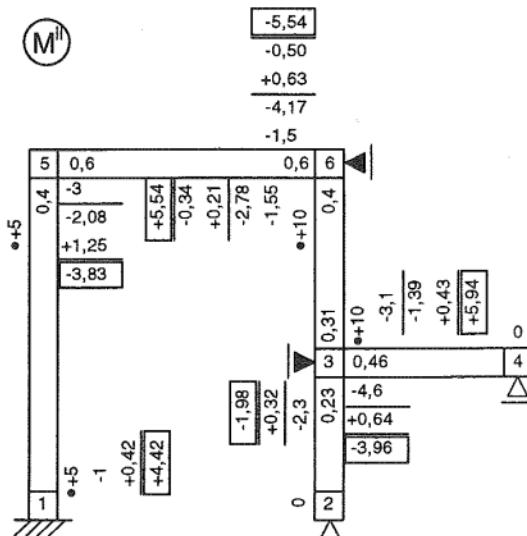
$$D'' \text{ volíme} = 20,$$

$$S_{15} = S_{51} = +\frac{3k_{15}}{l_{15}} \cdot D'' = \\ = \frac{3,05}{6} \cdot 20 = 5 \text{ kNm},$$

$$S_{36} = S_{63} = +\frac{3k_{36}}{l_{36}} \cdot D'' = \\ = \frac{3,05}{3} \cdot 20 = 10 \text{ kNm}.$$

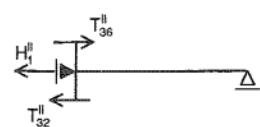
Vyrovnání momentů:

uvolníme styčníky 5 a 3, dále styčník 6:

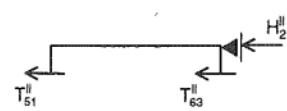


$$\text{Kontrola rovnováhy momentů:} \\ \text{Styčník 3: } -1,98 - 3,96 + 5,94 = 0.$$

Reakce v přidaných podporách:



$$\leftarrow: H_1'' + T_{32}'' - T_{36}'' = 0, \\ T_{32}'' = -\frac{0 - 1,98}{3} = +0,66 \text{ kN}, \\ T_{36}'' = -\frac{5,94 + 5,54}{3} = -3,83 \text{ kN}, \\ H_1'' = T_{36}'' - T_{32}'' = -3,83 - 0,66 = -4,49 \text{ kN}.$$



$$\leftarrow: H_2'' + T_{51}'' + T_{63}'' = 0, \\ T_{51}'' = -\frac{4,42 + 3,83}{6} = -1,37 \text{ kN}, \\ T_{63}'' = -\frac{5,94 + 5,54}{3} = -3,83 \text{ kN}, \\ H_2'' = -T_{51}'' - T_{63}'' = 1,37 + 3,83 = 5,2 \text{ kN}.$$

Obr.5.63

Výsledné reakce v přidaných podporách jsou nulové:

$$H_1 = H_1^0 + X_1 \cdot H_1^I + X_2 \cdot H_1^II = 0,$$

$$H_2 = H_2^0 + X_1 \cdot H_2^I + X_2 \cdot H_2^II = 0,$$

$$1,85 + X_1 \cdot 3,63 + X_2 \cdot (-4,49) = 0,$$

$$6,04 + X_1 \cdot (-2,67) + X_2 \cdot 5,2 = 0,$$

$$X_1 = -5,33, \quad X_2 = -3,90.$$

Výsledné ohybové momenty:  $M = M^0 + X_1 M^I + X_2 M^{II}$ .

$$M_{15} = 2,34 - 5,33(-0,36) - 3,9 \cdot 4,42 = -12,98 \text{ kNm},$$

$$M_{51} = 4,73 - 5,33(-0,72) - 3,9 \cdot 3,83 = -6,37 \text{ kNm},$$

$$M_{56} = -4,73 - 5,33 \cdot 0,72 - 3,9(-3,83) = 6,37 \text{ kNm}, \quad \} 0$$

$$M_{32} = 2,14 - 5,33 \cdot 3,41 - 3,9(-1,98) = -8,31 \text{ kNm}, \quad \} 0$$

$$M_{34} = -2,46 - 5,33 \cdot 0,83 - 3,9(-3,96) = 8,56 \text{ kNm}, \quad \} 0$$

$$M_{36} = 0,32 - 5,33(-4,24) - 3,9 \cdot 5,94 = -0,25 \text{ kNm}, \quad \} 0$$

$$M_{63} = -3,75 - 5,33(-3,22) - 3,9 \cdot 5,54 = -8,19 \text{ kNm}, \quad \} 0$$

$$M_{65} = 3,75 - 5,33 \cdot 3,22 - 3,9(-5,54) = 8,19 \text{ kNm}, \quad \} 0$$

$$M_{23} = M_{43} = 0.$$

$$\text{Posouvající síly: } T_x = \mathcal{T}_x - \frac{M_{ab} + M_{pa}}{l_{ab}},$$

$$T_{15} = T_{51} = 0 - \frac{-12,98 - 6,37}{6} = 3,20 \text{ kN},$$

$$T_{23} = T_{32} = 0 - \frac{0 - 8,31}{3} = +2,8 \text{ kN},$$

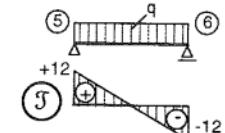
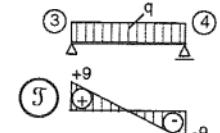
$$T_{36} = T_{63} = 0 - \frac{-0,25 - 8,19}{3} = +2,8 \text{ kN},$$

$$T_{34} = +9 - \frac{8,56 + 0}{3} = 6,14 \text{ kN},$$

$$T_{43} = -9 - \frac{8,56 + 0}{3} = -11,86 \text{ kN},$$

$$T_{56} = +12 - \frac{6,37 + 8,19}{4} = 8,36 \text{ kN},$$

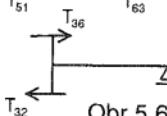
$$T_{65} = -12 - \frac{6,37 + 8,19}{4} = -15,64 \text{ kN}.$$



Kontrola patrových rovnic:

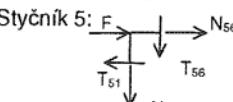


$$\leftarrow: T_{51} + T_{63} - F = 3,20 + 2,8 - 6 = 0,$$



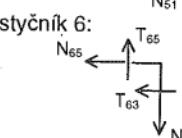
$$\rightarrow: T_{36} - T_{32} = 2,8 - 2,8 = 0.$$

Normálové síly:



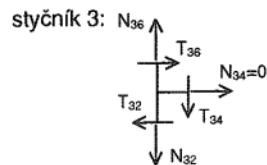
$$\rightarrow: F + N_{56} - T_{51} = 0, \quad N_{56} = T_{51} - F = 3,2 - 6 = -2,8 \text{ kN} = N_{65},$$

$$\downarrow: N_{51} + T_{56} = 0, \quad N_{51} = -T_{56} = -8,36 \text{ kN} = N_{15},$$



$$\leftarrow: N_{65} + T_{63} = 0, \quad N_{65} = -T_{63} = -2,8 \text{ kN} = N_{56},$$

$$\downarrow: N_{63} - T_{65} = 0, \quad N_{63} = T_{65} = -15,64 \text{ kN} = N_{36},$$

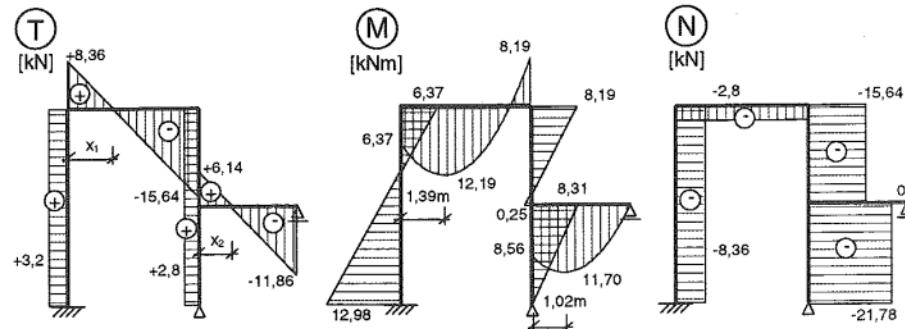


$$\rightarrow: T_{36} - T_{32} + N_{34} = 0, \quad T_{36} = T_{32} = 2,8 \text{ kN},$$

$$\downarrow: N_{32} + T_{34} - N_{36} = 0,$$

$$N_{32} = N_{36} - T_{34} = -15,64 - 6,14 = -21,78 \text{ kN}.$$

Průběhy vnitřních sil:



Obr.5.65

Extrémy ohybového momentu:

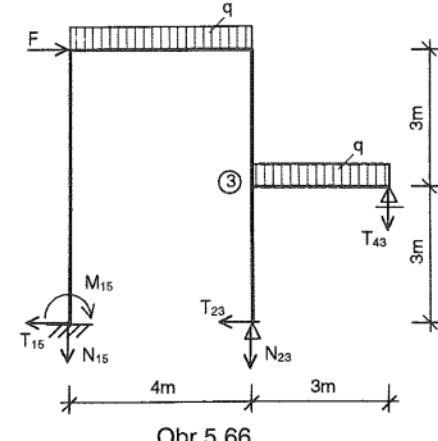
$$\text{interval } 5-6: \quad T_{x_1} = 8,36 - 6x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,39 \text{ m},$$

$$M_{x_1} = T_{56} \cdot x_1 + M_{56} - \frac{1}{2} q x_1^2 = 8,36 \cdot 1,39 + 6,37 - 3 \cdot 1,39^2 = 12,19 \text{ kNm},$$

$$\text{interval } 3-4: \quad T_{x_2} = 6,14 - 6x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 1,02 \text{ m},$$

$$M_{x_2} = T_{34} \cdot x_2 + M_{34} - \frac{1}{2} q x_2^2 = 6,14 \cdot 1,02 + 8,56 - 3 \cdot 1,02^2 = 11,70 \text{ kNm}.$$

Kontrola rovnováhy sil na celé konstrukci:



$$\rightarrow: F - T_{15} - T_{23} = 6 - 3,2 - 2,8 = 0,$$

$$\downarrow: N_{15} + N_{23} + T_{43} + q \cdot 7 = -8,36 - 21,82 - 11,86 + 6,7 = 0,$$

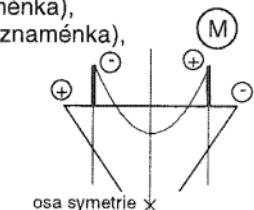
$$\curvearrowright: T_{15} \cdot 3 + T_{23} \cdot 3 + T_{43} \cdot 3 - N_{15} \cdot 4 + M_{15} + F \cdot 3 - q \cdot 7 \cdot 0,5 = 3,2 \cdot 3 + 2,8 \cdot 3 - 11,86 \cdot 3 + 8,36 \cdot 4 - 12,98 + 6,3 - 6 \cdot 7 \cdot 0,5 = 0.$$

Obr.5.66

### 5.3 SYMETRICKY ZATÍŽENÉ SYMETRICKÉ KONSTRUKCE.

- Styčníky na ose symetrie se nepootočí,
- leží-li prut na ose symetrie, pak na tomto prutu  $T=M=0$ , je zde pouze  $N$ ,
- posuv kolmo na osu symetrie je nulový,
- ohybová tuhost prutu protáhlého osou symetrie má, při využití symetrie, poloviční hodnotu tuhosti celého prutu,
- průběhy vnitřních sil: pro symetricky položené body platí:

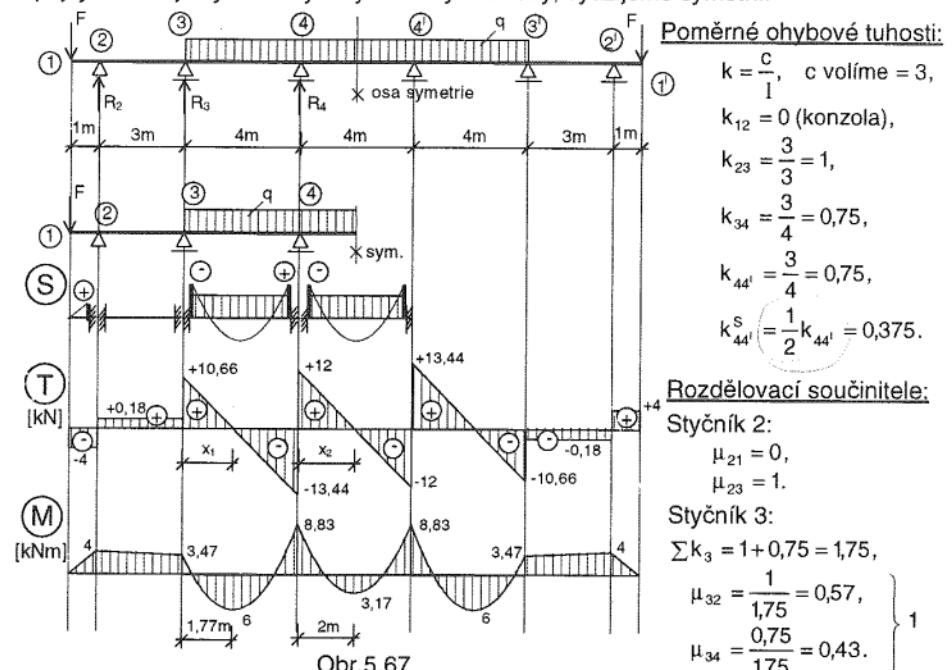
průběh  $N$  je symetrický (stejné hodnoty a stejná znaménka),  
průběh  $T$  je antisymetrický (stejné hodnoty a opačná znaménka),  
průběh  $M$  je symetrický, týká se „tažených vláken“,  
tzn. pro symetricky položené průřezy jsou zna-  
ménka pro ohybové momenty opačná.



### PŘÍKLAD 5.18

Určete průběhy vnitřních sil na spojitém nosníku dle obr.5.67,  $EI=\text{konst.}$ ,  $F=4\text{kN}$ ,  $q=6\text{kNm}^{-1}$ .

Spojitý nosník je symetrický a symetricky zatížený, využijeme symetrii.



Momenty ve veknutí:

$$S_{21} = M_{21} = F \cdot 1 = 4 \text{ kNm}, \quad S_{23} = S_{32} = 0,$$

$$S_{34} = -\frac{1}{12} q \cdot 1^2 = -\frac{1}{12} 6,4^2 = -8 \text{ kNm}, \quad S_{43} = +8 \text{ kNm},$$

$$S_{44} = -\frac{1}{12} q \cdot 1^2 = -\frac{1}{12} 6,4^2 = -8 \text{ kNm}.$$

Rozdělovačí součinitle:

Styčník 2:

$$\mu_{21} = 0, \quad \mu_{23} = 1.$$

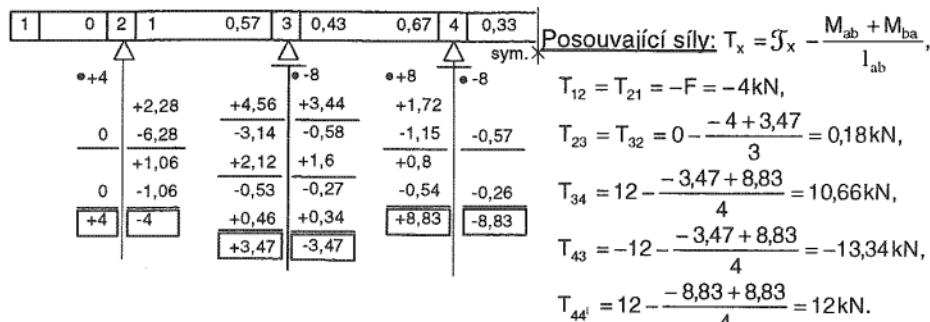
Styčník 3:

$$\begin{aligned} \sum k_3 &= 1 + 0,75 = 1,75, \\ \mu_{32} &= \frac{1}{1,75} = 0,57, \\ \mu_{34} &= \frac{0,75}{1,75} = 0,43. \end{aligned} \quad \left. \right\} 1$$

Styčník 4:

$$\begin{aligned} \sum k_4 &= 0,75 + 0,375 = 1,125, \\ \mu_{43} &= \frac{0,75}{1,125} = 0,67, \\ \mu_{44} &= \frac{0,375}{1,125} = 0,33. \end{aligned} \quad \left. \right\} 1$$

Vyrovnání momentů: nejprve uvolníme styčník 3, dále styčníky 2 a 4:



Extrémy ohybového momentu:

interval 3 – 4:  $T_{x_1} = T_{34} - qx_1 = 10,6 - 6x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,77\text{m}$ ,  
 $M_{x_1} = T_{34} \cdot x_1 + M_{34} - \frac{1}{2}qx_1^2 = 10,66 \cdot 1,77 - 3,47 - 3,177^2 = 6\text{kNm}$ ,

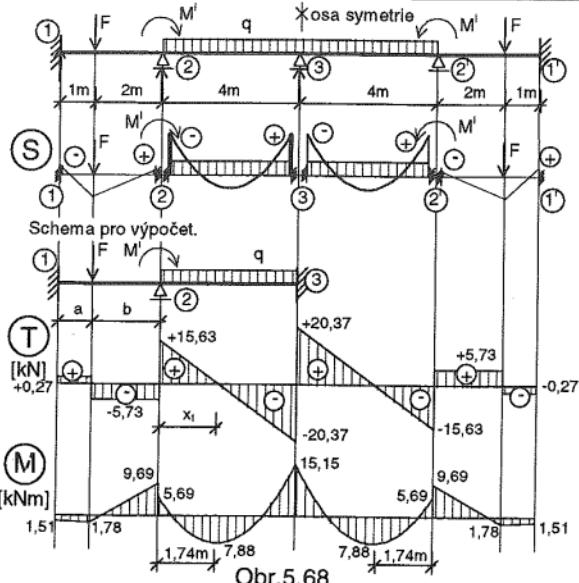
interval 4 – 4':  $T_{x_2} = T_{44'} - qx_2 = 12 - 6x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2\text{m}$ ,  
 $M_{x_2} = T_{44'} \cdot x_2 + M_{44'} - \frac{1}{2}qx_2^2 = 12 \cdot 2 - 8,83 - 3,2^2 = 3,17\text{kNm}$ .

Reakce v podporách:

$$\begin{aligned} R_2 &= -T_{21} + T_{23} = 4 + 0,18 = 4,18\text{kN} = R_{2'}, \\ R_3 &= -T_{32} + T_{34} = -0,18 + 10,66 = 10,48\text{kN} = R_{3'}, \\ R_4 &= -T_{43} + T_{44'} = 13,34 + 12 = 25,34\text{kN} = R_{4'}. \end{aligned}$$

## PŘÍKLAD 5.19

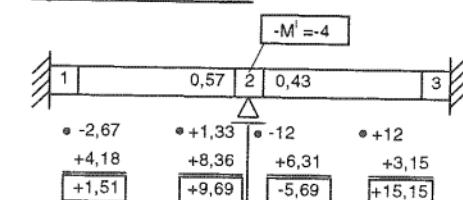
Stanovte průběhy T a M na symetrickém symetricky zatíženém spojitém nosníku dle obr.5.68, EI=konst., F=6kN, q=9kNm<sup>-1</sup>, M'=4kNm.



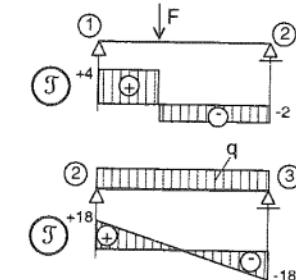
Momenty ve veknutí:

$$\begin{aligned} S_{12} &= -F \frac{ab^2}{l^2} = -6 \frac{1,2^2}{3^2} = -2,67\text{kNm}, \\ S_{21} &= +F \frac{a^2b}{l^2} = +6 \frac{1^2 \cdot 2}{3^2} = +1,33\text{kNm}, \\ S_{23} &= -\frac{1}{12}q l^2 = -\frac{1}{12}9 \cdot 4^2 = -12\text{kNm}, \\ S_{32} &= +\frac{1}{12}q l^2 = +12\text{kNm}. \end{aligned}$$

Vyrovnání momentů:



Kontrola rovnováhy momentů ve styčníku 2:  
 $9,69 - 5,69 - 4 = 0$ .



Posouvající síly:  $T_x = \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_{ab}}$

$$\begin{aligned} T_{12} &= \frac{M_{12} + M_{21}}{l} = 4 - \frac{1,51 + 9,69}{3} = +0,27\text{kN}, \\ T_{21} &= -2 - \frac{1,51 + 9,69}{3} = -5,73\text{kN}, \\ T_{23} &= +18 - \frac{-5,69 + 15,15}{4} = +15,63\text{kN}, \\ T_{32} &= -18 - \frac{-5,69 + 15,15}{4} = -20,37\text{kN}. \end{aligned}$$

Extrémy ohybového momentu:

interval 1 – 2:  $M_F = M_{12} + T_{12} \cdot 1 = 1,51 + 0,27 \cdot 1 = 1,78\text{kNm}$ ,  
interval 2 – 3:  $T_{x_1} = T_{23} - qx_1 = 15,63 - 9x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,74\text{m}$ ,

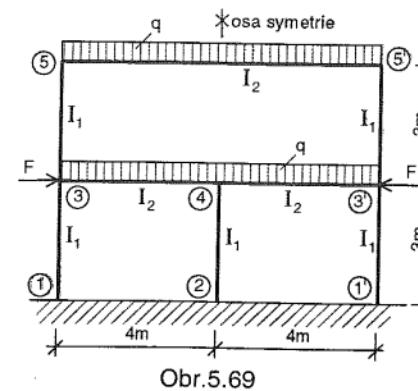
$$M_{x_1} = M_{23} + T_{23} \cdot x_1 - \frac{1}{2}qx_1^2 = -5,69 + 15,63 \cdot 1,74 - 4,5 \cdot 1,74^2 = 7,88\text{kNm}.$$

Reakce v podporách:

$$\begin{aligned} R_1 &= +T_{12} = +0,27\text{kN} = R_{1'}, \\ R_2 &= -T_{21} + T_{23} = 5,73 + 15,63 = 21,36\text{kN} = R_{2'}, \\ R_3 &= -T_{32} + T_{32'} = 20,37 + 20,37 = 40,74\text{kN}. \end{aligned}$$

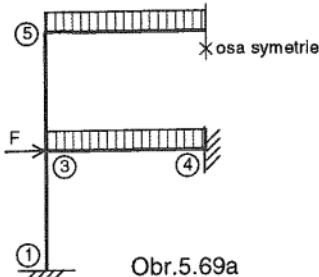
## PŘÍKLAD 5.20

Vypočtěte a vykreslete průběhy vnitřních sil na ocelovém rámu dle obr.5.69, F=10kN, q=12kNm<sup>-1</sup>, stožáry jsou z válcovaného profilu I 160 a příčie z I 240.



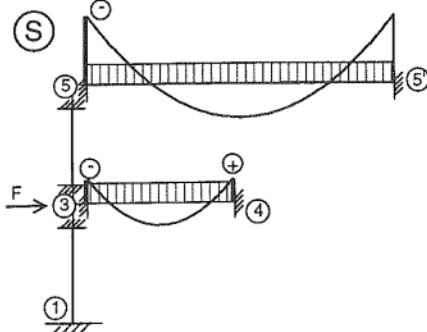
Konstrukce je symetrická a symetricky zatížená. Styčníky 5, 5' a 3, 3', 4 se kolmo na osu symetrie neposoumají.

Schema pro výpočet užitím symetrie:



Obr.5.69a

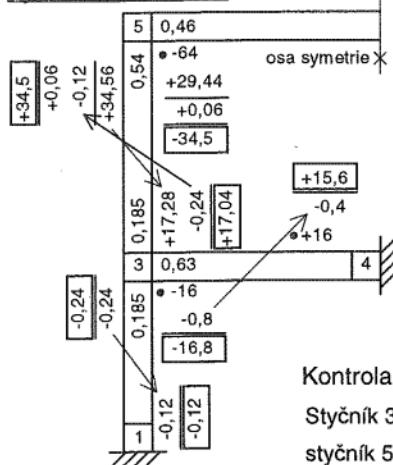
Momenty ve vektoru:



$$\begin{aligned} S_{13} &= S_{31} = S_{35} = S_{53} = 0, \\ S_{34} &= -\frac{1}{12}qI^2 = -\frac{1}{12}12.4^2 = -16 \text{ kNm}, \\ S_{43} &= +16 \text{ kNm}, \\ S_{55'} &= -\frac{1}{12}qI^2 = -\frac{1}{12}12.8^2 = -64 \text{ kNm}. \end{aligned}$$

1 celého prutu !!!!

Vyrovnání momentů:



Kontrola rovnováhy momentů:

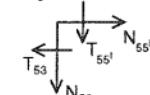
$$\begin{aligned} \text{Styčník 3: } & -0,24 - 16,8 + 17,04 = 0, \\ \text{styčník 5: } & +34,5 - 34,5 = 0. \end{aligned}$$

### Poměrné ohybové tuhosti:

$$\begin{aligned} k &= \frac{I_1}{l} \cdot c, \quad c \text{ volíme } = \frac{4}{I_2}, \\ k_{13} &= \frac{I_1}{3} \cdot \frac{4}{I_2} = \frac{4}{3} \cdot 0,2203 = 0,294, \\ k_{34} &= \frac{I_2}{4} \cdot \frac{4}{I_2} = 1, \\ k_{35} &= \frac{I_1}{3} \cdot \frac{4}{I_2} = 0,294, \\ k_{55'} &= \frac{I_2}{8} \cdot \frac{4}{I_2} = 0,5, \quad k_{55'}^s = \frac{1}{2}k_{55'} = 0,25. \end{aligned}$$

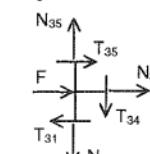
### Normálové síly:

Styčník 5:



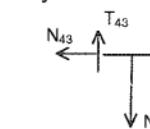
$$\begin{aligned} \downarrow: N_{53} + T_{55'} &= 0, \quad N_{53} = -T_{55'} = -48 \text{ kN}, \\ \rightarrow: N_{55'} - T_{53} &= 0, \quad N_{55'} = T_{53} = -17,18 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Styčník 3:



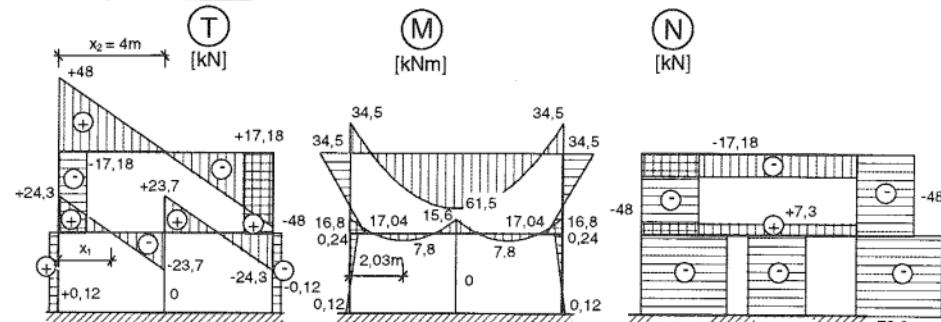
$$\begin{aligned} \downarrow: N_{31} + T_{34} - N_{35} &= 0, \\ N_{31} = N_{35} - T_{34} &= -48 - 24,3 = -72,3 \text{ kN}, \\ \rightarrow: N_{34} + T_{35} + F - T_{31} &= 0, \\ N_{34} = T_{31} - T_{35} - F &= 0,12 + 17,18 - 10 = 7,3 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Styčník 4:



$$\begin{aligned} \downarrow: N_{42} - T_{43} + T_{43'} &= 0, \\ N_{42} = 2T_{43} &= -47,4 \text{ kN}. \end{aligned}$$

### Průběhy vnitřních sil:



Obr.5.70

### Extrémy ohybového momentu:

$$\text{interval 3 - 4: } T_{x_1} = T_{34} - qx_1 = 24,3 - 12x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2,03 \text{ m},$$

$$M_{x_1} = T_{34} \cdot x_1 + M_{34} - \frac{1}{2}qx_1^2 = 24,3 \cdot 2,03 - 16,8 - 6 \cdot 2,03^2 = +7,8 \text{ kNm},$$

$$\text{interval 5 - 5': } M_{x_2} = T_{55'} \cdot x_2 + M_{55'} - \frac{1}{2}qx_2^2 = 48,4 - 34,5 - 6 \cdot 4^2 = +61,5 \text{ kNm}.$$

$$\text{Posouvající síly: } T_x = \mathcal{T}_x - \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_{ab}},$$

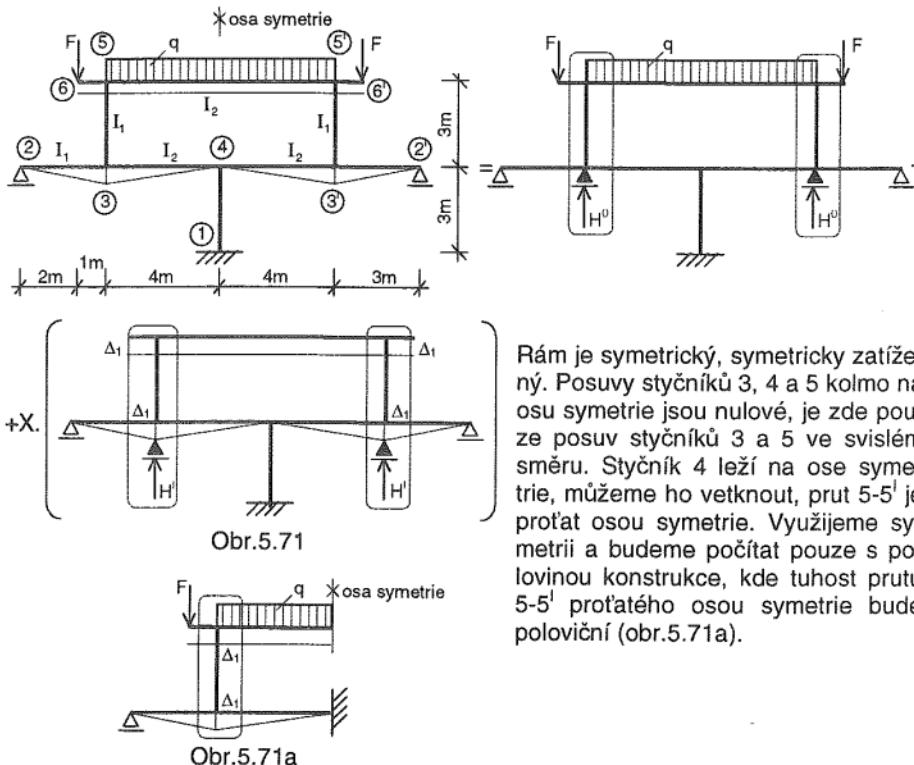
$$\begin{aligned} T_{13} &= T_{31} = 0 - \frac{-0,12 - 0,24}{3} = +0,12 \text{ kN}, \\ T_{34} &= +24 - \frac{-16,8 + 15,6}{4} = +24,3 \text{ kN}, \\ T_{43} &= -24 - \frac{-16,8 + 15,6}{4} = -23,7 \text{ kN}, \\ T_{35} &= T_{53} = 0 - \frac{17,04 + 34,5}{3} = -17,18 \text{ kN}, \\ T_{55'} &= +48 - \frac{-34,5 + 34,5}{8} = +48 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Kontrola rovnováhy momentů:

$$\begin{aligned} \text{Styčník 3: } & -0,24 - 16,8 + 17,04 = 0, \\ \text{styčník 5: } & +34,5 - 34,5 = 0. \end{aligned}$$

## PŘÍKLAD 5.21

Stanovte průběhy vnitřních sil na rámu dle obr.5.71,  $I_2=2I_1$ ,  $F=8\text{kN}$ ,  $q=9\text{Nm}^{-1}$ .



Poměrné ohybové tuhosti:

$$k = \frac{I}{l} \cdot c, c \text{ volíme} = \frac{3}{I_1},$$

$$k_{23} = \frac{3}{4} \cdot \frac{I_1}{3} \cdot \frac{3}{I_1} = 0,75,$$

$$k_{34} = \frac{I_2}{4} \cdot \frac{3}{I_1} = \frac{3}{4} \cdot 2 = 1,5,$$

$$k_{35} = \frac{I_1}{3} \cdot \frac{3}{I_1} = 1,$$

$$k_{55'} = \frac{I_2}{8} \cdot \frac{3}{I_1} = 0,75,$$

$$k_{55'}^s = \frac{1}{2} \cdot 0,75 = 0,375,$$

$k_{56} = 0$  (konzola).

Rozdělovací součinitele:

Styčník 3:

$$\sum k = k_{32}^k + k_{34} + k_{35} = 0,75 + 1,5 + 1 = 3,25,$$

$$\mu_{32} = \frac{0,75}{3,25} = 0,23, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

$$\mu_{34} = \frac{1,5}{3,25} = 0,46, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

$$\mu_{35} = \frac{1}{3,25} = 0,31.$$

Styčník 5:

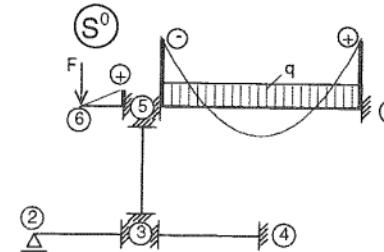
$$\sum k = k_{53} + k_{55'}^s = 1 + 0,375 = 1,375,$$

$$\mu_{53} = \frac{1}{1,375} = 0,73, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

$$\mu_{55'}^s = \frac{0,375}{1,375} = 0,27. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 1$$

1. stadium výpočtu – první zatěžovací stav (známé zatížení):

Momenty ve veknutí:

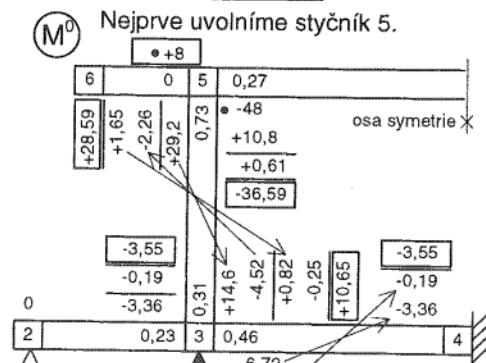


$$S_{32}^k = S_{34} = S_{43} = S_{35} = S_{53} = 0,$$

$$S_{56} = M_{56} = +F \cdot l = 8\text{kNm},$$

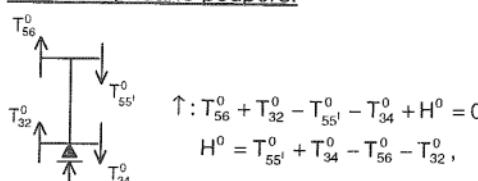
$$S_{55'}^s = -\frac{1}{12} q l^2 = -\frac{1}{12} \cdot 9,8 \cdot 12^2 = -48\text{kNm}.$$

Vyrovnání momentů:



Kontrola rovnováhy momentů:  $\sum M_3 = -3,55 + 10,65 - 7,1 = 0.$

Reakce v přidané podpoře:



$$\text{Obr. 5.72} \quad \uparrow : T_{56}^0 + T_{32}^0 - T_{55'}^0 - T_{34}^0 + H^0 = 0,$$

$$H^0 = T_{55'}^0 + T_{34}^0 - T_{56}^0 - T_{32}^0,$$

$$H^0 = 36 + 2,66 + 8 - 1,18 = 45,48\text{kN}.$$

$$T_{56}^0 = +36\text{kN},$$

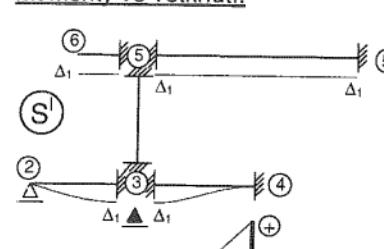
$$T_{34}^0 = -\frac{-7,1 - 3,55}{4} = +2,66\text{kN},$$

$$T_{55'}^0 = -F = -8\text{kNm} \text{ (konzola)},$$

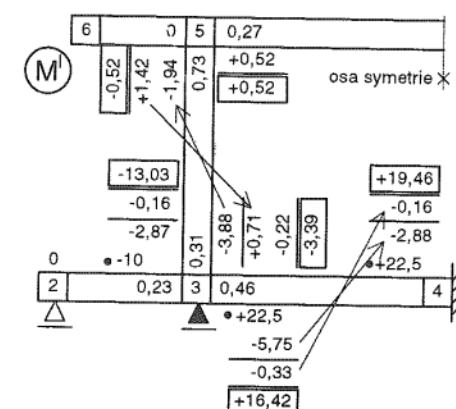
$$T_{32}^0 = -\frac{0 - 3,55}{3} = +1,18\text{kN}.$$

2. stadium výpočtu – druhý zatěžovací stav (neznámé zatížení  $\Delta_1$ ):

Momenty ve veknutí:

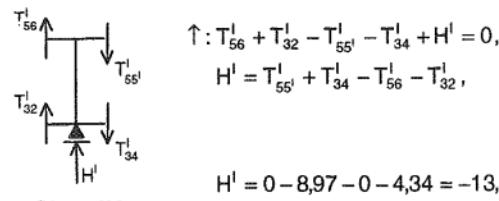


Vyrovnání momentů:  
Nejprve uvolníme styčník 3.



Kontrola rovnováhy momentů:  $\sum M_3 = -13,03 - 3,39 + 16,42 = 0.$

### Reakce v přidané podpoře:



Obr.5.73

$$T_{55}^I = \frac{0,52 - 0,52}{8} = 0,$$

$$T_{34}^I = \frac{-16,42 + 19,46}{4} = -8,97 \text{ kN},$$

$$T_{56}^0 = 0 \text{ (konzola)},$$

$$H^I = 0 - 8,97 - 0 - 4,34 = -13,31 \text{ kN.}$$

$$T_{32}^I = \frac{0 - 13,03}{3} = +4,34 \text{ kN.}$$

### Výsledná reakce v přidané podpoře:

$$H = H^0 + X \cdot H^I = 0,$$

$$45,48 + X \cdot (-13,31) = 0 \Rightarrow X = \frac{45,48}{13,31} = 3,42.$$

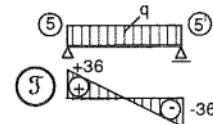
### Výsledné vnitřní síly:

Ohybové momenty:  $M = M^0 + X \cdot M^I$ ,

$$\begin{aligned} M_{14} &= M_{41} = 0, \\ M_{23} &= 0, \\ M_{32} &= -3,55 + 3,42 \cdot (-13,31) = -48 \text{ kNm}, \\ M_{34} &= -7,1 + 3,42 \cdot 16,42 = 49,00 \text{ kNm}, \\ M_{35} &= 10,65 + 3,42 \cdot (-3,39) = -1,00 \text{ kNm}, \\ M_{53} &= 28,59 + 3,42 \cdot (-0,52) = 26,81 \text{ kNm}, \\ M_{56} &= 8 \text{ kNm (konzola)}, \\ M_{55}^I &= -36,59 + 3,42 \cdot 0,52 = -34,81 \text{ kNm}, \\ M_{43} &= -3,55 + 3,42 \cdot 19,46 = +63 \text{ kNm}. \end{aligned}$$

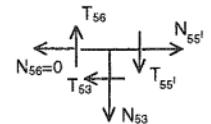
Posouvající síly:  $T_x = \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l_{ab}}$ ,

$$\begin{aligned} T_{14} &= T_{41} = 0, \\ T_{23} &= T_{32} = 0 - \frac{0 - 48}{3} = +16 \text{ kN}, \\ T_{34} &= T_{43} = 0 - \frac{49 + 63}{4} = -28 \text{ kN}, \\ T_{35} &= T_{53} = 0 - \frac{-1 + 26,81}{3} = -8,62 \text{ kN}, \\ T_{56} &= -F = -8 \text{ (konzola)}, \\ T_{55}^I &= 36 - \frac{-34,81 + 34,81}{8} = +36 \text{ kN.} \end{aligned}$$



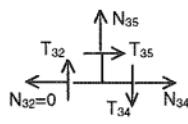
### Normálové síly:

Styčník 5:



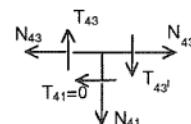
$$\begin{aligned} \rightarrow: N_{55}^I - T_{53} &= 0, \\ N_{55}^I &= T_{53} = -8,62 \text{ kN}, \\ \downarrow: N_{53} + T_{55}^I - T_{56} &= 0, \\ N_{53} &= T_{56} - T_{55}^I = \\ &= -8 - 36 = -44 \text{ kN.} \end{aligned}$$

Styčník 3:



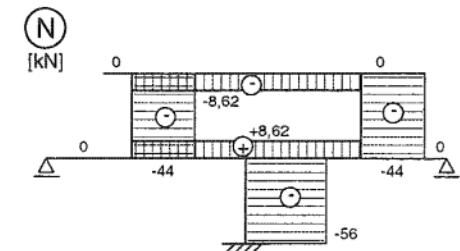
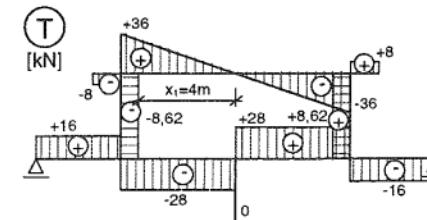
$$\begin{aligned} \rightarrow: N_{34} + T_{35} &= 0, \\ N_{34} &= -T_{35} = 8,62 \text{ kN}, \\ \downarrow: N_{53} + T_{55}^I - T_{56} &= 0, \\ N_{53} &= T_{56} - T_{55}^I = \\ &= -44 + 16 + 28 = 0. \end{aligned}$$

Styčník 4:



$$\begin{aligned} \downarrow: N_{41} - T_{43} + T_{43}^I &= 0, \\ T_{43}^I &= -T_{43}, \\ N_{41} - 2T_{43} &= 0, \\ N_{41} &= 2(-28) = -56 \text{ kN.} \end{aligned}$$

### Průběhy vnitřních sil:



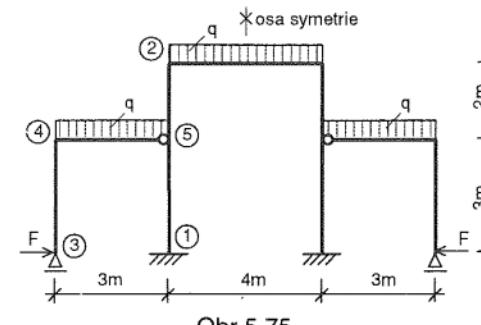
### Extrém ohybového momentu:

interval 5 – 5<sup>I</sup>:  $x_1 = 4 \text{ m (uprostřed)}$ ,

$$\begin{aligned} M_{x_1} &= T_{55}^I \cdot x_1 + M_{55}^I - \frac{1}{2} q x_1^2 = \\ &= 36,4 - 34,81 - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4^2 = 37,19 \text{ kNm.} \end{aligned}$$

## PŘÍKLAD 5.22

Řešte průběhy vnitřních sil na soustavě dle obr.5.75, EI=konst., F=6kN, q=6kNm<sup>-1</sup>.

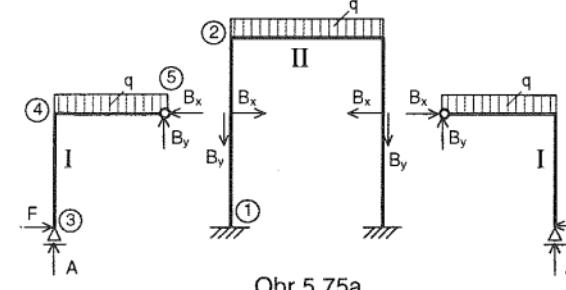


Obr.5.75

Část I je staticky určitá, reakce A, B<sub>x</sub>, B<sub>y</sub> vypočteme z podmínek rovnováhy na části I:

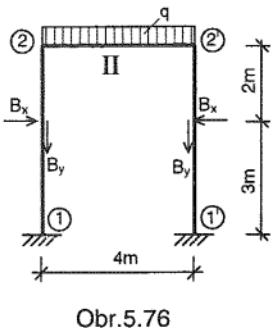
$$\begin{aligned} \rightarrow: F - B_x &= 0, \\ \uparrow: A - q \cdot 3 + B_y &= 0, \\ \curvearrowright: F \cdot 3 + q \cdot 3 \cdot 1,5 - A \cdot 3 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_x &= F = 6 \text{ kN,} \\ A &= F + q \cdot 1,5 = 6 + 9 = 15 \text{ kN.} \\ B_y &= q \cdot 3 - A = 18 - 15 = 3 \text{ kN,} \end{aligned}$$



Obr.5.75a

Dále řešíme pouze část II s využitím symetrie (obr.5.76):



Obr.5.76

Poměrné ohybové tuhosti:  $k = \frac{c}{l}$ , c volíme = 6,  
 $k_{12} = \frac{6}{5} = 1,2$ ,  
 $k_{22^l} = \frac{6}{4} = 1,5$ ,  $k_{22^s}^s = \frac{1}{2}k_{22^l} = \frac{1}{2}1,5 = 0,75$ .

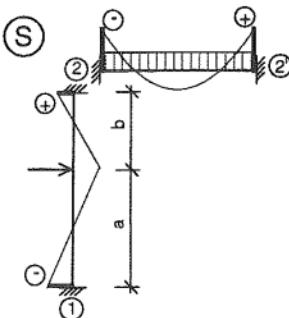
#### Rozdělovací součinitele:

Styčník 2:  $\sum k = 1,2 + 0,75 = 1,95$ ,

$$\mu_{21} = \frac{1,2}{1,95} = 0,615,$$

$$\mu_{22^l} = \frac{0,75}{1,95} = 0,385.$$

#### Momenty ve veknutí:

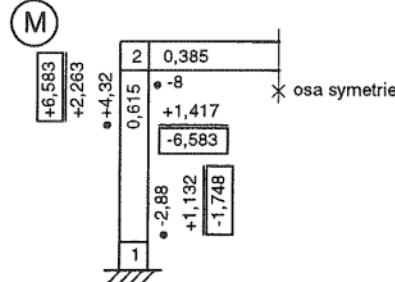


$$S_{22^l} = -\frac{1}{12}q l^2 = -\frac{1}{12}6.4^2 = -8 \text{ kNm},$$

$$S_{12} = -B_x \frac{ab^2}{l^2} = -6 \frac{3.2^2}{5^2} = -2,88 \text{ kNm},$$

$$S_{21} = +B_x \frac{a^2b}{l^2} = +6 \frac{3^3 \cdot 2}{5^2} = +4,32 \text{ kNm}.$$

#### Vyrovnání momentů:



#### Posouvající síly:

$$T_{34} = -F = -6 \text{ kN},$$

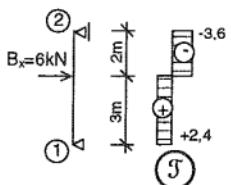
$$T_{45} = A = 15 \text{ kN},$$

$$T_{54} = A - q \cdot 3 = 15 - 18 = -3 \text{ kN},$$

$$T_{12} = 2,4 - \frac{-1,748 + 6,583}{5} = 1,43 \text{ kN},$$

$$T_{21} = -3,6 - \frac{-1,748 + 6,583}{5} = -4,57 \text{ kN},$$

$$T_{22^l} = \frac{1}{2}q \cdot 4 = \frac{1}{2}6.4 = 12 \text{ kN}.$$



#### Normálové síly:

Styčník 2:

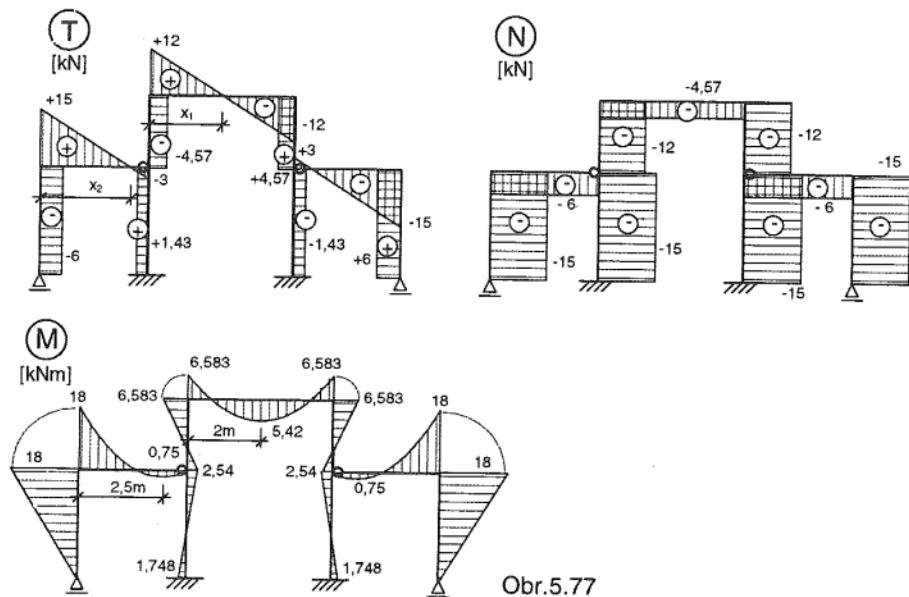
$$\begin{aligned} N_{22^l} &\rightarrow N_{22^l} - T_{21} = 0, & N_{22^l} = T_{21} = -4,57 \text{ kN}, \\ T_{21} &\leftarrow T_{22^l} \\ \downarrow : N_{25} + T_{22^l} &= 0, & N_{25} = -T_{22^l} = -12 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Bod 5:

$$\begin{aligned} \uparrow N_{52} & \\ \downarrow : N_{51} + B_y - N_{52} &= 0, & N_{51} = N_{52} - B_y = -12 - 3 = -15 \text{ kN}. \\ B_y & \downarrow N_{51} \end{aligned}$$

$$N_{34} = -A = -15 \text{ kN}, \quad N_{45} = -F = -6 \text{ kN}.$$

#### Průběhy vnitřních sil:



Obr.5.77

#### Extrémy ohybových momentů:

interval 2 – 2<sup>l</sup>:  $T_{x_1} = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \text{ m}$ ,

$$M_{x_1} = T_{22^l} \cdot x_1 + M_{22^l} - \frac{1}{2}qx_1^2 = 12,2 - 6,583 - 3,2^2 = 5,42 \text{ kNm},$$

interval 1 – 2:

$$M_5 = T_{12} \cdot 3 + M_{12} = 1,43 \cdot 3 - 1,748 = 2,54 \text{ kNm},$$

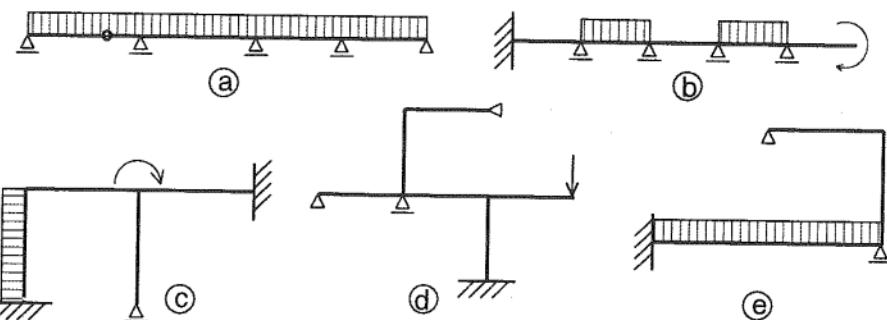
interval 4 – 5:  $T_{x_2} = A - qx_2 = 15 - 6x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2,5 \text{ m}$ ,

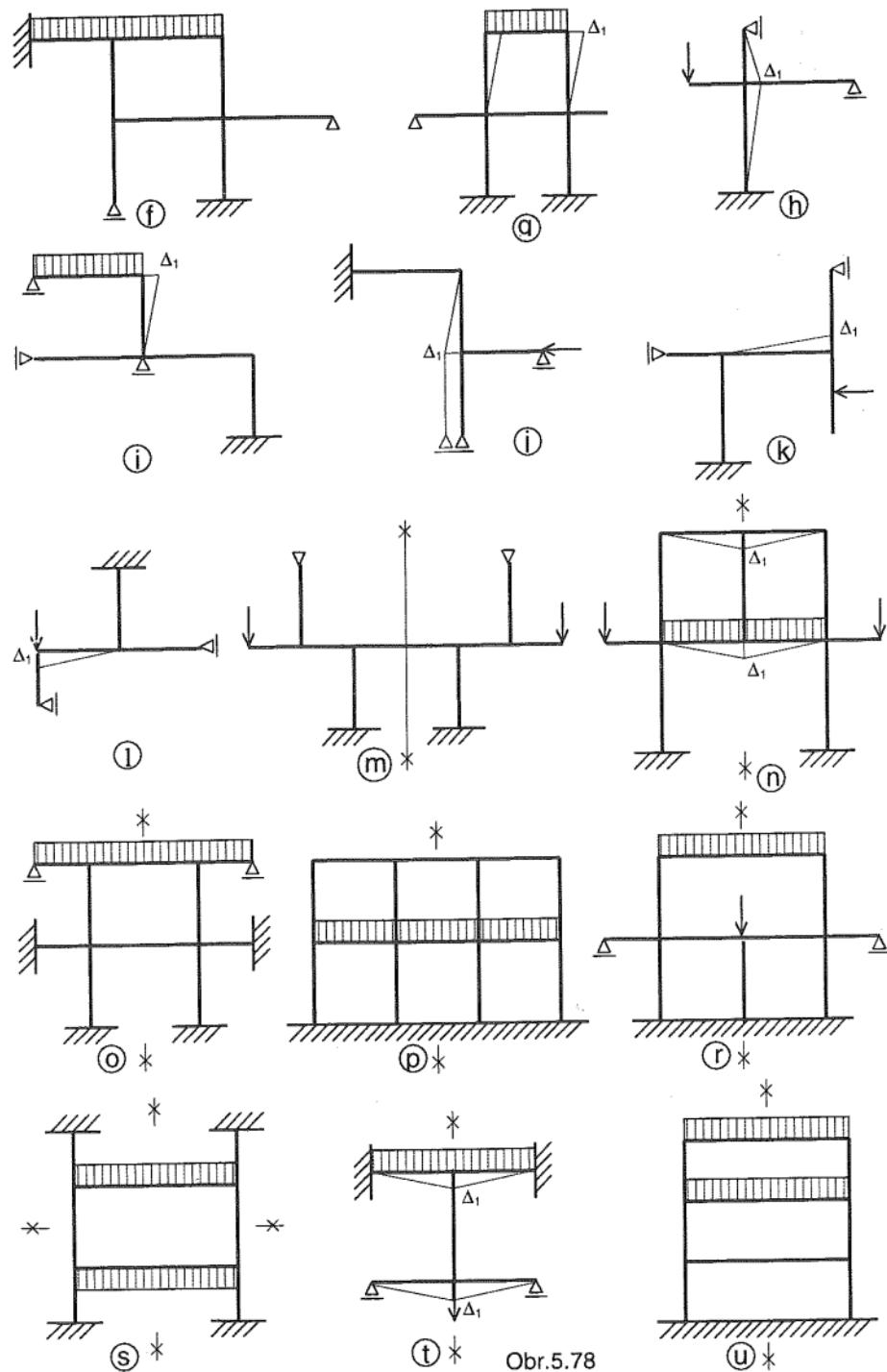
$$M_{x_2} = A \cdot 2,5 - F \cdot 3 - \frac{1}{2}qx_2^2 = 15 \cdot 2,5 - 6 \cdot 3 - 3,25^2 = 0,75 \text{ kNm}.$$

#### Poznámka:

Na části I určíme vnitřní síly jako na staticky určité části.

#### Typy příkladů na procvičení (obr. 5.78, a – e).





6

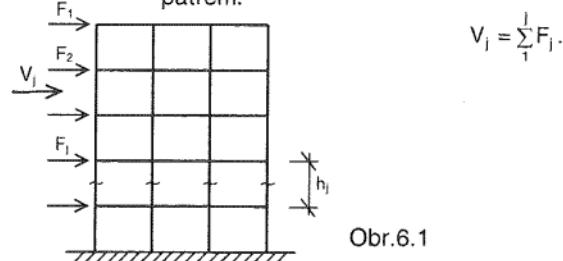
## RÁMOVÉ VÝSEKY PRO ZATÍŽENÍ VYSOKÝCH BUDOV VĚTREM.

### PŘIBLIŽNÉ ŘEŠENÍ.

Předpoklad: zatížení větrem w působí po fasádě rovnoměrně, intenzita zatížení se může měnit v jednotlivých patrech s výškou.

Zatížení: spojité zatížení w (výpočet ve skriptu Nosné konstrukce 1) nahradíme osamělými břemeny  $F_j$  působícími ve styčnících, patra číslujeme od nejvyššího patra směrem dolů, j-té patro, i-tý sloup.

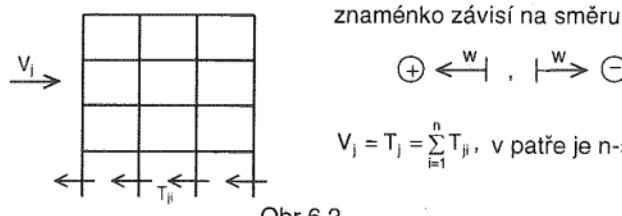
Patrová síla: v j-tém patře je patrová síla součtem všech sil F nad uvažovaným j-tým patrem:



Obr.6.1

Patrový moment: v j-tém patře je  $M_j = \pm V_j h_j$ ,

znaménko závisí na směru zatížení:



Obr.6.2

Patrový moment přenesou sloupy, ve sloupech vznikají momenty:

v horních koncích sloupu v j-tém patře  $M_{ba_j}$ ,

v dolních koncích sloupu v j-tém patře  $M_{ab_j}$ .

Předpokládáme, že momenty v horních a dolních koncích sloupu jsou stejné.

Pro posouvající síly na sloupech platí (zatížení je pouze ve styčnících):

$$T_j = \frac{M_{ab_j} + M_{ba_j}}{h_j} = V_j \Rightarrow -V_j h_j = M_{ab_j} + M_{ba_j},$$

$$M_{ab_j} = M_{ba_j} = -0,5 V_j h_j = -0,5 M_j.$$

Pokud je ve spodním patře na dolním konci sloupu větnutí, pak je sloup ve spodní části tužší a předpokládáme rozdělení patrového momentu na koncové momenty:

$$\text{v dolní části } M_{ab_j} = -0,6 M_j,$$

$$\text{v horní části } M_{ba_j} = -0,4 M_j.$$

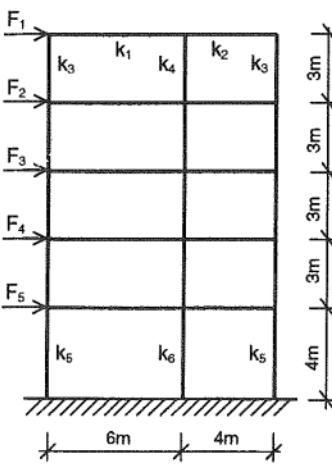
### Rozdělení patrového momentu na sloupy:

Patrový moment  $M_j$  a tím i momenty v horní a dolní části sloupů rozdělíme na jednotlivé sloupy v poměru jejich tuhostí v j-tém patře:

$$M_{ji} = M_j \frac{k_{ji}}{\sum k_{ji}}, \text{ kde } k_{ji} \text{ je poměrná tuhost i-tého sloupu v j-tém patře,} \\ \sum k_{ji} \text{ je součet poměrných tuhostí všech sloupů v j-tém patře.}$$

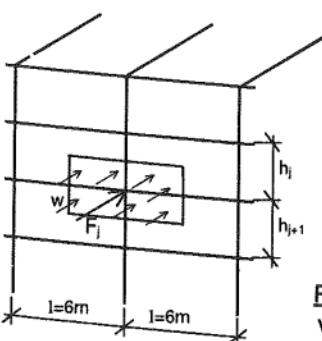
### Příklad 6.1

Stanovte průběhy ohybových momentů na rámu zatíženém větrem (obr.6.3),  $w=1\text{kNm}^{-2}$ , předpokládáme rovnoramenné rozdělení po celé ploše fasády, vzdálenost rámu je  $l=6\text{m}$ , příčle i sloupy jsou obdélníkového průřezu: příčle  $\frac{1}{3}, 0,3/0,5\text{m}$ ,  $I_1$ , sloupy krajní  $\frac{1}{3}, 0,3/0,3\text{m}$ ,  $I_2$ , sloupy vnitřní  $\frac{1}{3}, 0,3/0,4\text{m}$ ,  $I_3$ .



Obr.6.3

### Zatížení silami $F_i$ :



Obr.6.4

Poměrné ohybové tuhosti: c volíme  $\frac{3}{I_1}$ ,

příčle:  $k_1 = \frac{I_1}{6} \cdot \frac{3}{I_1} = 0,5$ ,

$k_2 = \frac{I_1}{4} \cdot \frac{3}{I_1} = 0,75$ ,

sloupy krajní:

$$k_3 = \frac{I_2}{3} \cdot \frac{3}{I_1} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{1}{12} \cdot 0,3^4}{\frac{1}{12} \cdot 0,3 \cdot 0,5^3} = \frac{0,3^3}{0,5^3} = 0,216,$$

sloupy krajní spodní:

$$k_5 = \frac{I_2}{4} \cdot \frac{3}{I_1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{I_2}{I_1} = 0,162,$$

sloupy střední:

$$k_4 = \frac{I_3}{3} \cdot \frac{3}{I_1} = \frac{I_3}{I_1} = \frac{0,4^3}{0,5^3} = 0,512,$$

sloupy střední spodní:

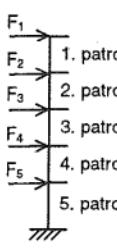
$$k_6 = \frac{I_3}{4} \cdot \frac{3}{I_1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{I_3}{I_1} = 0,384.$$

Na rám působí ve styčníku v j-tém patře síla  $F_j = w \cdot x$  plocha příslušná styčníku:

$$F_1 = w \cdot 1,5 \cdot 6 = 1,5 \cdot 6 = 9\text{kN}, \\ F_2 = w \cdot 3 \cdot 6 = 1,3 \cdot 6 = 18\text{kN}, \\ F_3 = w \cdot 3 \cdot 6 = 1,3 \cdot 6 = 18\text{kN}, \\ F_4 = w \cdot 3 \cdot 6 = 1,3 \cdot 6 = 18\text{kN}, \\ F_5 = w \cdot (1,5 + 2) \cdot 6 = 1,3 \cdot 5 \cdot 6 = 21\text{kN}.$$

### Patrové síly $V_j$ :

$$V_1 = F_1 = 9\text{kN}, \\ V_2 = F_1 + F_2 = 9 + 18 = 27\text{kN}, \\ V_3 = F_1 + F_2 + F_3 = 9 + 18 + 18 = 45\text{kN}, \\ V_4 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 9 + 18 + 18 + 18 = 63\text{kN}, \\ V_5 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 9 + 18 + 18 + 18 + 21 = 84\text{kN},$$



Obr.6.5

### Patrové momenty: $M_j = -V_j \cdot h_j$ , směr w →, $M_j$ ⊖.

$$M_1 = -V_1 \cdot h_1 = -9,3 = -27\text{kNm},$$

$$M_2 = -V_2 \cdot h_2 = -27,3 = -81\text{kNm},$$

$$M_3 = -V_3 \cdot h_3 = -45,3 = -135\text{kNm},$$

$$M_4 = -V_4 \cdot h_4 = -63,3 = -189\text{kNm},$$

$$M_5 = -V_5 \cdot h_5 = -84,4 = -336\text{kNm}.$$

Tyto momenty rozdělíme v poměru tuhostí sloupů na jednotlivé sloupy v patře, přičemž 0,5 momentu přenese horní část a 0,5 dolní část sloupu, ve spodním patře horní část 0,4 a dolní 0,6 momentu.

Označení:  $M_{ji}^b$  - moment na i-tém sloupu v j-tém patře v horní části,  
 $M_{ji}^a$  - moment na i-tém sloupu v j-tém patře v dolní části.

### Rozdělení patrových momentů:

1. patro:  $M_1 = -27\text{kNm}$ ,  $\sum k = k_3 + k_4 + k_5 = 0,216 + 0,512 + 0,216 = 0,944$ ,

$$M_{11}^b = M_{11}^a = 0,5M_1 \frac{k_3}{\sum k} = 0,5(-27) \frac{0,216}{0,944} = -3,09\text{kNm},$$

$$M_{12}^b = M_{12}^a = 0,5M_1 \frac{k_4}{\sum k} = 0,5(-27) \frac{0,512}{0,944} = -7,32\text{kNm},$$

$$M_{13}^b = M_{13}^a = 0,5M_1 \frac{k_5}{\sum k} = 0,5(-27) \frac{0,216}{0,944} = -3,09\text{kNm},$$

$$\text{kontrola: } \sum M = 2(-3,09) + 2(-7,32) + 2(-3,09) = -27\text{kNm} = M_1.$$

2. patro:  $M_2 = -81\text{kNm}$ ,  $\sum k = k_3 + k_4 + k_5 = 0,216 + 0,512 + 0,216 = 0,944$ ,

$$M_{21}^b = M_{21}^a = 0,5M_2 \frac{k_3}{\sum k} = 0,5(-81) \frac{0,216}{0,944} = -9,27\text{kNm},$$

$$M_{22}^b = M_{22}^a = 0,5M_2 \frac{k_4}{\sum k} = 0,5(-81) \frac{0,512}{0,944} = -21,96\text{kNm},$$

$$M_{23}^b = M_{23}^a = 0,5M_2 \frac{k_5}{\sum k} = 0,5(-81) \frac{0,216}{0,944} = -9,27\text{kNm},$$

$$\text{kontrola: } \sum M = 2(-9,27) + 2(-21,96) + 2(-9,27) = -81\text{kNm} = M_2.$$

3. patro:  $M_3 = -135\text{kNm}$ ,  $\sum k = k_3 + k_4 + k_5 = 0,216 + 0,512 + 0,216 = 0,944$ ,

$$M_{31}^b = M_{31}^a = M_{33}^b = M_{33}^a = 0,5M_3 \frac{k_3}{\sum k} = 0,5(-135) \frac{0,216}{0,944} = -15,45\text{kNm},$$

$$M_{32}^b = M_{32}^a = 0,5M_3 \frac{k_4}{\sum k} = 0,5(-135) \frac{0,512}{0,944} = -36,6\text{kNm},$$

$$\text{kontrola: } \sum M = 4(-15,45) + 2(-36,6) = -135\text{kNm} = M_3.$$

4. patro:  $M_4 = -189\text{kNm}$ ,  $\sum k = k_3 + k_4 + k_5 = 0,216 + 0,512 + 0,216 = 0,944$ ,

$$M_{41}^b = M_{41}^a = M_{43}^b = M_{43}^a = 0,5M_4 \frac{k_3}{\sum k} = 0,5(-189) \frac{0,216}{0,944} = -21,62\text{kNm},$$

$$M_{42}^b = M_{42}^a = 0,5M_4 \frac{k_4}{\sum k} = 0,5(-189) \frac{0,512}{0,944} = -51,26\text{kNm},$$

$$\text{kontrola: } \sum M = 4(-21,62) + 2(-51,26) = -189\text{kNm} = M_4.$$

5. patro:  $M_5 = -336 \text{ kNm}$ ,  $\sum k = k_3 + k_4 + k_3 = 0,162 + 0,384 + 0,162 = 0,708$ ,

$$M_{51}^b = M_{53}^b = 0,4M_5 \frac{k_5}{\sum k} = 0,4(-336) \frac{0,162}{0,708} = -30,75 \text{ kNm},$$

$$M_{51}^a = M_{53}^a = 0,6M_5 \frac{k_5}{\sum k} = 0,6(-336) \frac{0,162}{0,708} = -46,13 \text{ kNm},$$

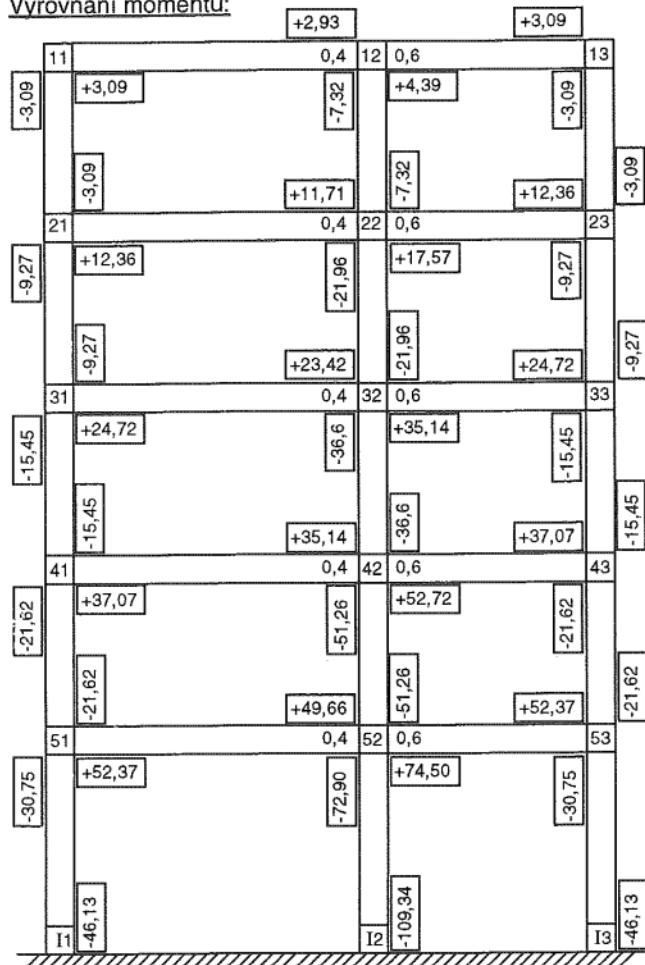
$$M_{52}^b = 0,4M_5 \frac{k_6}{\sum k} = 0,4(-336) \frac{0,384}{0,708} = -72,9 \text{ kNm},$$

$$M_{52}^a = 0,6M_5 \frac{k_6}{\sum k} = 0,6(-336) \frac{0,384}{0,708} = -109,34 \text{ kNm},$$

$$\text{kontrola: } \sum M = 2(-30,75) + 2(-46,13) + (-72,9) + (-109,34) = -336 \text{ kNm} = M_5.$$

Vypočtené ohybové momenty jsou výsledné ohybové momenty na sloupech. Nerovnováhy ve styčnících přenesou příčle, na které se nerovnováha rozdělí v poměru tuhostí příčí ve styčnících. V krajních styčnících celou nerovnováhu přenese příslušná příčle.

#### Vyrovnání momentů:



Rozdělovací součinitele (tuhosti příčí jsou ve všech patrech stejné):

$$\mu_1 = \frac{0,5}{0,5 + 0,75} = 0,4,$$

$$\mu_2 = \frac{0,75}{0,5 + 0,75} = 0,6.$$

Nerovnováhy ve styčnících (od momentů na sloupech):

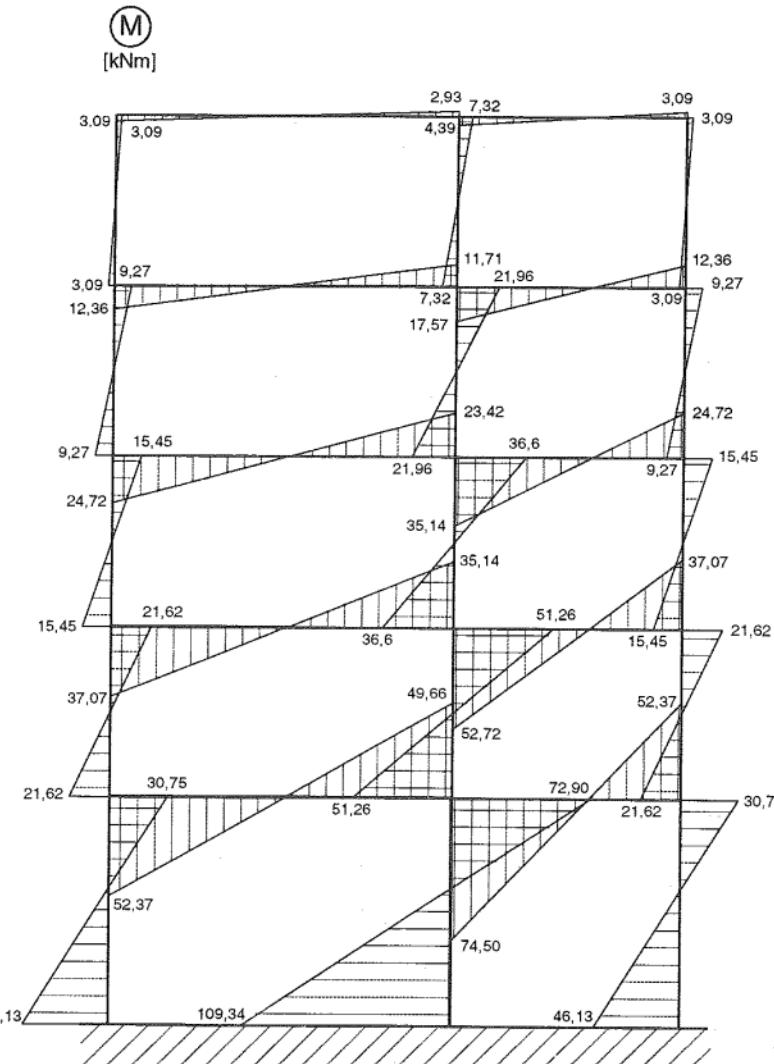
styčník 12:  
- 7,32 kNm,

styčník 22:  
- 21,96 - 7,32 =  
= -29,28 kNm,

styčník 32:  
- 36,6 - 21,96 =  
= -58,56 kNm,

styčník 42:  
- 51,26 - 36,6 =  
= -87,86 kNm,

styčník 52:  
- 72,9 - 51,26 =  
= -124,16 kNm.



Obr.6.6

Ohybové momenty směrem dolů narůstají rychle. Je zřejmé, že pokud by nás zajímal pouze extrémní hodnoty, stačí vypočítat pouze hodnoty ve spodním patře.

## NOSNÉ DESKY

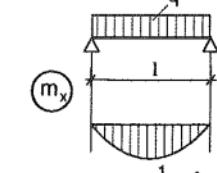
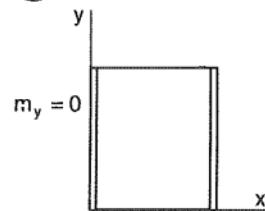
### PŘIBLIŽNÉ ŘEŠENÍ.

Nosnou deskou označujeme rovinnou konstrukci malé tloušťky zatíženou kolmo ke střednicové rovině.

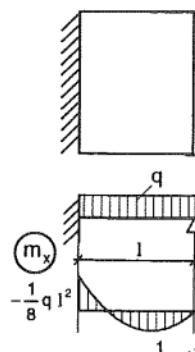
Vnitřní sily, uvažované na jednotku délky, nazýváme měrné ohybové momenty (měrné posouvající síly, kroutící momenty). Počítáme je v jednotkách kNm/m, Nm/m, MNm/m, ....

Uvedeme příklady pro přibližný výpočet několika typů obdélníkových desek zatížených spojitým rovnoměrným zatížením  $q$ .

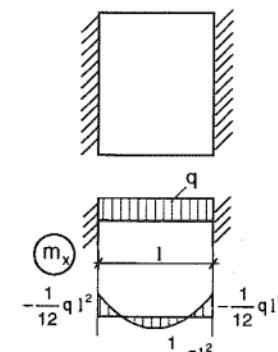
**(A) Obdélníková deska podepřená podél dvou rovnoběžných stran:**



Obr.7.1a



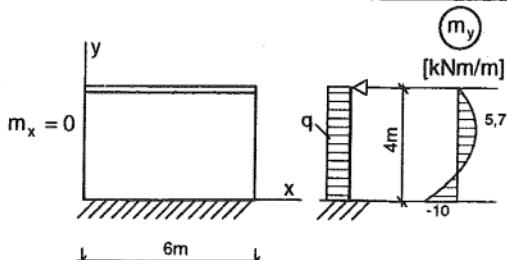
Obr.7.1b



Obr.7.1c

### Příklad 7.1

Stanovte hodnoty největších mezipodporových a podporových měrných momentů,  $q=5 \text{ kNm}^{-2}$  (obr.7.2).



Obr.7.2

#### Mezipodporový moment:

$$m_y = \frac{1}{14} q l^2 = \frac{1}{14} 5 \cdot 6^2 = 5,71 \text{ kNm/m.}$$

#### Podporový moment:

$$m_y = -\frac{1}{8} q l^2 = -\frac{1}{8} 5 \cdot 6^2 = -10 \text{ kNm/m.}$$

### Deska podepřená větším počtem rovnoběžných podpor – deska spojitá:

#### Největší mezipodporové měrné momenty:

$$\text{v krajním poli } \frac{1}{10} q l^2,$$

$$\text{v ostatních polích } \frac{1}{16} q l^2.$$

#### Největší podporové měrné momenty:

$$\text{v krajní podpoře } -\frac{1}{10} q l^2,$$

$$\text{v ostatních podporách } -\frac{1}{12} q l^2.$$

Nejsou-li stejná pole s obou stran podpory, uvažuje se aritmetický průměr délek s obou stran podpory.

Obr.7.3

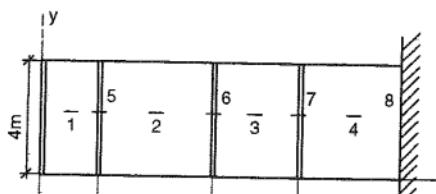
Poznámka:

Tyto přibližné hodnoty lze použít i u spojitého nosníku spojité rovnoměrně zatíženého.

### Příklad 7.2

Vypočtěte přibližnou hodnotu největších mezipodporových a podporových měrných momentů,  $q=6 \text{ kNm}^{-2}$  (obr.7.4).

$$m_y = 0$$



#### Mezipodporové momenty:

$$m_{x_1} = \frac{1}{10} q l_1^2 = \frac{1}{10} 6 \cdot 2^2 = 2,4 \text{ kNm/m,}$$

$$m_{x_2} = \frac{1}{16} q l_2^2 = \frac{1}{16} 6 \cdot 4^2 = 6 \text{ kNm/m,}$$

$$m_{x_3} = \frac{1}{16} q l_3^2 = \frac{1}{16} 6 \cdot 3^2 = 3,37 \text{ kNm/m,}$$

$$m_{x_4} = \frac{1}{16} q l_4^2 = \frac{1}{16} 6 \cdot 3,5^2 = 4,59 \text{ kNm/m.}$$

#### Podporové momenty:

$$m_{x_5} = -\frac{1}{10} q \left( \frac{l_1 + l_2}{2} \right) = -\frac{1}{10} 6 \cdot 3^2 = -5,4 \text{ kNm/m,}$$

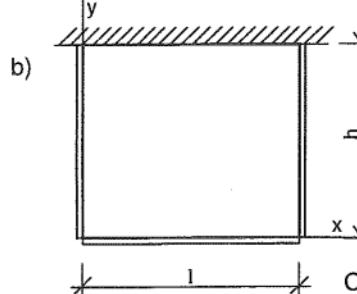
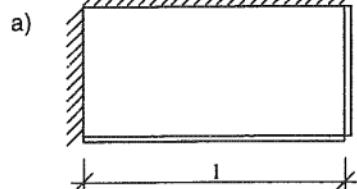
$$m_{x_6} = -\frac{1}{12} q \left( \frac{l_2 + l_3}{2} \right) = -\frac{1}{12} 6 \cdot 3,5^2 = -6,12 \text{ kNm/m,}$$

$$m_{x_7} = -\frac{1}{12} q \left( \frac{l_3 + l_4}{2} \right) = -\frac{1}{12} 6 \cdot 3,25^2 = -5,28 \text{ kNm/m,}$$

$$m_{x_8} = -\frac{1}{12} q l_4^2 = -\frac{1}{12} 6 \cdot 3,5^2 = -6,12 \text{ kNm/m.}$$

Obr.7.4

### C) Obdélníková deska podepřená podél všech stran



Desky, jejichž délka delší strany je větší než dvojnásobek délky kratší strany, počítáme jako desky podepřené podél delších stran (viz A).

Obr.7.5

Pro desky čtvercové nebo obdélníkové, u nichž délka delší strany je maximálně dvojnásobek kratší strany, zatížení  $q$  rozdělíme na:

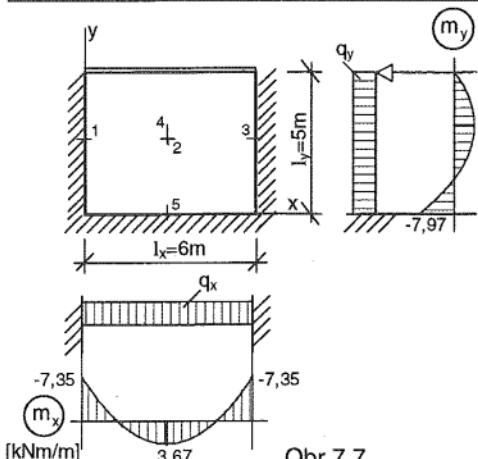
- zatížení  $q_x$  připadající na směr  $x$ ,
- zatížení  $q_y$  připadající na směr  $y$ .

Rozdělení zatížení je pro různě uložené desky uvedeno v TABULCE 3 tohoto skripta nebo ve skriptu doc. Muka Statika II.

Obr.7.6

### Příklad 7.3

Na dané obdélníkové desce vypočtěte extrémní mezipodporové a podporové měrné momenty (obr.7.7),  $q=5\text{kNm}^{-2}$ .



Obr.7.7

Zatížení  $q$  rozdělíme na zatížení  $q_x$  a  $q_y$  podle TABULKY 3 (6. řádek):

$$q_x = q \frac{2l_y^4}{l_x^4 + 2l_y^4} = 5 \cdot \frac{2.5^4}{6^4 + 2.5^4} = 2,45\text{kNm}^{-2},$$

$$q_y = q \frac{l_y^4}{l_x^4 + 2l_y^4} = 5 \cdot \frac{6^4}{6^4 + 2.5^4} = 2,55\text{kNm}^{-2}.$$

Kontrola:

$$q_x + q_y = 2,45 + 2,55 = 5\text{kNm}^{-2} = q.$$

Mezipodporové momenty (viz A):

$$m_{y_4} = \frac{1}{14} q_y l_y^2 = \frac{1}{14} \cdot 2,55 \cdot 5^2 = 4,55\text{kNm/m}.$$

$$m_{x_2} = \frac{1}{24} q_x l_x^2 = \frac{1}{24} \cdot 2,45 \cdot 6^2 = 3,67\text{kNm/m},$$

Podporové momenty:

$$m_{y_5} = -\frac{1}{8} q_y l_y^2 = -\frac{1}{8} \cdot 2,55 \cdot 5^2 = -7,97\text{kNm/m},$$

$$m_{x_1} = m_{x_3} = -\frac{1}{12} q_x l_x^2 = -\frac{1}{12} \cdot 2,45 \cdot 6^2 = -7,35\text{kNm/m}.$$

Poznámka:

Podporové a mezipodporové momenty pro směry  $x$  a  $y$  určíme podobně jako u typu A, viz obr.7.1.

TABULKA 3

podepření	zatížení	
	$q_x$	$q_y$
	$q \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4}$	$q \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4}$
	$q \frac{5l_y^4}{2l_x^4 + 5l_y^4}$	$q \frac{2l_x^4}{2l_x^4 + 5l_y^4}$
	$q \frac{5l_y^4}{l_x^4 + 5l_y^4}$	$q \frac{l_x^4}{l_x^4 + 5l_y^4}$
	$q \frac{2l_y^4}{5l_x^4 + 2l_y^4}$	$q \frac{5l_x^4}{5l_x^4 + 2l_y^4}$
	$q \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4}$	$q \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4}$
	$q \frac{2l_y^4}{l_x^4 + 2l_y^4}$	$q \frac{l_x^4}{l_x^4 + 2l_y^4}$
	$q \frac{l_y^4}{5l_x^4 + l_y^4}$	$q \frac{5l_x^4}{5l_x^4 + l_y^4}$
	$q \frac{l_y^4}{2l_x^4 + l_y^4}$	$q \frac{2l_x^4}{2l_x^4 + l_y^4}$
	$q \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4}$	$q \frac{l_x^4}{l_x^4 + l_y^4}$

Literatura

- Jiří Muk: Statika I  
Skriptum ČVUT Praha, 1998
- Jiří Muk: Statika II  
Skriptum ČVUT Praha, 2001
- Radmila Vondrová: Statika I, příklady  
Skriptum ČVUT Praha, 2004
- Hořejší, Šafka: Statické tabulky TP51  
SNTL Praha, 1987
- Petrýl, Vondrová: Stavební mechanika, příručka základů stavební mechaniky  
a pružnosti  
Skriptum ČVUT Praha, 1985
- Šejnoha, Bittnarová: Pružnost a pevnost 10  
Skriptum ČVUT Praha, 1996
- Jiřina Janatková: Stavební mechanika I  
Skriptum ČVUT Praha, 1992
- Lorenc, Holický,  
Marková, Juranka: Nosné konstrukce 1  
Skriptum ČVUT Praha, 2005



Ing. Radmila Vondrová, CSc.

## STATIKA II

### Příklady

Vydalo České vysoké učení technické v Praze

Vydavatelství ČVUT, Thákurova 1, 160 41 Praha 6,

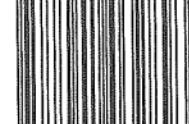
v srpnu 2005 jako svou 10649. publikaci.

Vytisklo Vydavatelství ČVUT – výroba, Zikova 4, 166 36 Praha 6.

120 stran, 164 obrázky.

Vydání první. Náklad 500 výtisků. Rozsah 11,27 AA, 11,60 VA.

ISBN 80-01-03289-2



9 788001 032893

Kč 153,-