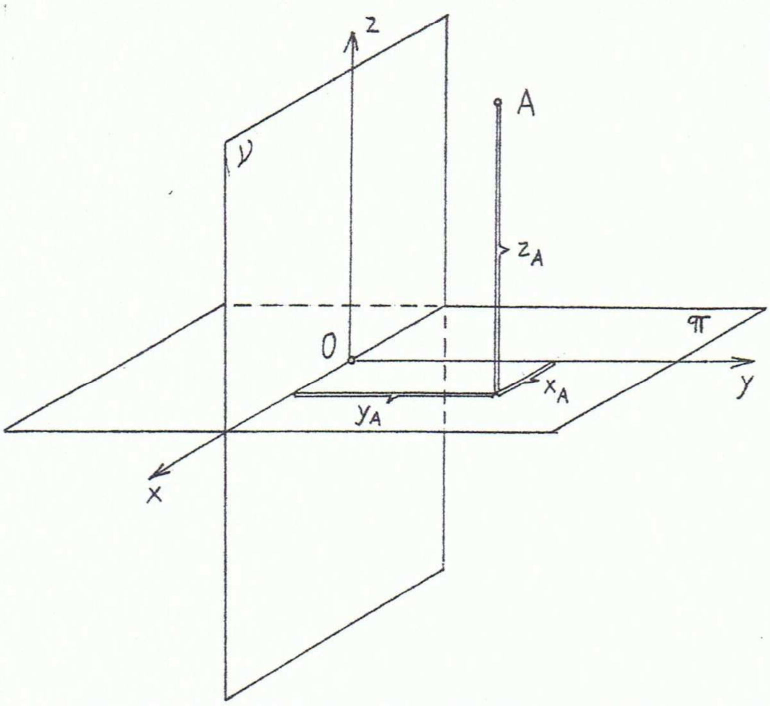
MONGEOVO PROMÍTÁNÍ (MP)



$\pi \perp \nu$

π - půdorysna (první průmětna)

ν - nárysna (druhá průmětna)

$(0, x, y, z)$ pravotočivá kartézská soustava souřadnic

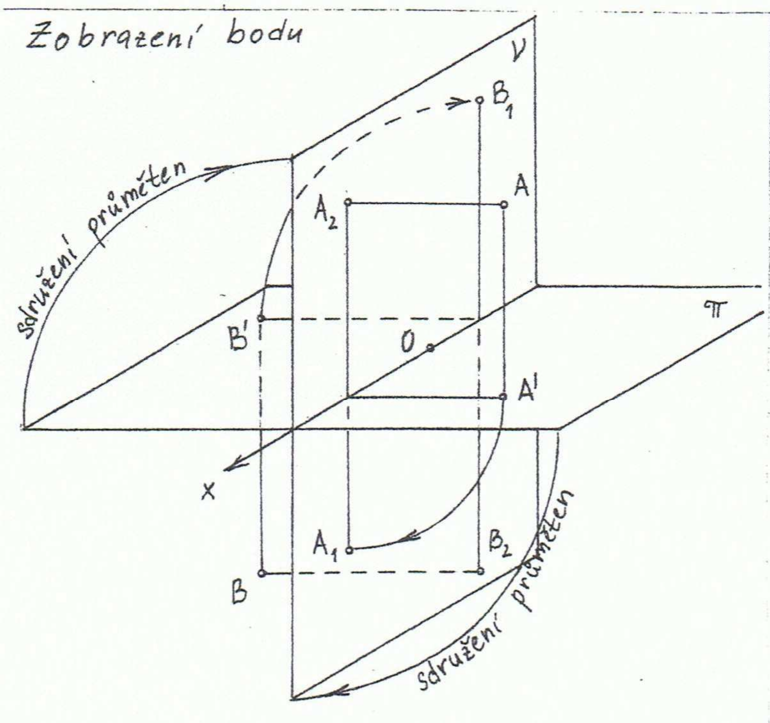
$x = \pi \cap \nu$ - základnice

$A = [x_A, y_A, z_A]$ souřadnice bodu A

$\pi = (x, y)$

$\nu = (x, z)$

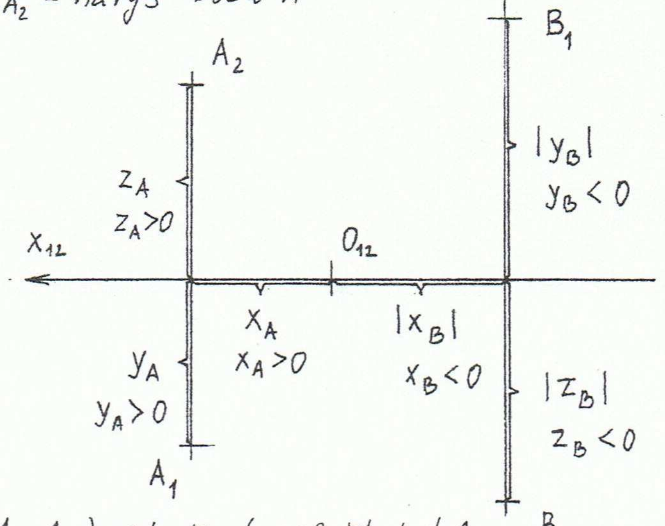
Zobrazení bodu



po sdružení průmětem :

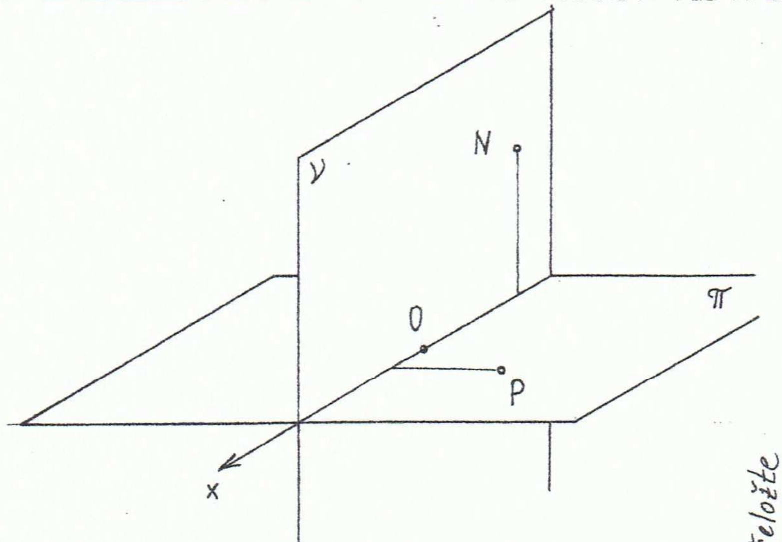
A_1 - půdorys bodu A

A_2 - nárys bodu A



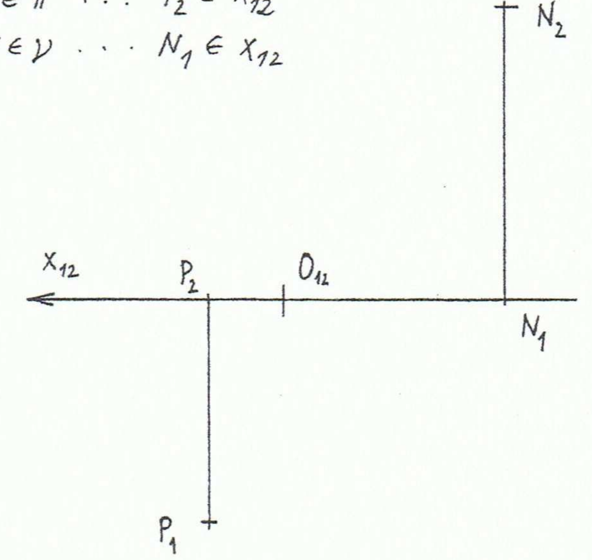
(A_1, A_2) - sdružené průměty bodu A

$A_1A_2 \perp x_{12}$, A_1A_2 tzv. ordinála



$P \in \pi$ ... $P_2 \in x_{12}$

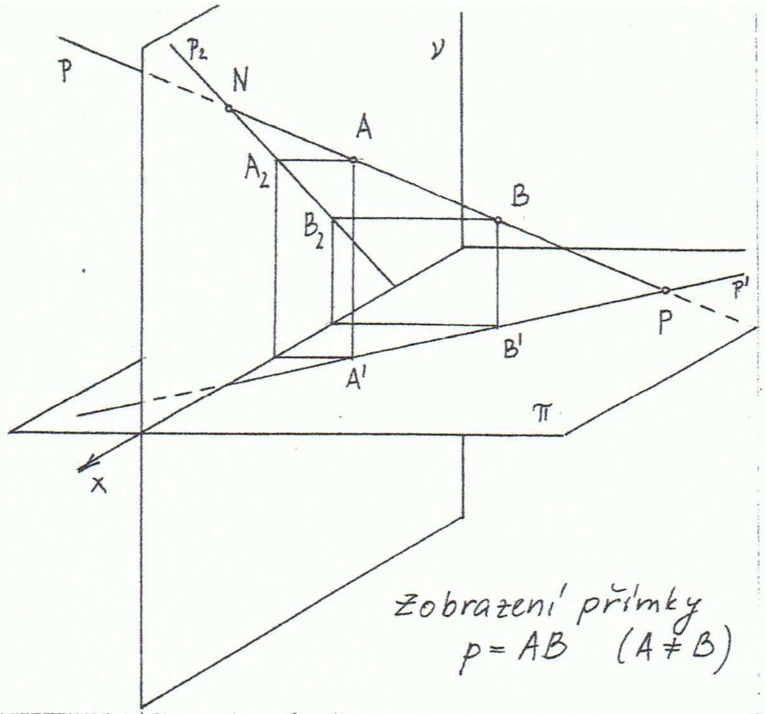
$N \in \nu$ ... $N_1 \in x_{12}$



$P = [1, 3, 0]$ $z_P = 0$ ... $P \in \pi$

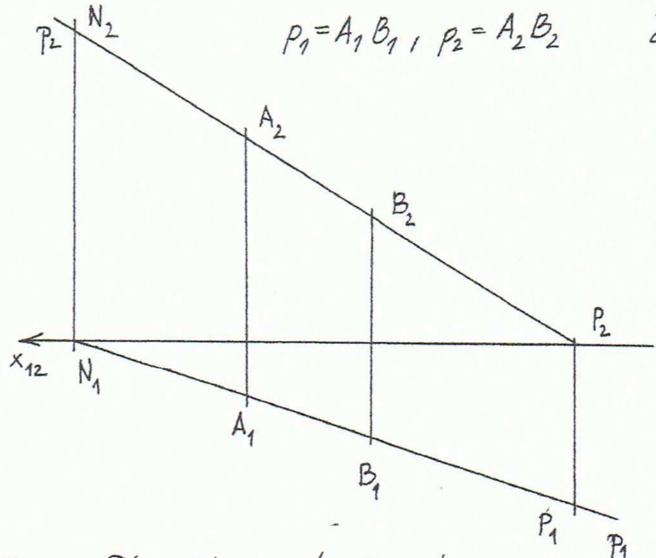
$N = [-3, 0, 4]$ $y_P = 0$ ... $N \in \nu$

zde přeložte



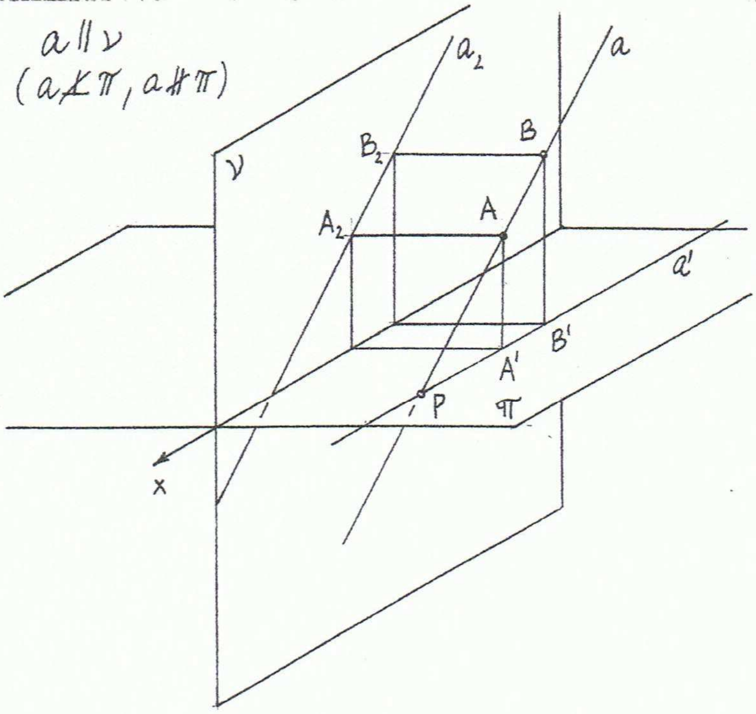
zobrazení přímky
$p = AB \quad (A \neq B)$

$p_1 = A_1B_1\,,\; p_2 = A_2B_2$

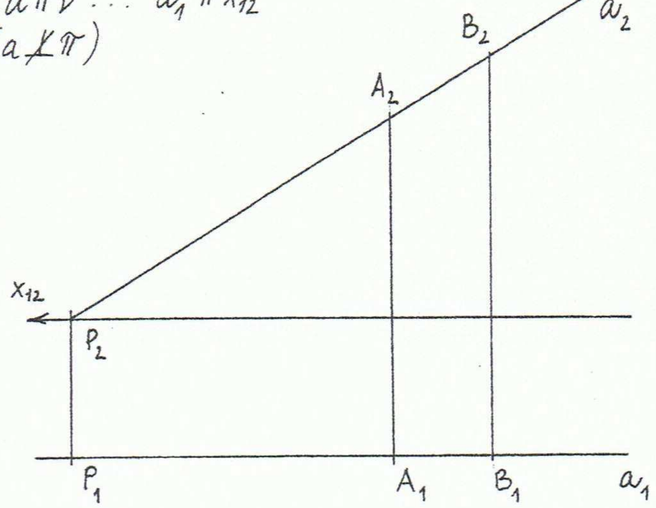


$P = p \cap \pi$ půdorysný stopník přímky p
$N = p \cap \nu$ nárysný stopník přímky p

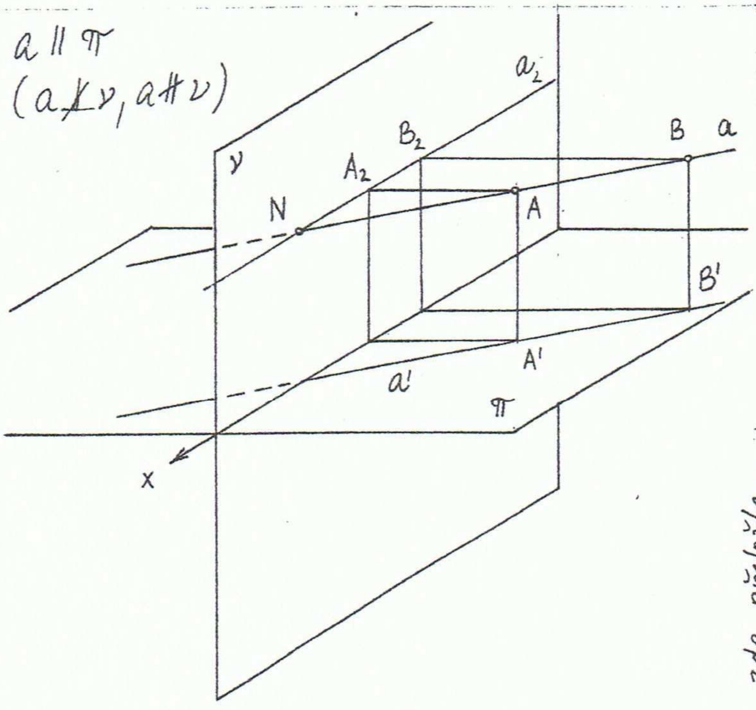
$a \parallel \nu$
$(a \not\subset \pi,\ a \nparallel \pi)$



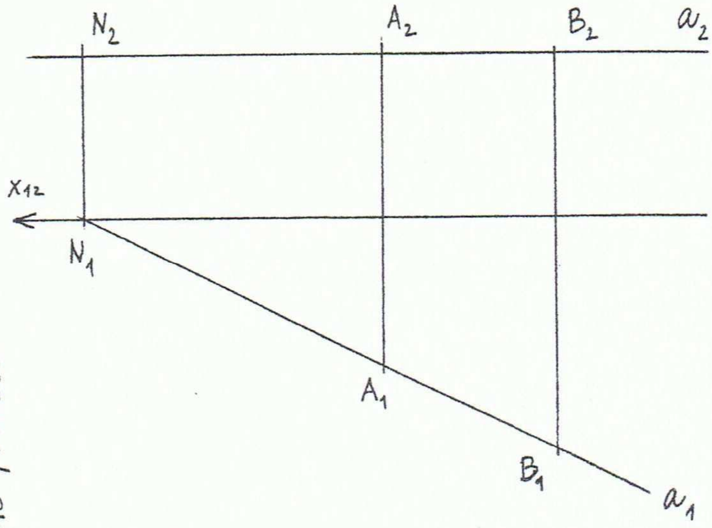
$a \parallel \nu \ \ldots \ a_1 \parallel x_{12}$
$(a \not\subset \pi)$



$a \parallel \pi$
$(a \not\subset \nu,\ a \nparallel \nu)$

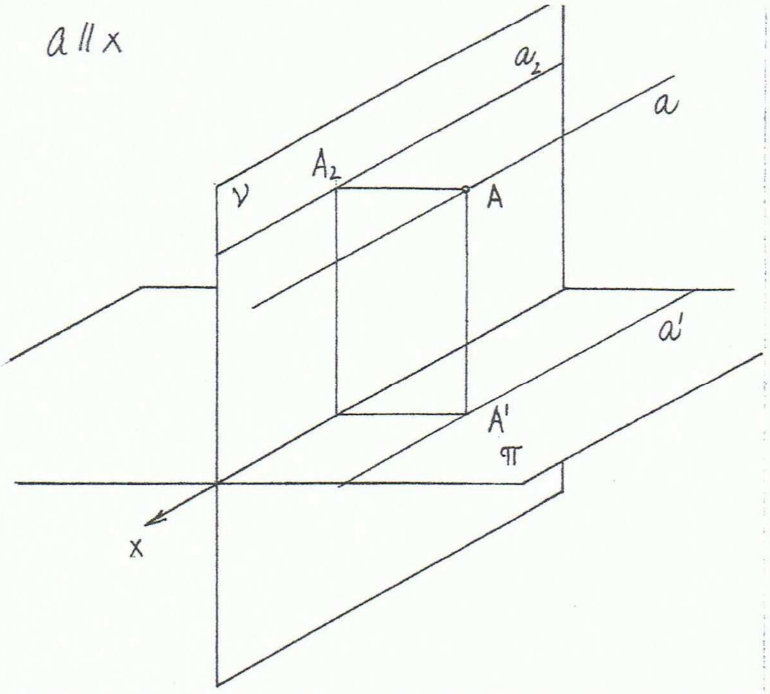


$a \parallel \pi \ \ldots \ a_2 \parallel x_{12}$
$(a \not\subset \nu)$

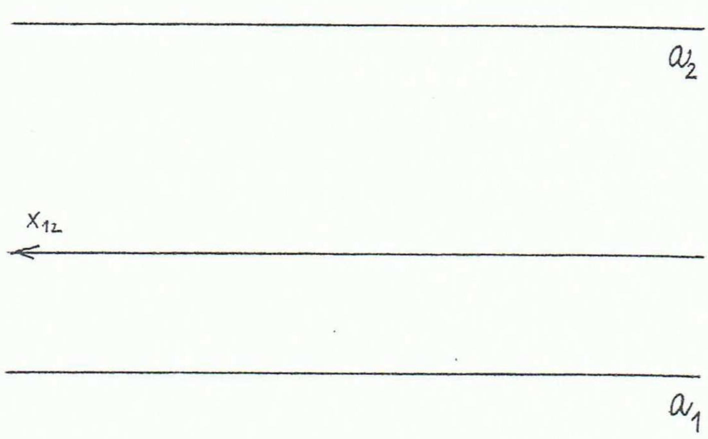


zde přeložte

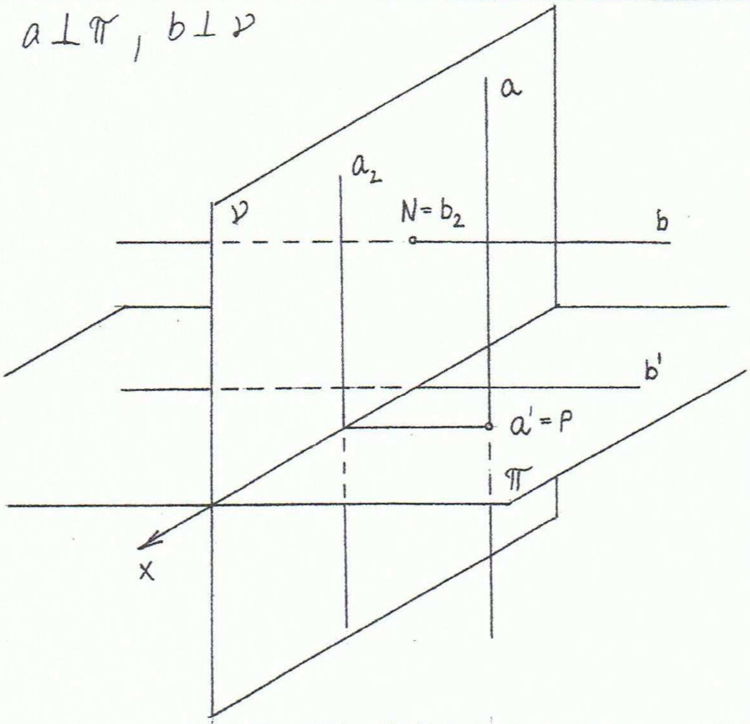
$a \parallel x$

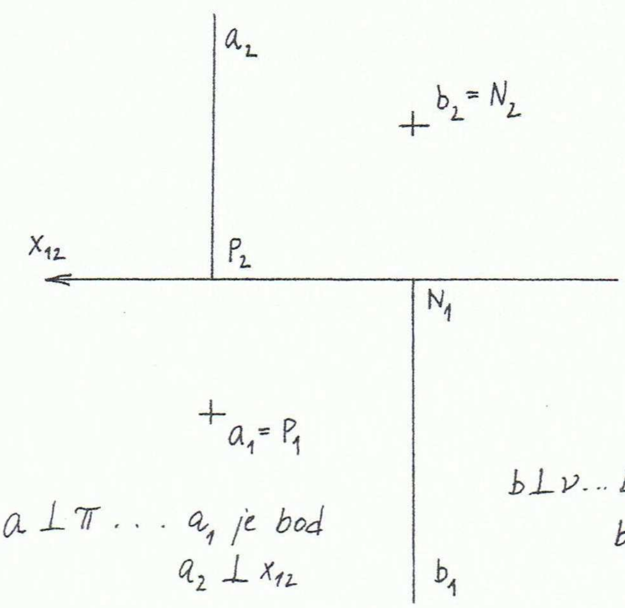


$a \parallel x \; \ldots \; a_1 \parallel a_2 \parallel x_{12}$



$a \perp \pi$, $b \perp \nu$



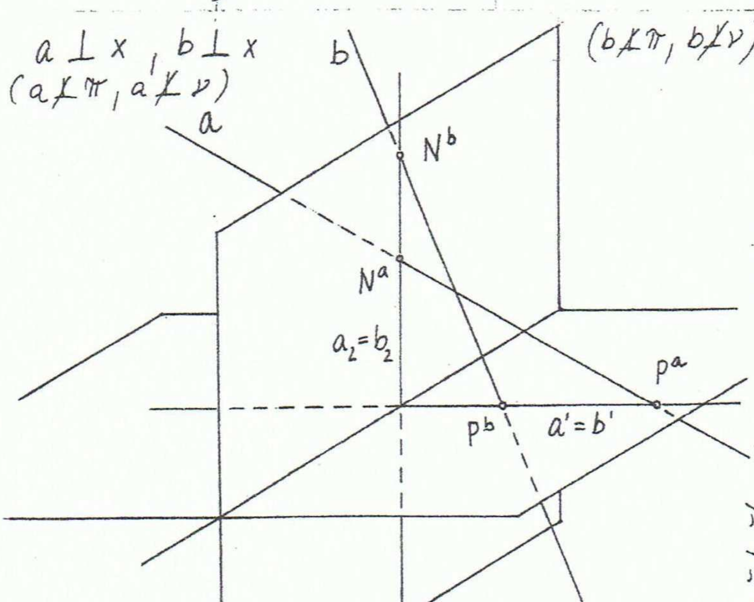


$a \perp \pi \; \ldots \; a_1$ je bod
$a_2 \perp x_{12}$

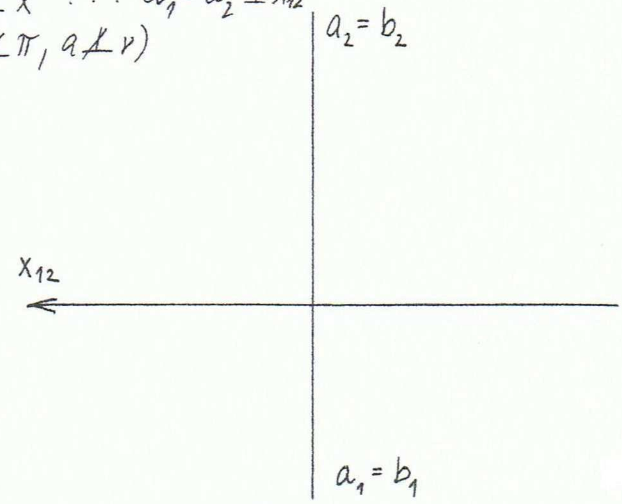
$b \perp \nu \ldots \; b_2$ je bod
$b_1 \perp x_{12}$

$a \perp x$, $b \perp x$
$(a \nparallel \pi, a \nparallel \nu)$

$(b \nparallel \pi, b \nparallel \nu)$



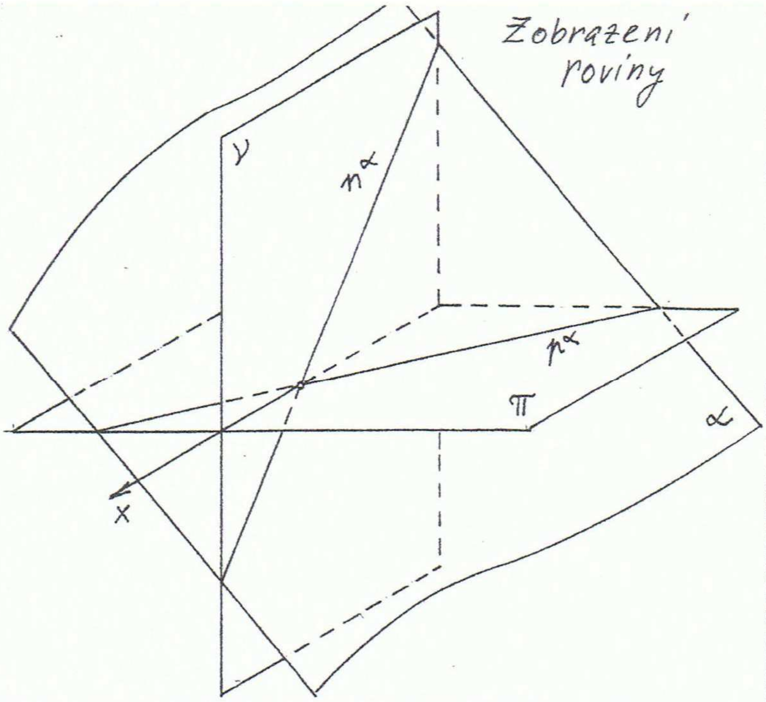
$a \perp x \; \ldots \; a_1 = a_2 \perp x_{12}$
$(a \nparallel \pi, a \nparallel \nu)$



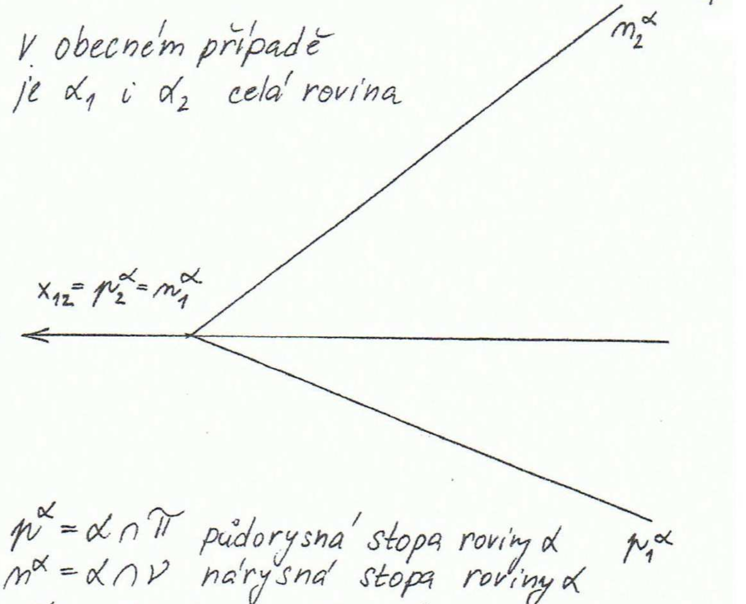
zde přeložte

přímka $a \perp x$ $(a \nparallel \pi, a \nparallel \nu)$ není sdruženými průměty a_1, a_2 určena jednoznačně musí se zadat sdružené průměty dvou různých bodů přímky

Zobrazení roviny



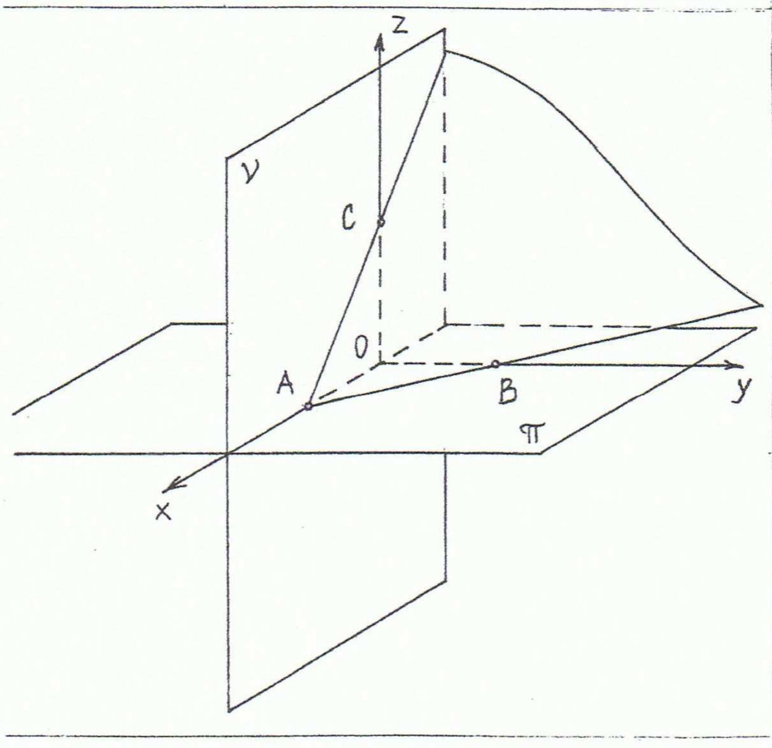
V obecném případě je α_1 i α_2 celá rovina



$p^\alpha = \alpha \cap \pi$ půdorysná stopa roviny α

$n^\alpha = \alpha \cap \nu$ nárysná stopa roviny α

$p^\alpha \cap n^\alpha \neq \emptyset \Rightarrow p^\alpha \cap n^\alpha \in x$



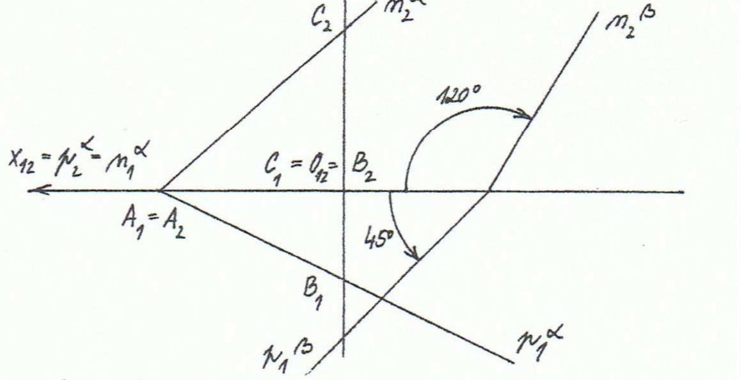
rovinu obvykle zadáváme (pokud je to možné) třemi body a to jejími průsečíky s osami x, y, z

$A = x \cap \alpha$, $A = [a, 0, 0]$

$B = y \cap \alpha$, $B = [0, b, 0]$

$C = z \cap \alpha$, $C = [0, 0, c]$

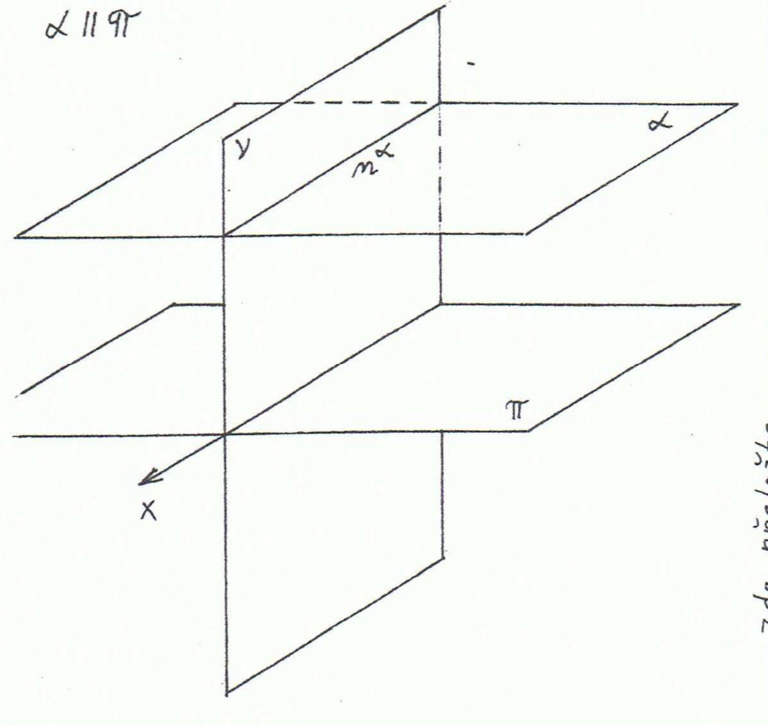
pro rovinu $\alpha = (A, B, C)$ používáme zápis $\alpha = (a, b, c)$



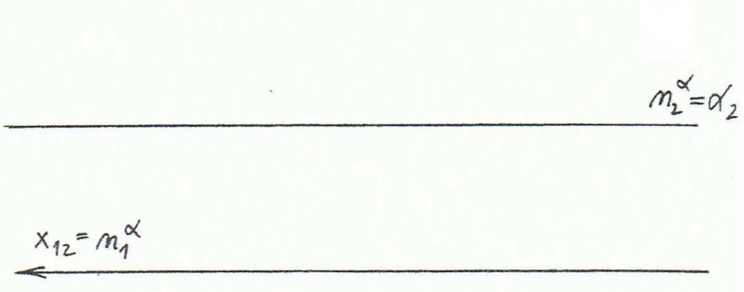
jiné zadání roviny: $\beta = (-2, 45°, 120°)$

- zadáváme orientované úhly, viz obr.

$\alpha \parallel \pi$



$\alpha = (\infty, \infty, 2)$

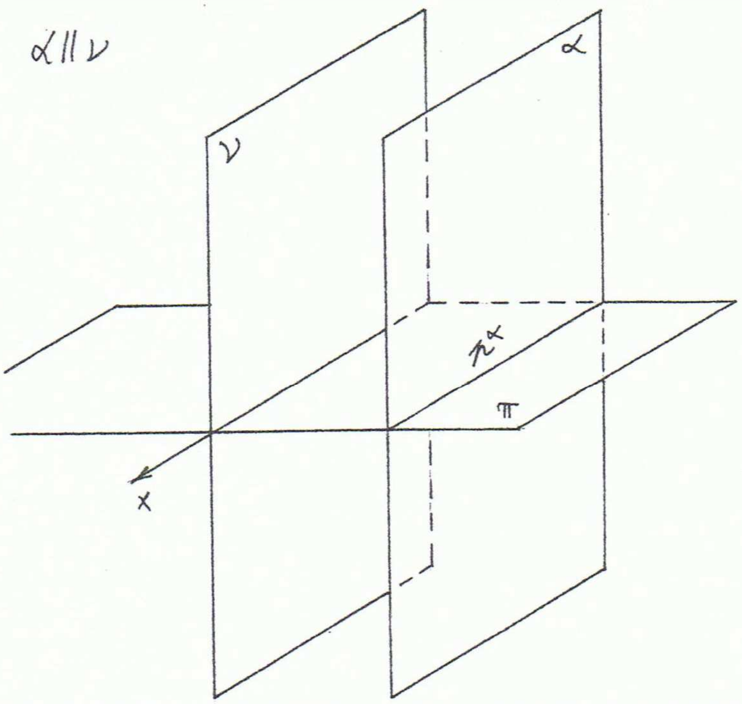


zde přeložte

α_1 je celá rovina

α_2 je přímka

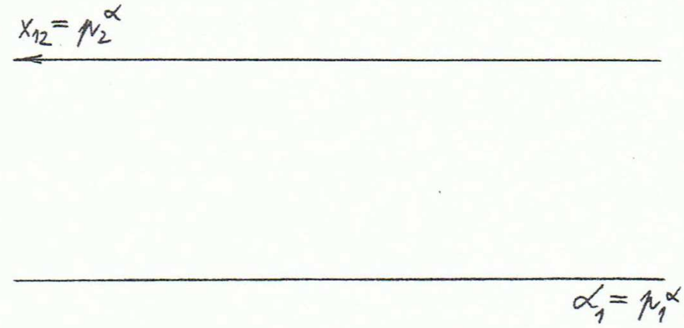
$\alpha \parallel \nu$



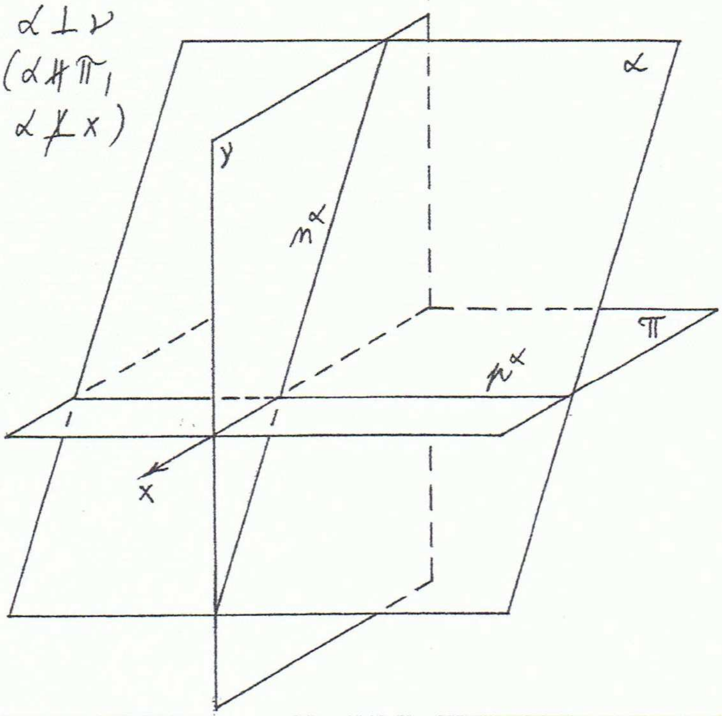
$\alpha = (\infty, 3, \infty)$

α_1 je přímka

α_2 je celá rovina



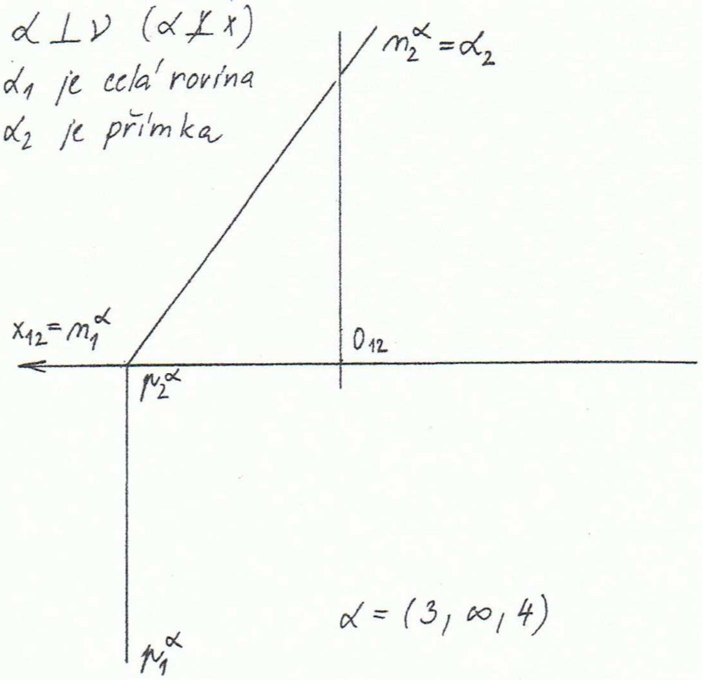
$\alpha \perp \nu$
($\alpha \nparallel \pi_1$,
$\alpha \not\perp x$)



$\alpha \perp \nu$ ($\alpha \not\perp x$)

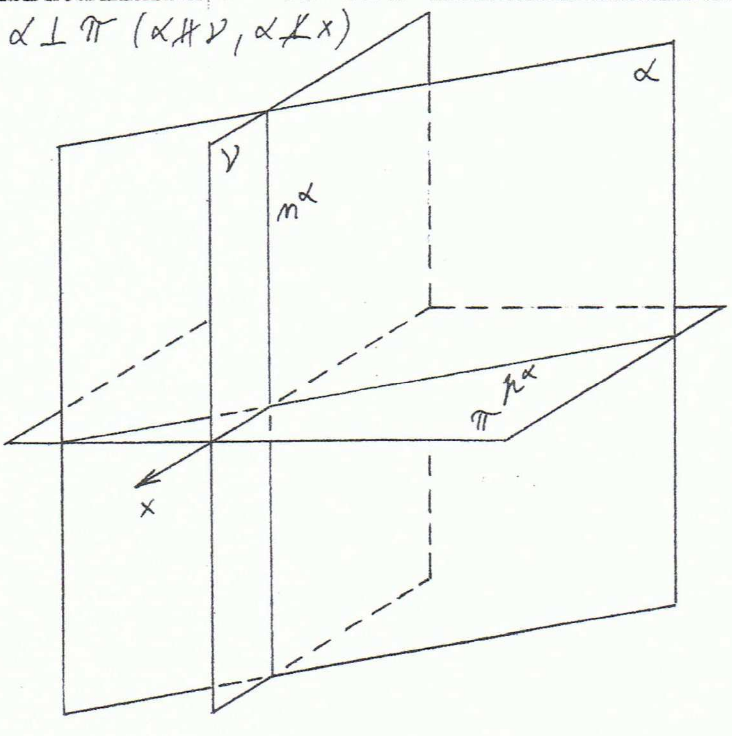
α_1 je celá rovina

α_2 je přímka



$\alpha = (3, \infty, 4)$

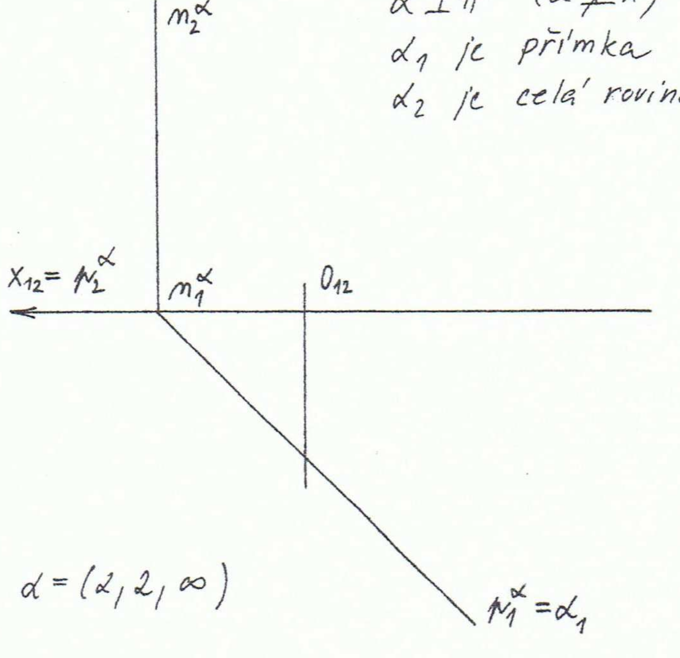
$\alpha \perp \pi$ ($\alpha \nparallel \nu$, $\alpha \not\perp x$)



$\alpha \perp \pi$ ($\alpha \not\perp x$)

α_1 je přímka

α_2 je celá rovina

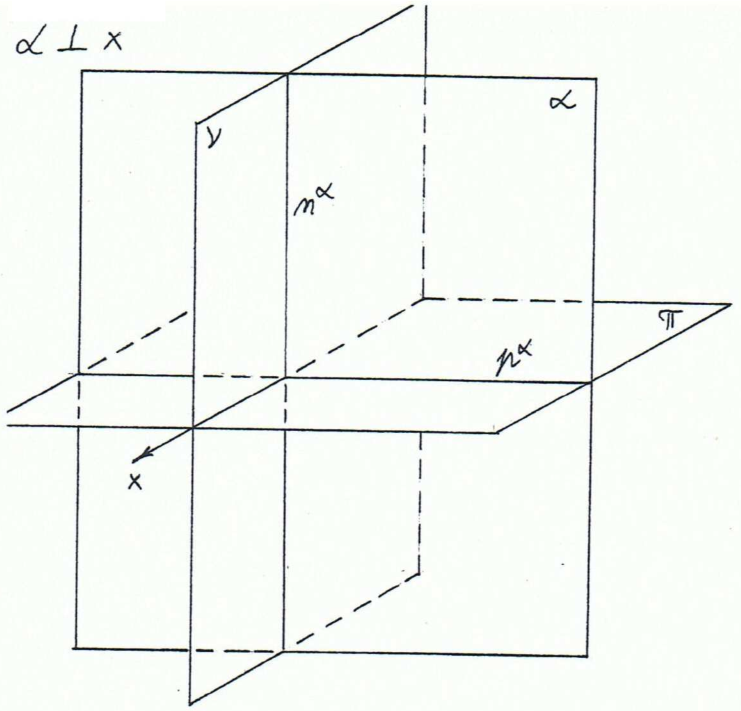


$\alpha = (2, 2, \infty)$

zde přeložte

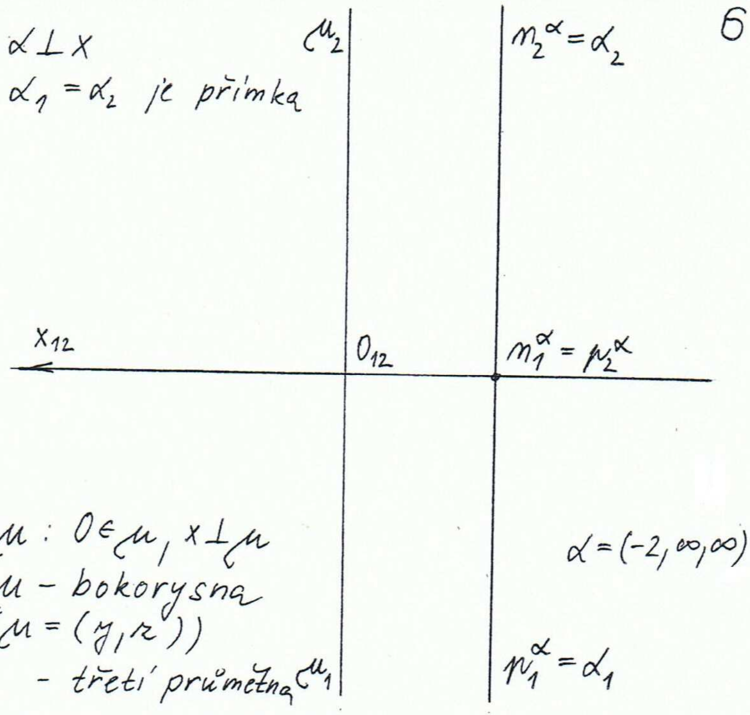
6

$\alpha \perp x$



$\alpha \perp x$

$\alpha_1 = \alpha_2$ je přímka



$\mu: O \in \mu,\ x \perp \mu$

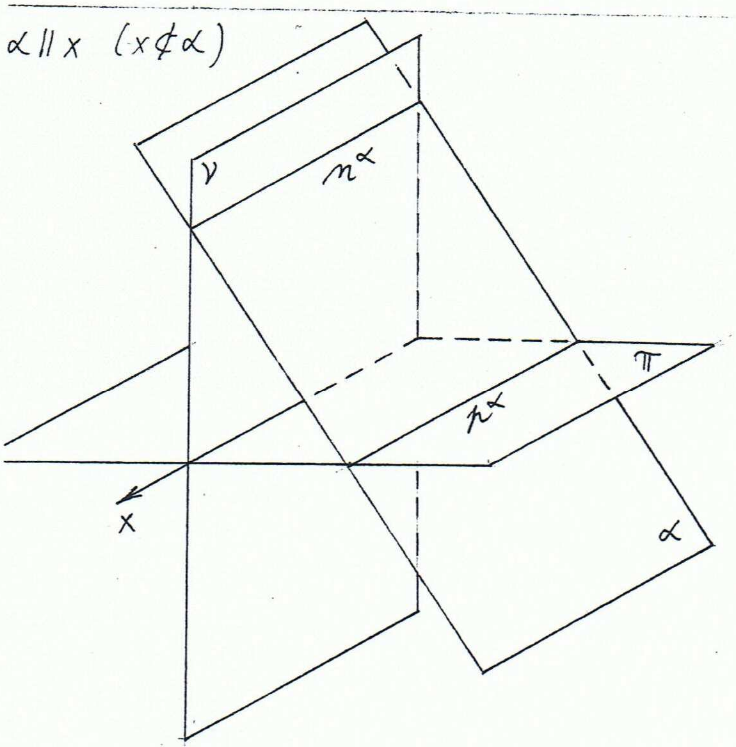
μ - bokorysna

$(\mu = (y, z))$

- třetí průmětna

$\alpha = (-2, \infty, \infty)$

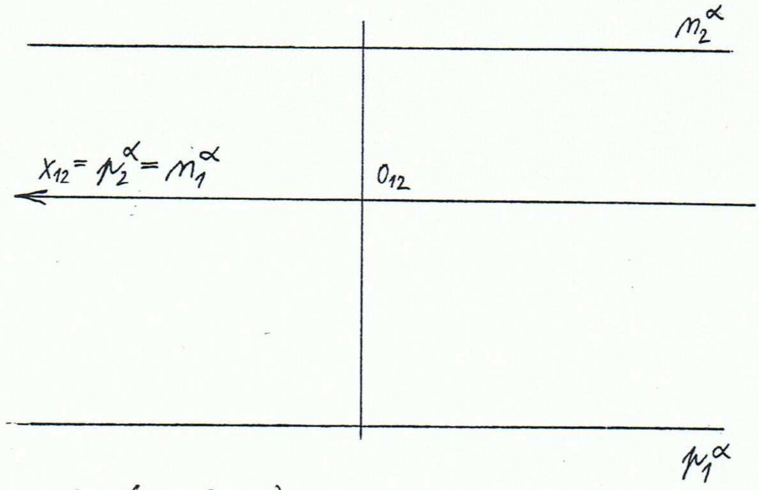
$\alpha \parallel x \quad (x \notin \alpha)$



$\alpha \parallel x$ $\quad \alpha_1$ je celá rovina

α_2 je celá rovina

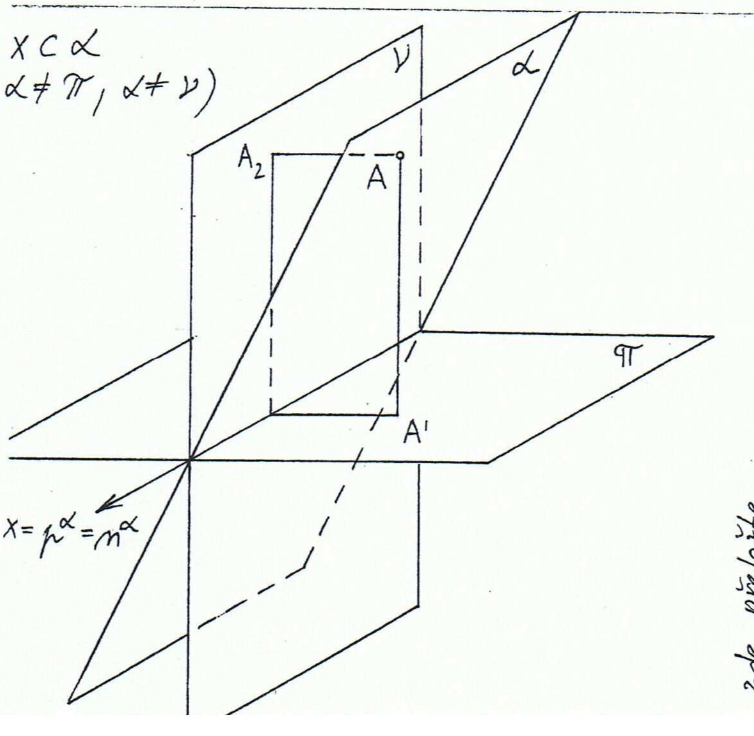
$n^\alpha \parallel p^\alpha \parallel x$



$\alpha = (\infty, 3, 2)$

$x \subset \alpha$

$\alpha \neq \pi,\ \alpha \neq \nu)$



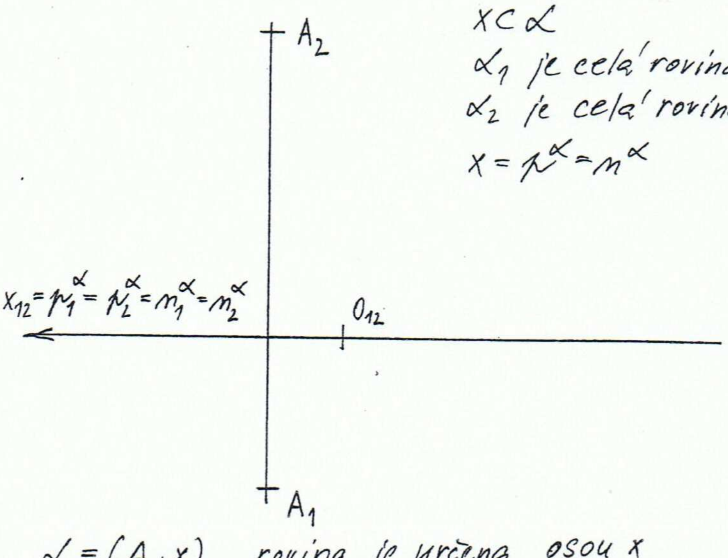
zde přeložte

$x \subset \alpha$

α_1 je celá rovina

α_2 je celá rovina

$x = p^\alpha = n^\alpha$

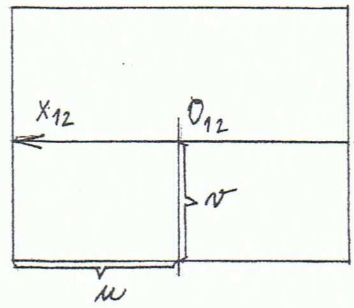


$\alpha = (A, x)$ rovina je určena osou x a bodem A $(A \notin x)$

$A = [1, 2, 4]$

PŘÍKLADY I

Formát: A5 na šířku (nepoužívejte nedostupné body, tj. body mimo uvedený formát).
Umístění počátku $O[u, v]$:



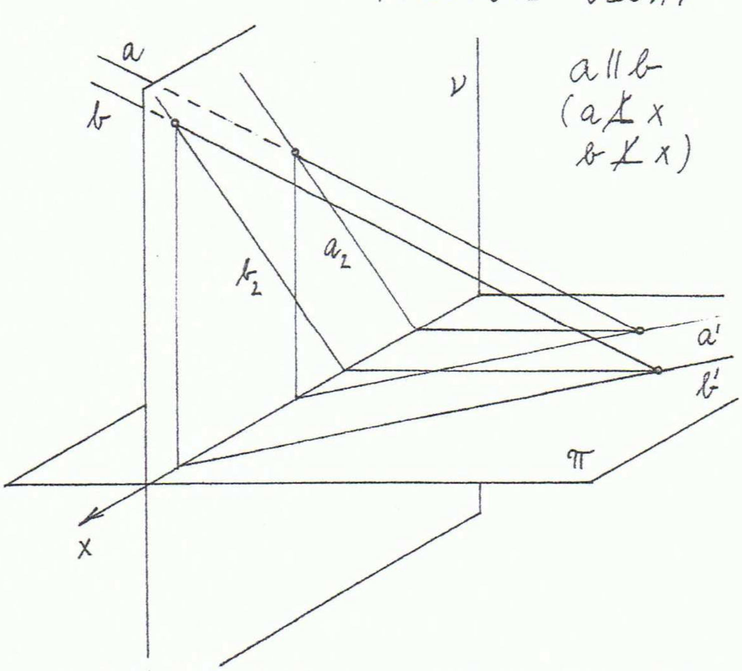
1. MP: O [10.5, 7.5]
   Zobrazte stopníky přímky $a = AB$.
   a) A [−3, 1, 4], B [3, 3, 1.5],
   b) A [4, 2, 3], B [−4, −1, −5].
2. MP: O [10.5, 7.5]
   Je dána přímka $a = AB$, A [−2, 2, 7], B [4, 4, 2]. Sestrojte sdružené průměty bodů C, D, E přímky a, C [1, ?, ?], D [?, 3.5, ?], E [?, ?, −1].
3. MP: O [10.5, 7.5]
   Jsou dány body A [−2, 4, 5], B [4, 2, 6]. Sestrojte sdružené průměty přímek a, b : $A \in a$, $a \perp \pi$, $B \in b$, $b \perp \nu$.
4. MP: O [10.5, 7.5]
   Sestrojte sdružené průměty přímky $a = AB$, $a \parallel \pi$, A [−3, 4, 2], B [3, 1, ?]. Zobrazte stopníky přímky a.
5. MP: O [10.5, 7.5]
   Zobrazte stopy roviny α.
   a) $\alpha = (-2,\ 4,\ -1)$,
   b) $\alpha = (3,\ 5,\ \infty)$,
   c) $\alpha = (\infty,\ -1,\ -5)$,
   d) $\alpha = (0,\ 30°,\ 120°)$,
   e) $\alpha = (-3,\ 120°,\ 60°)$.
6. MP: O [10.5, 7.5]
   Zobrazte stopy roviny $\alpha = (A,\ B,\ C)$, A [3, 3.5, 3.5], B [1, 1, 4.5], C [0, 2.5, 2].
7. MP: O [10.5, 8.5]
   Zobrazte stopy roviny $\alpha = (A,\ B,\ C)$, A [7, 3, 1], B [0, 1.5, 6], C [−6, 6, 3].

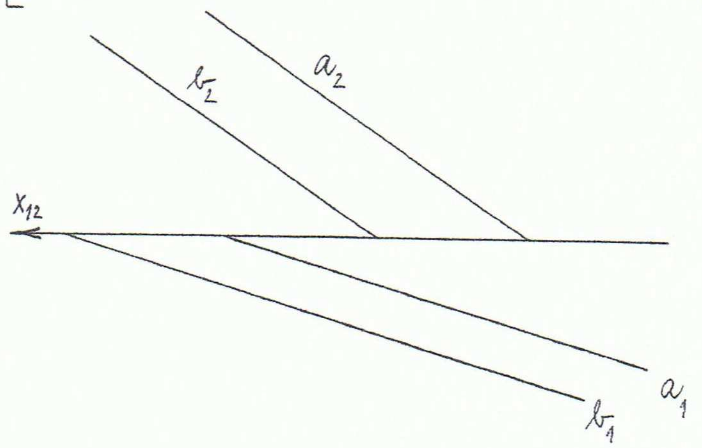
POLOHOVÉ ÚLOHY

vzájemná poloha bodů, přímek a rovin

[dva body: $A = B \Leftrightarrow (A_1 = B_1 \wedge A_2 = B_2)$
bod a přímka: $A \in a \Leftrightarrow (A_1 \in a_1 \wedge A_2 \in a_2)$]

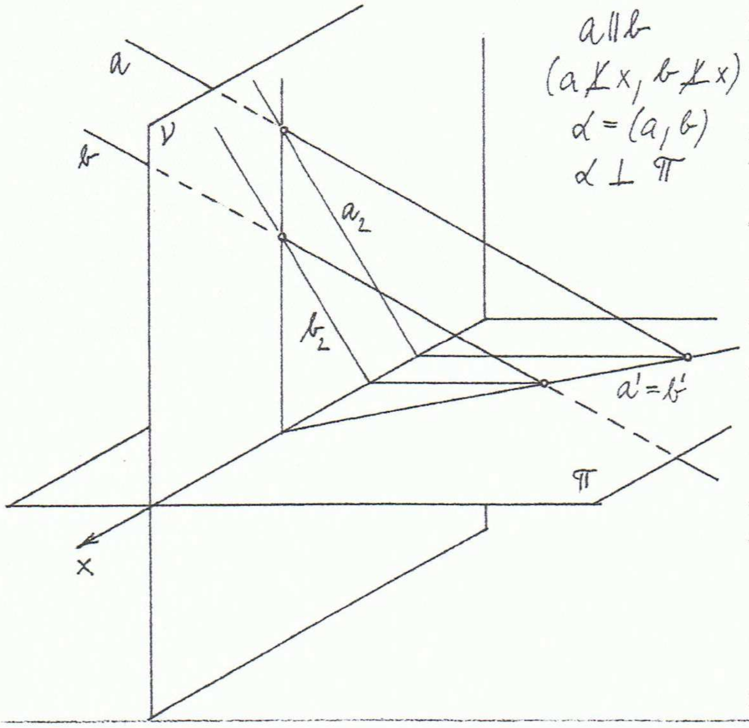
$a \parallel b$
$(a \not\perp x$
$b \not\perp x)$



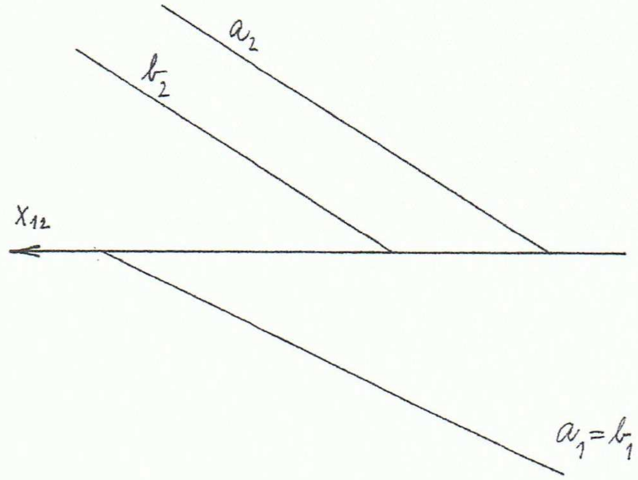


$a \parallel b \Leftrightarrow (a_1 \parallel b_1 \wedge a_2 \parallel b_2)$
$(a \not\perp x,\ b \not\perp x)$

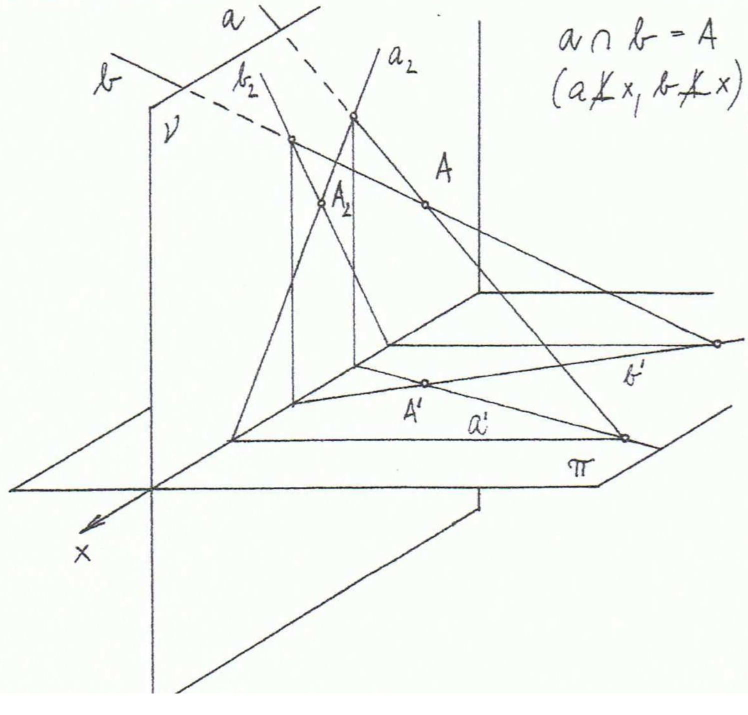
$a \parallel b$
$(a \not\perp x,\ b \not\perp x)$
$\alpha = (a, b)$
$\alpha \perp \pi$



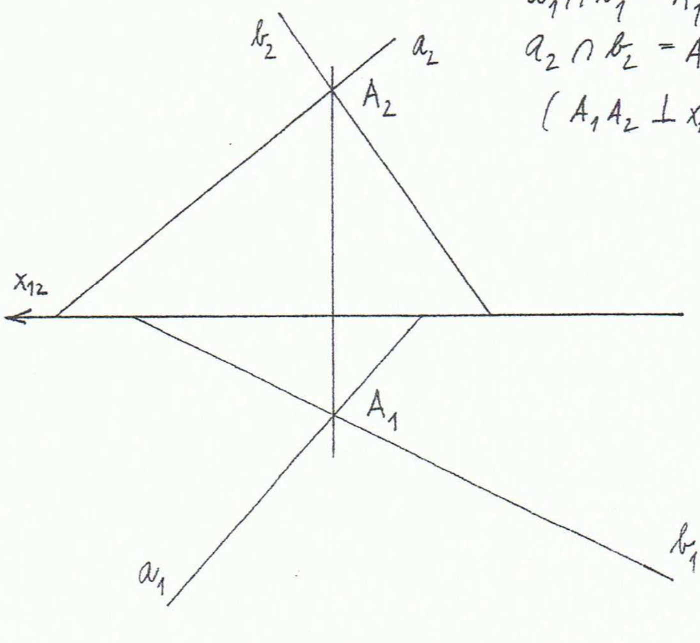
půdorysy (resp. nárysy) rovnoběžných přímek mohou splynout



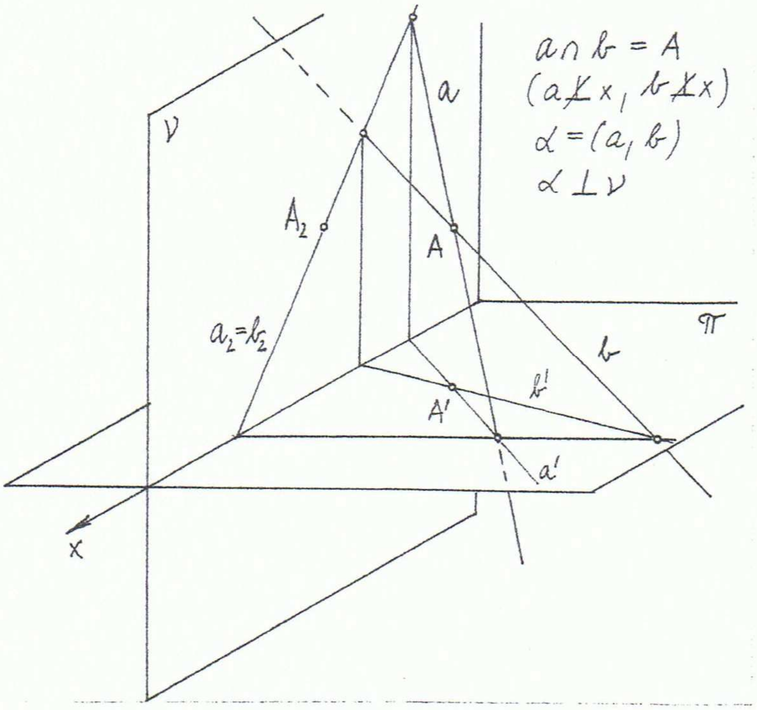
$a \cap b = A$
$(a \not\perp x,\ b \not\perp x)$



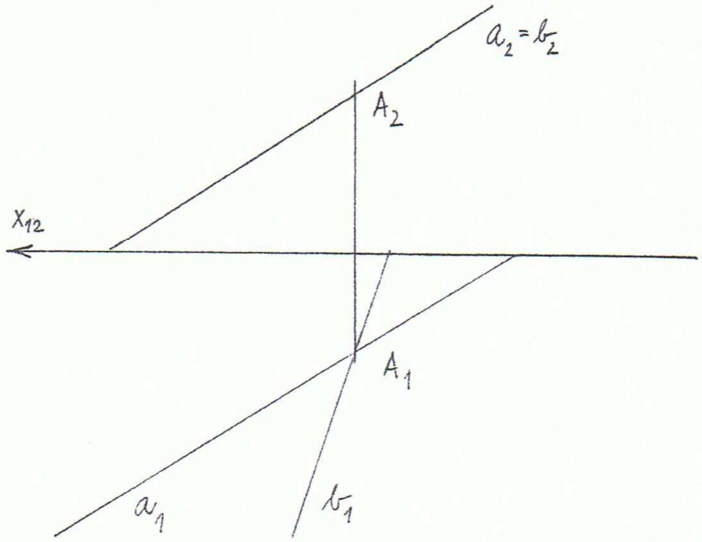
$a_1 \cap b_1 = A_1$
$a_2 \cap b_2 = A_2$
$(A_1 A_2 \perp x_{12})$



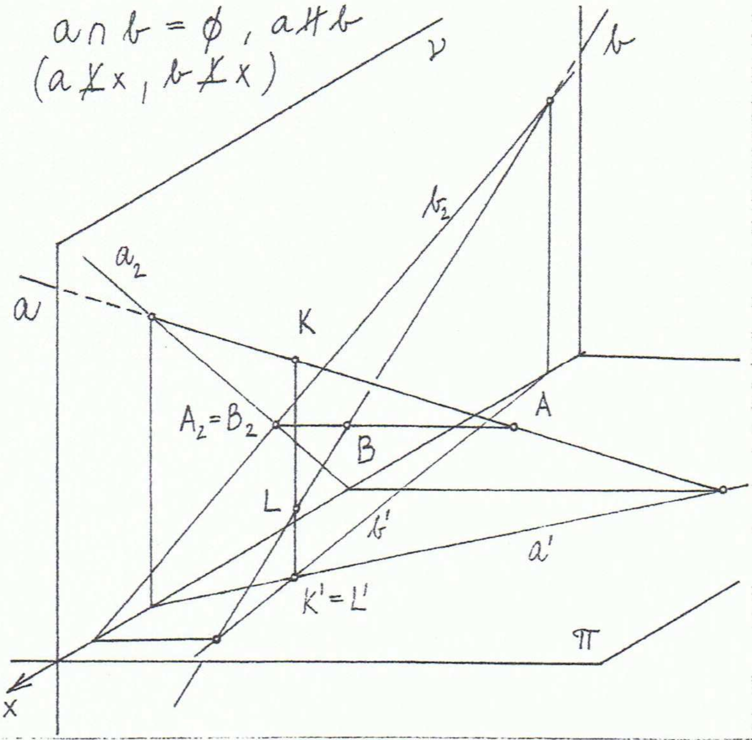
$a \cap b = A$
$(a \nparallel x,\ b \nparallel x)$
$\alpha = (a, b)$
$\alpha \perp \nu$

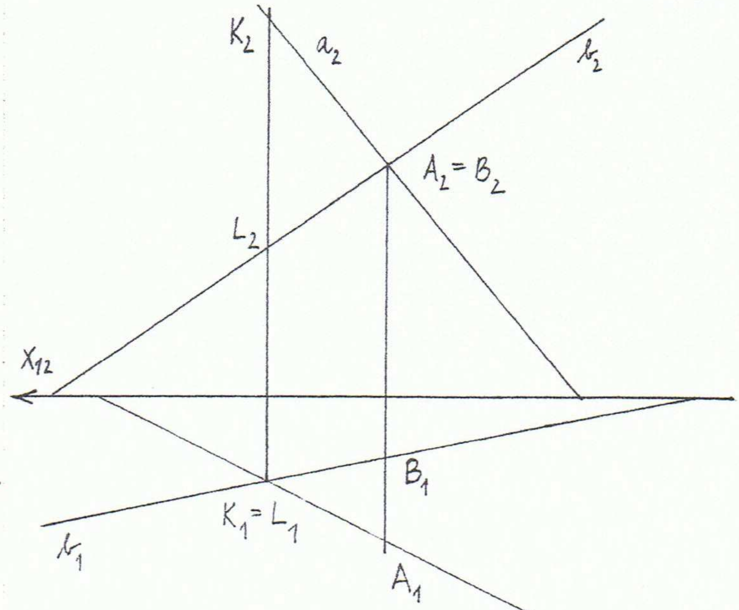


nárysy (resp. půdorysy) různoběžných přímek mohou splynout



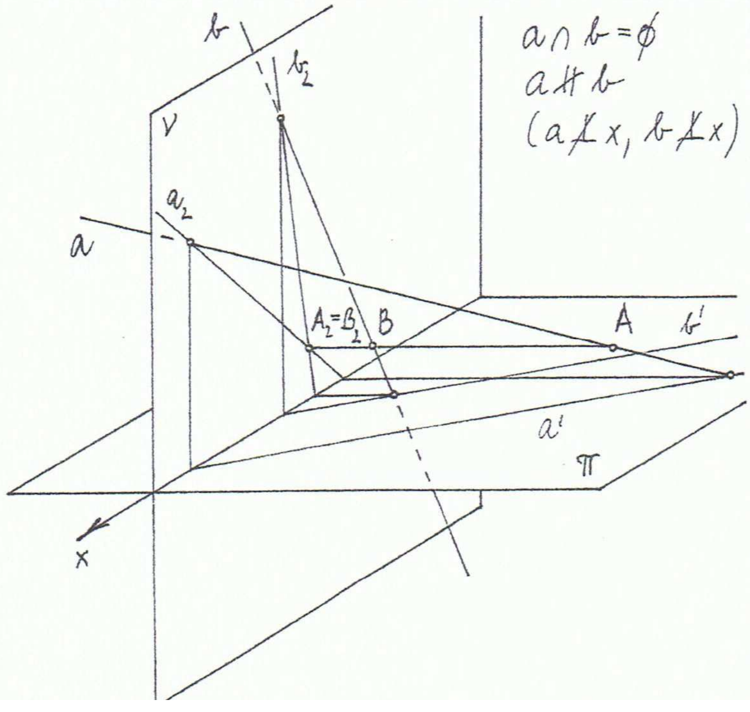
$a \cap b = \emptyset,\ a \nparallel b$
$(a \nparallel x,\ b \nparallel x)$



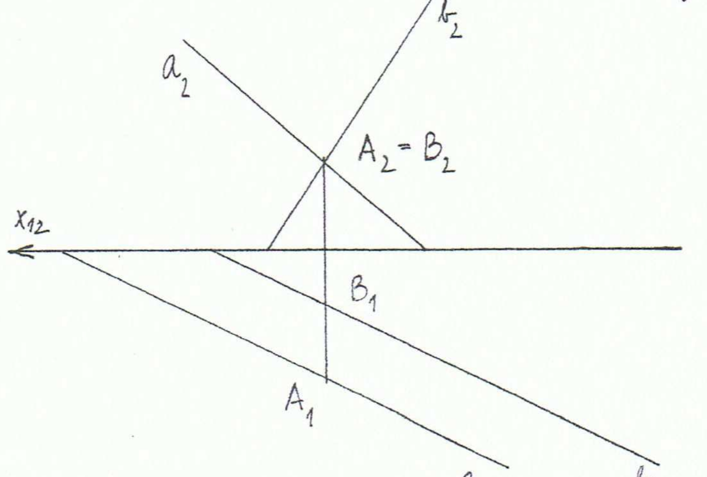


a_1, b_1 jsou různoběžné přímky
a_2, b_2 jsou různoběžné přímky
(spojnice průsečíků $a_1 \cap b_1$ a $a_2 \cap b_2$ není ordinála)

$a \cap b = \emptyset$
$a \nparallel b$
$(a \nparallel x,\ b \nparallel x)$

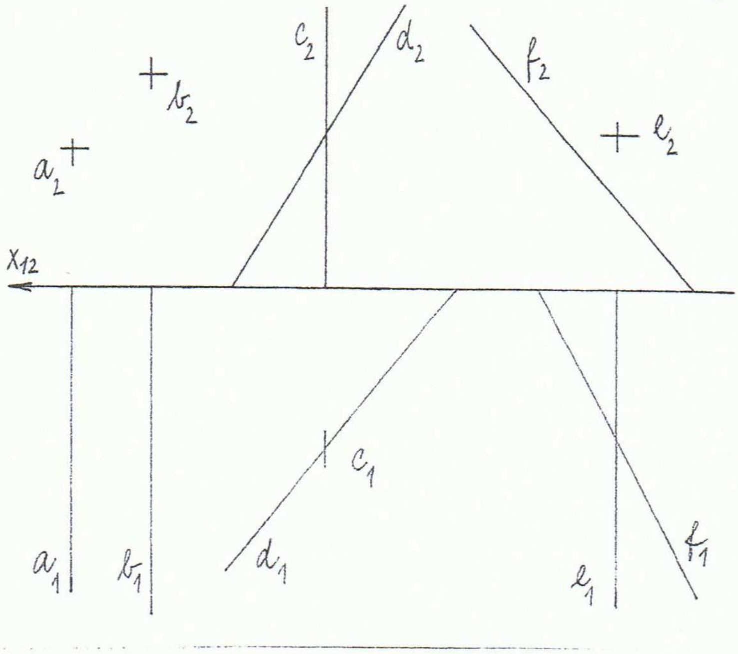


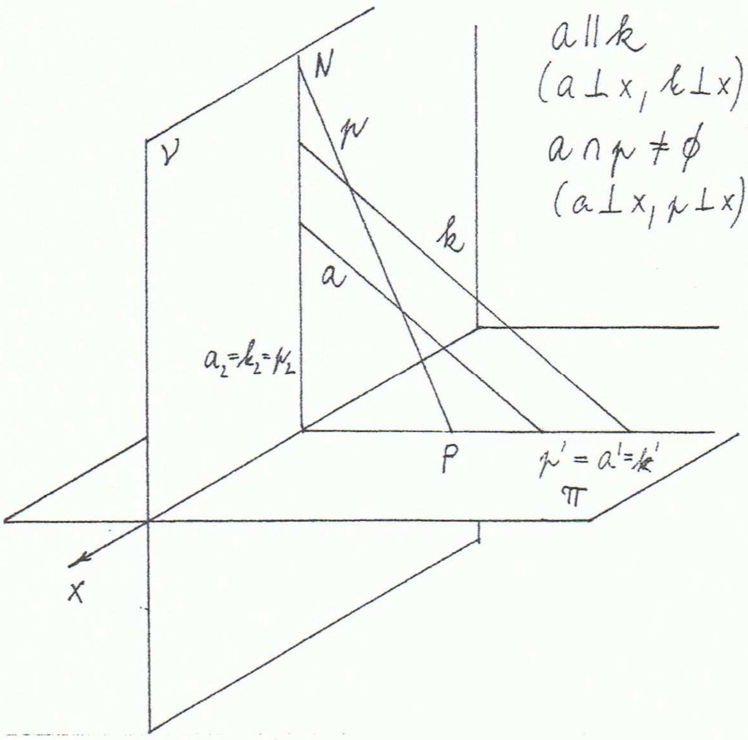
půdorysy (resp. nárysy) mimoběžných přímek mohou být <u>různé</u> rovnoběžné přímky



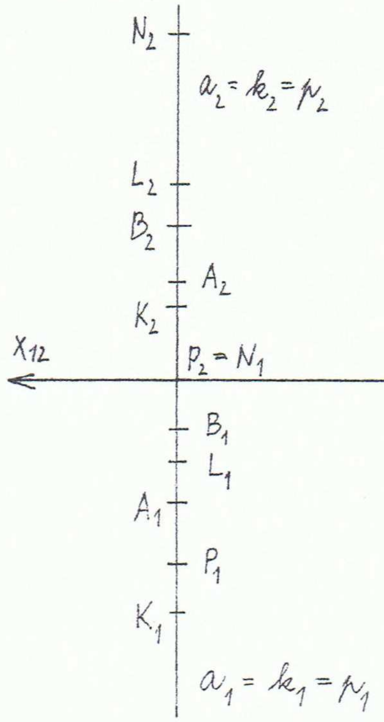
Sestrojte sdružené průměty přímek

1. $a \parallel b$, $a \perp \nu$
2. $c \cap d = C$, $c \perp \pi$, $d \nparallel x$
3. $e \cap f = \emptyset$, $e \perp \nu$, $f \nparallel x$



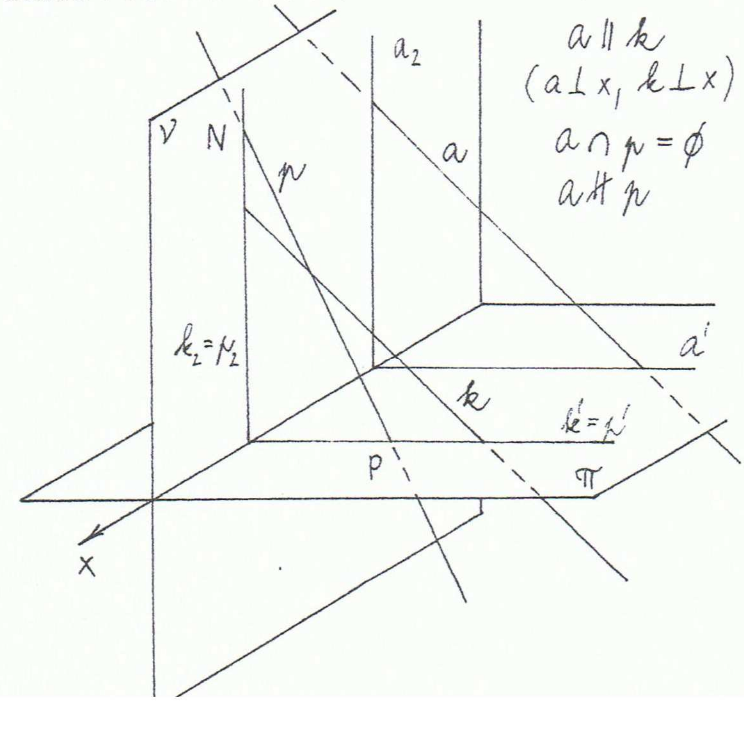


$a \parallel k$
$(a \perp x,\ k \perp x)$
$a \cap p \neq \emptyset$
$(a \perp x,\ p \perp x)$

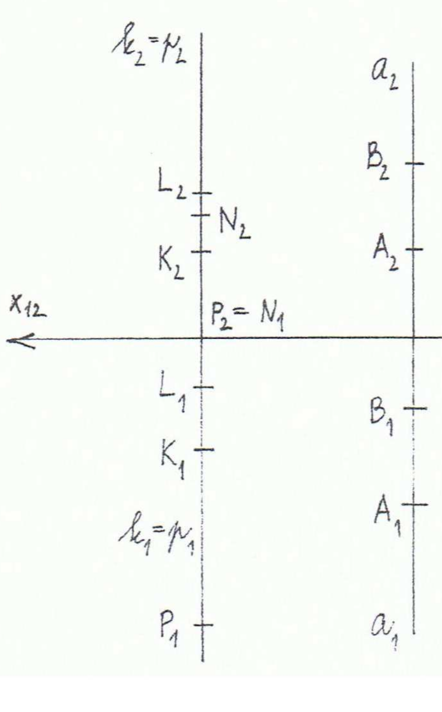


$a = AB$
$k = KL$
$p = PN$

ze sdružených průmětů nepoznáme, zda jsou přímky rovnoběžné nebo různoběžné



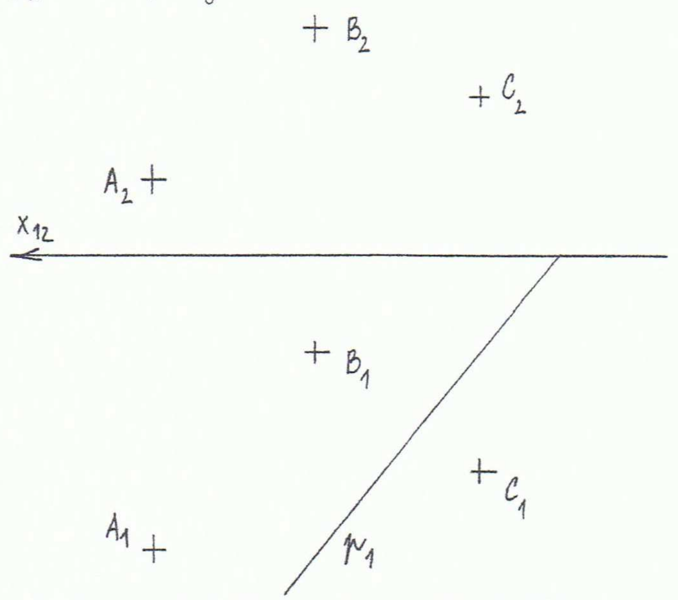
$a \parallel k$
$(a \perp x,\ k \perp x)$
$a \cap p = \emptyset$
$a \nparallel p$



$a = AB$
$k = KL$
$p = PN$

ze sdružených průmětů nepoznáme, zda jsou přímky rovnoběžné nebo mimoběžné

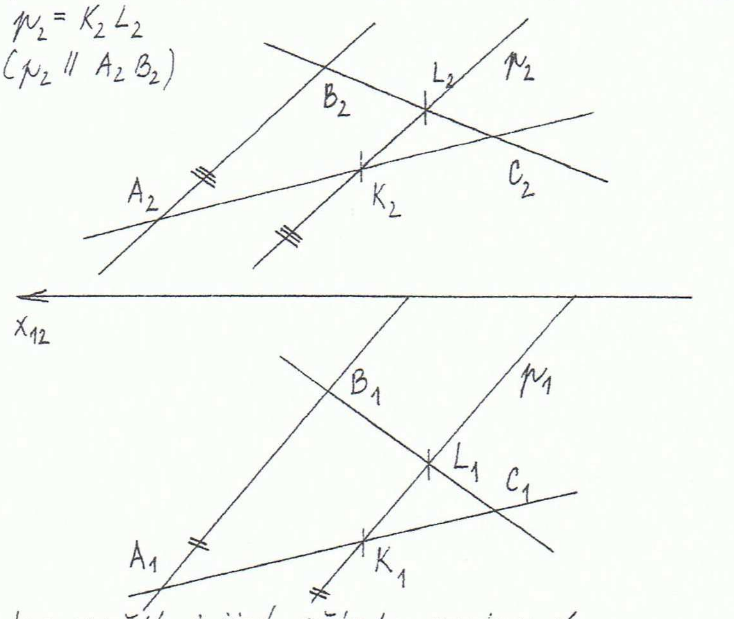
Dourčete přímku p (tj. sestrojte její nárys p_2) tak, aby ležela v rovině $\alpha=(A,B,C)$



$p \subset \alpha \Rightarrow p \cap AC = K,\ p \cap BC = L,\ p \parallel AB$

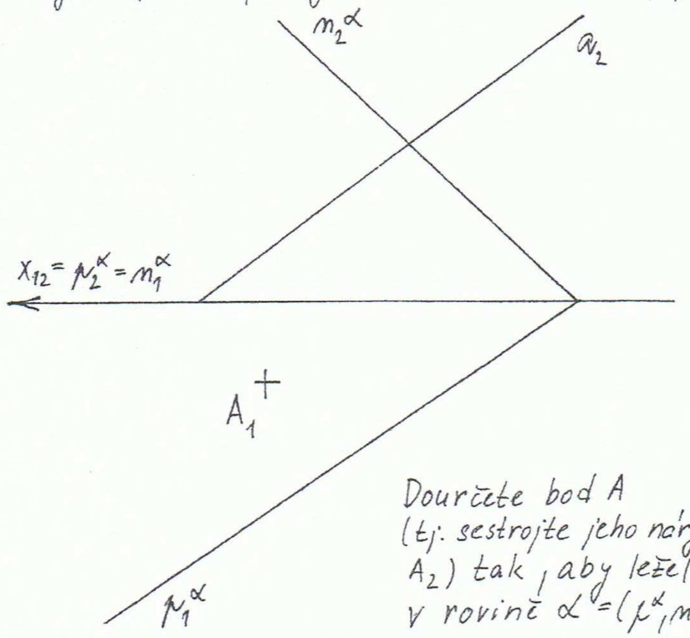
$p_2 = K_2 L_2$

$(p_2 \parallel A_2 B_2)$



lze využít i jiné přímky roviny α

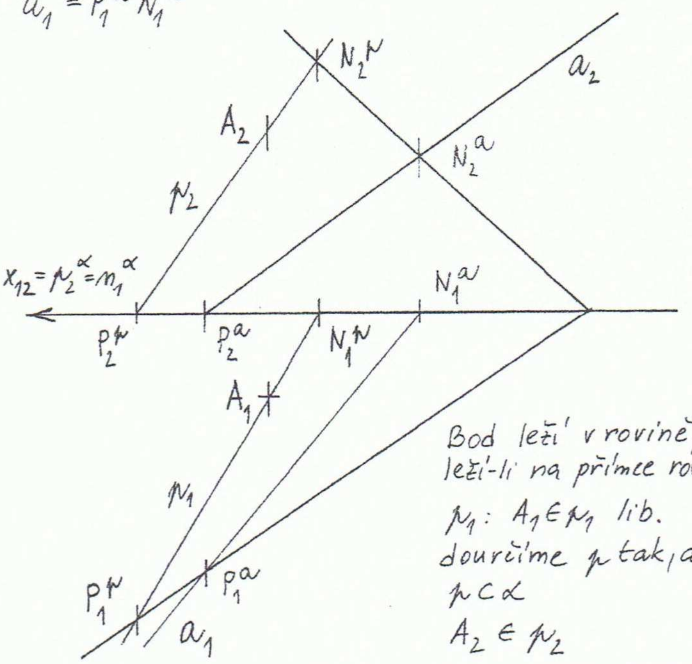
Dourčete přímku a (tj. sestrojte její půdorys a_1) tak, aby ležela v rovině $\alpha=(p^\alpha, n^\alpha)$



Dourčete bod A (tj. sestrojte jeho nárys A_2) tak, aby ležel v rovině $\alpha=(p^\alpha, n^\alpha)$.

$a \subset \alpha \Rightarrow a \cap \pi = P^a \in p^\alpha,\ a \cap \nu = N^a \in n^\alpha$

$a_1 = P_1^a N_1^a$



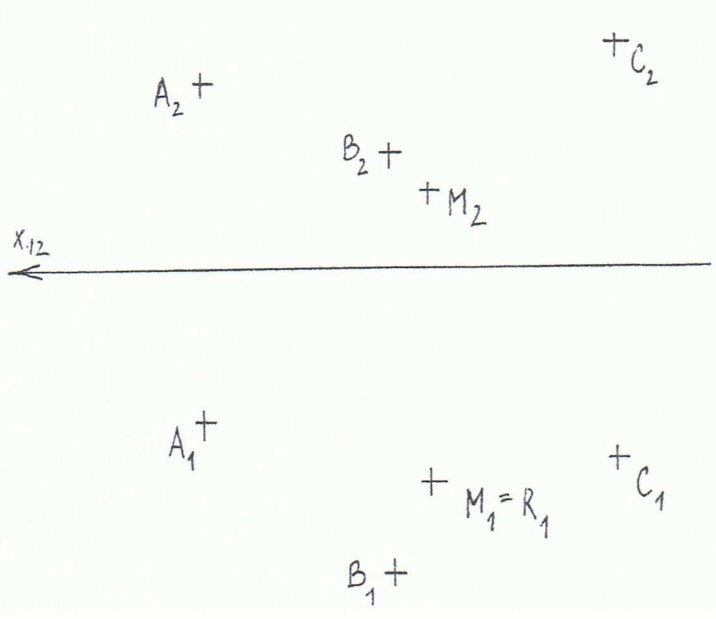
Bod leží v rovině, leží-li na přímce roviny.

p_1: $A_1 \in p_1$ lib.

dourčíme p tak, aby $p \subset \alpha$

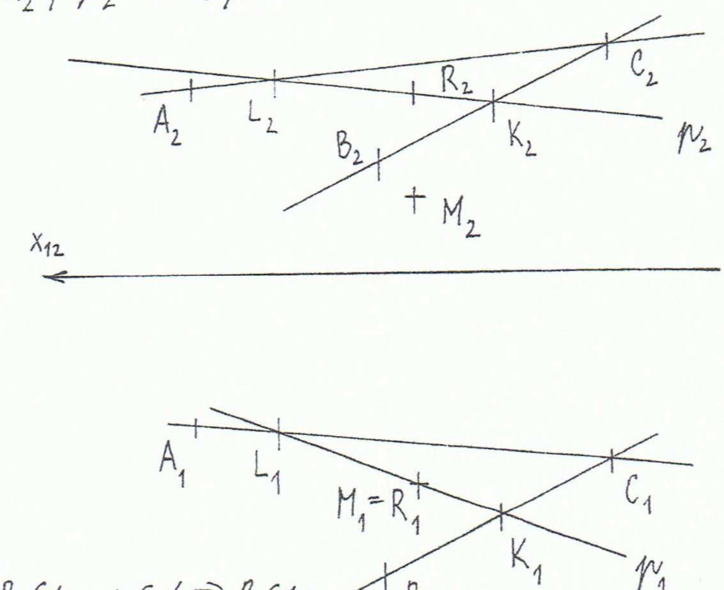
$A_2 \in p_2$

Rozhodněte, zda bod M leží v rovině $\alpha=(A,B,C)$. Dourčete bod R tak, aby $R \in \alpha$.



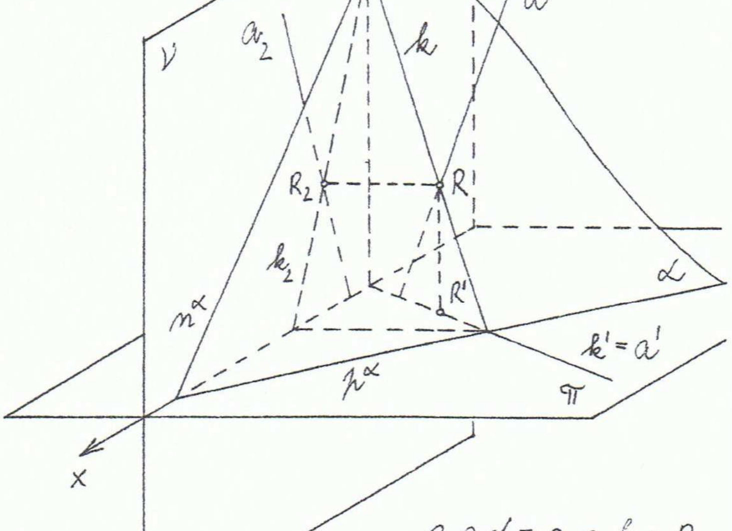
p_1 : $M_1 \in p_1$ lib.; dourčíme p tak, aby $p \subset \alpha$

$M_2 \notin p_2 \Rightarrow M \notin \alpha$



$R_1 \in p_1,\ p \subset \alpha \Rightarrow R_2 \in p_2$

$a \cap \alpha$



$a \cap \alpha = a \cap k = R$

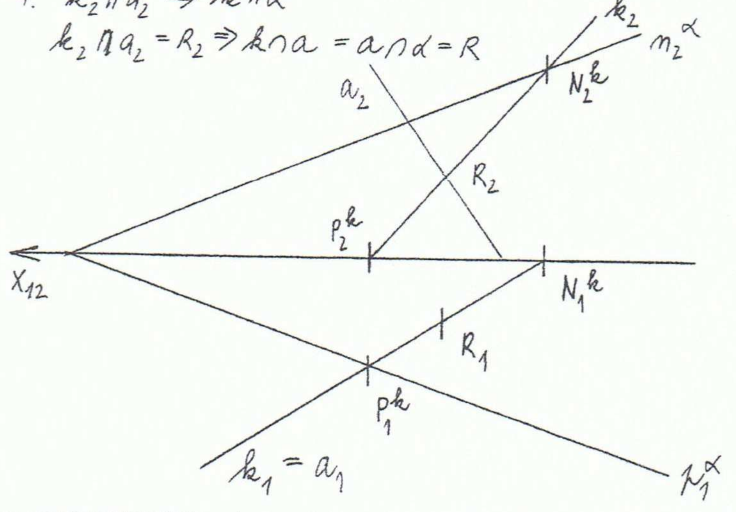
k - tzv. krycí přímka

1. $k_1 = a_1$ (půdorysy se „kryjí")
2. dourčíme k tak, aby $k \subset \alpha$

(3. $k_1 = a_1 \Rightarrow k \cap a \neq \emptyset \vee k \parallel a$)

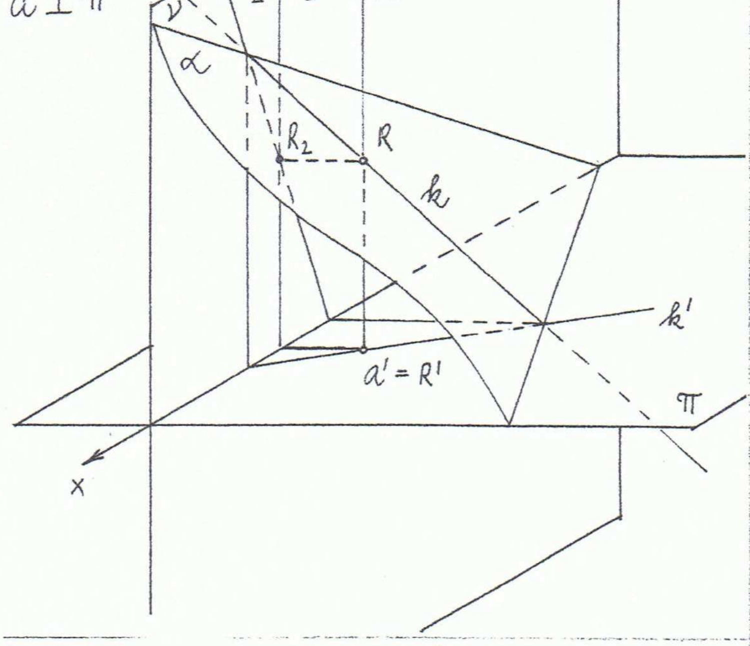
4. $k_2 \nparallel a_2 \Rightarrow k \nparallel \alpha$

$k_2 \cap a_2 = R_2 \Rightarrow k \cap a = a \cap \alpha = R$



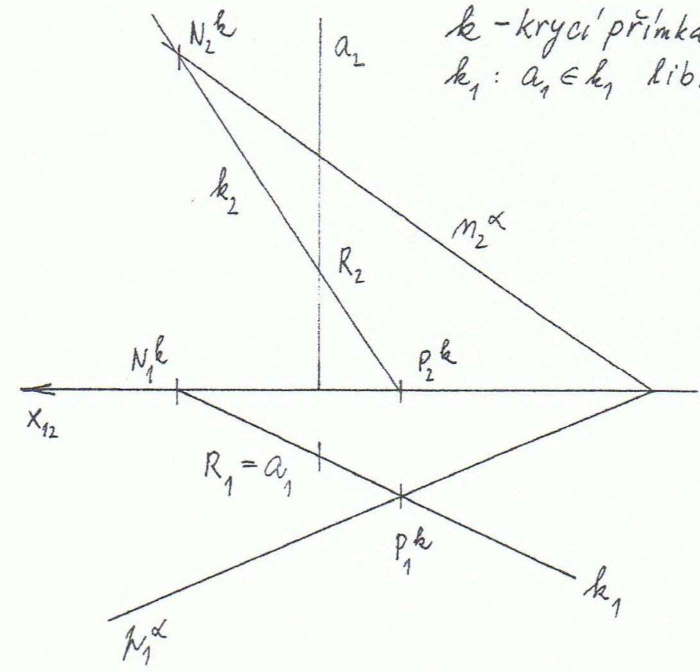
$a \cap \alpha$

$a \perp \pi$



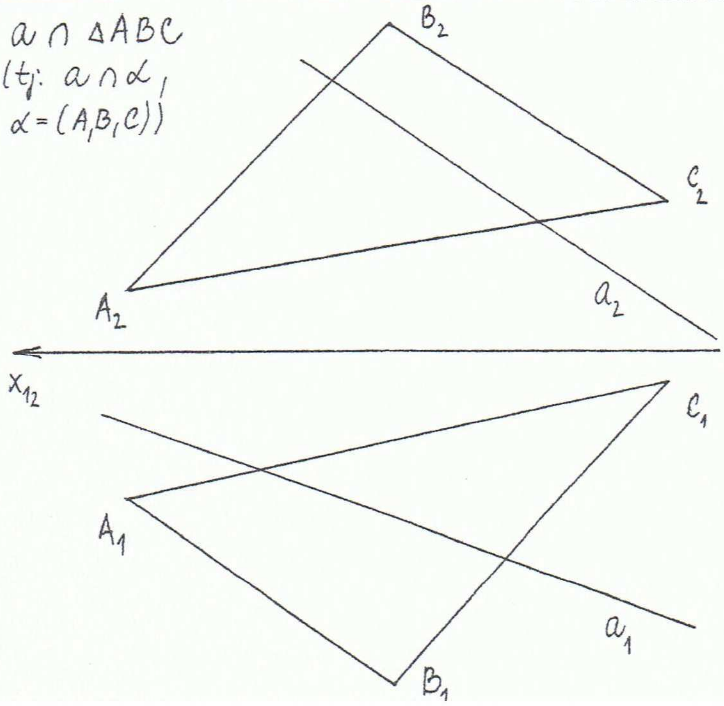
k - krycí přímka

$k_1 : a_1 \in k_1$ lib.



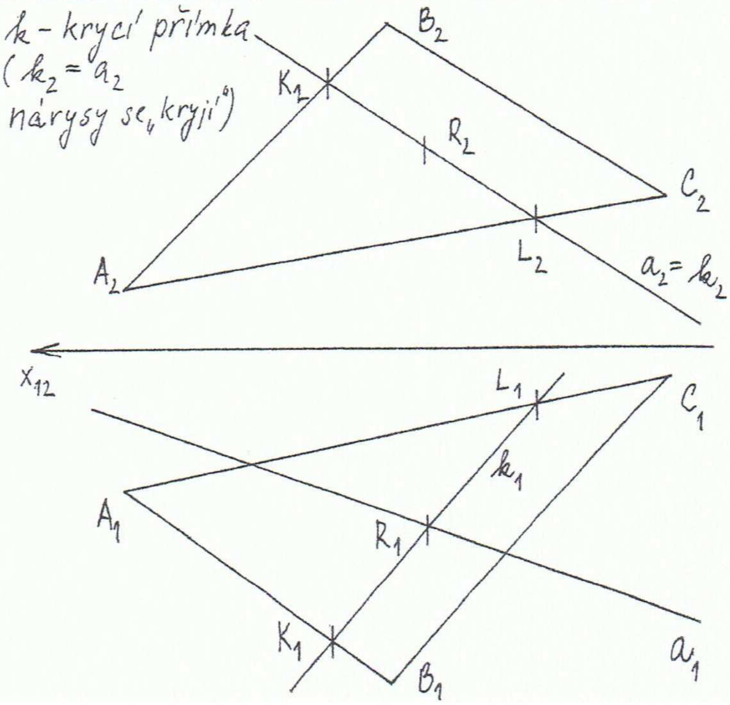
$a \cap \Delta ABC$

(tj: $a \cap \alpha$, $\alpha = (A, B, C)$)

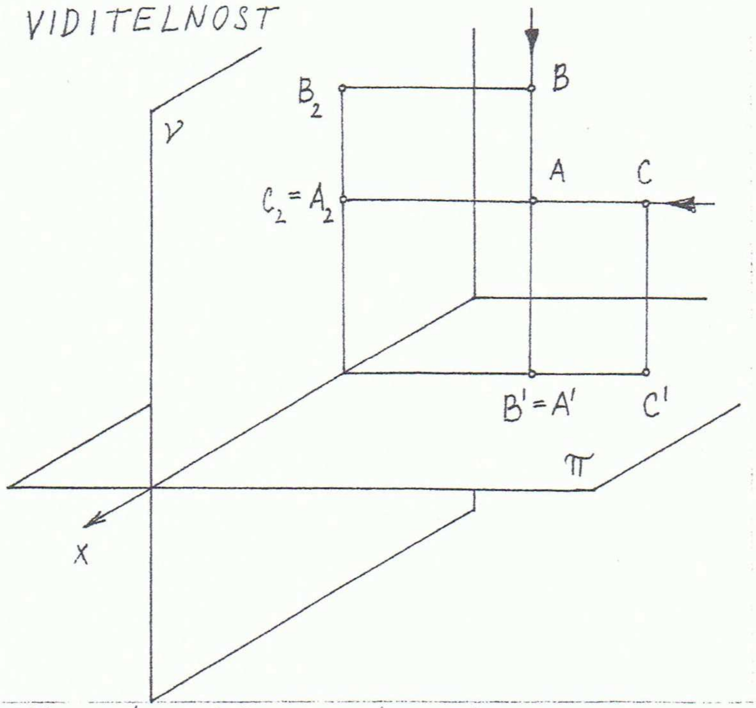


k - krycí přímka

($k_2 = a_2$ nárysy se „kryjí")



VIDITELNOST



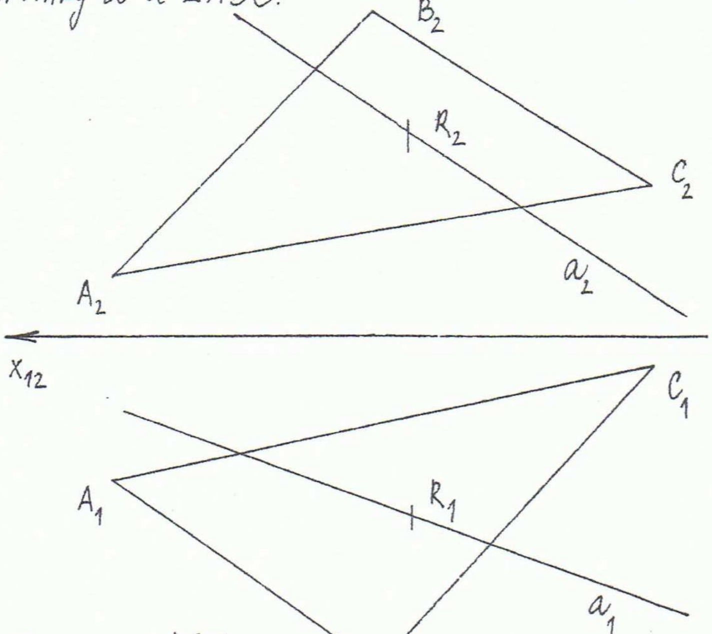
viditelnost v půdoryse
(díváme se ve směru promítání do π)

$$\left.\begin{matrix} A_1 = B_1 \\ z_B > z_A \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{vidíme bod } B$$

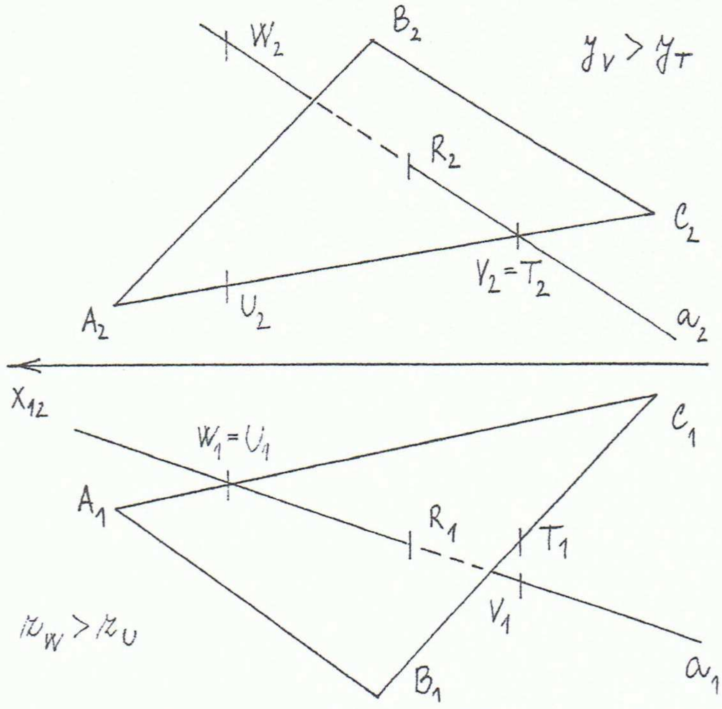
viditelnost v nárysе
(díváme se ve směru promítání do ν)

$$\left.\begin{matrix} A_2 = C_2 \\ y_C > y_A \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{vidíme bod } C$$

Stanovte viditelnost (v půdoryse i nárysе) přímky a a ΔABC.



$R = a \cap \Delta ABC$



PŘÍKLADY II

Formát: A5 na šířku (nepoužívejte nedostupné body, tj. body mimo uvedený formát).

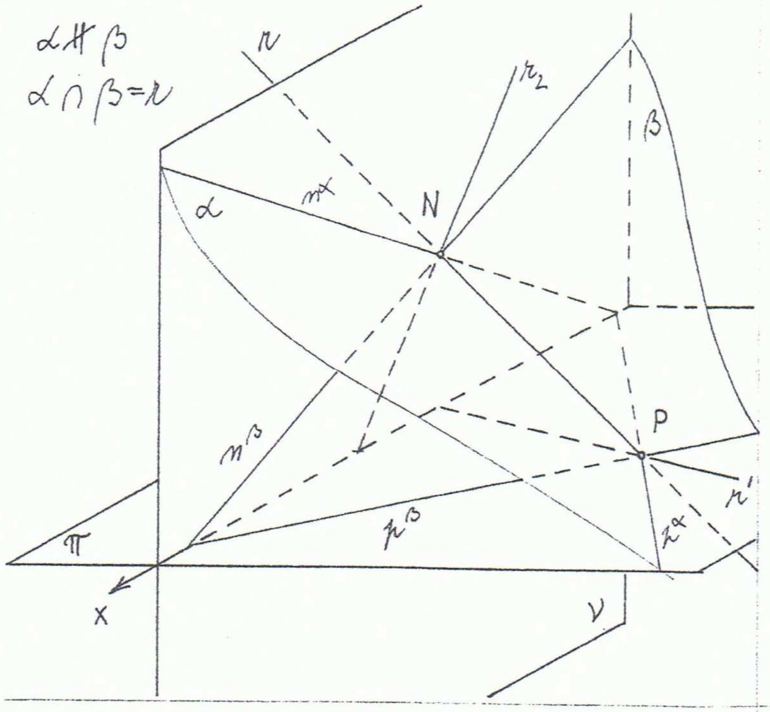
1. MP: O [10.5, 7.5]
   Je dána přímka $a = AB$, A [0, 4, 0], B [4, 1, 2]. Zobrazte přímku m a její stopníky, $M \in m$, $m \parallel a$, M [−2, 3, 2].
2. MP: O [10.5, 7.5]
   Je dána přímka $a = AB$, A [−3, 3, 4], B [3, −1, −3]. Zobrazte přímku m : $M \in m$, $m \parallel \pi$, $m \cap a \neq \emptyset$, M [0, 3, 2].
3. MP: O [10.5, 7.5]
   Zobrazte stopy roviny α : $AB \subset \alpha$, $x \parallel \alpha$, A [0, 5, 1], B [5, 2, 4]. Dále zobrazte body C [−4, 2, ?], $C \in \alpha$, D [3, ?, 2], $D \in \alpha$.
4. MP: O [10.5, 7.5]
   Rozhodněte, zda bod M [−4, 3, 4] leží v rovině $\alpha = (A, B, C)$, A [3, 0, 0], B [−2, 3, 0], C [−2, −3, 5].
5. MP: O [10.5, 7.5]
   Zobrazte průsečík přímky p a roviny α.
   a) $\alpha = (-2, -3, 1)$, p: $P \in p$, $p \parallel x$, P [3, 3, 1.5].
   b) $\alpha = (4, \infty, 5)$, $p = PQ$, P [−2, 2, 1], Q [5, 4, 5].
   c) $\alpha = (a, b)$, $a = AB$, $b = BC$, A [6, 5, 4], B [0, 3, 6], C [−4, 4, 4], $p = PQ$, P [3, 3, 2], Q [0, 6, 4.5].
   d) $\alpha = (\infty, 6, 5)$, $p = PQ$, P [−3, 7, 5], Q [5, 1, 3].
   e) $\alpha = (\infty, 4, 5)$, $p = PQ$, P [0, 5, 6], Q [5, 3, 4].
   f) $\alpha = (A, x)$, A [4, 6, 4], $p = PQ$, P [0, 2, 6], Q [−6, 3, 3].
6. MP: O [10.5, 7.5]
   Zobrazte průsečík přímky $p = PQ$, (P [3, 4, 3], Q [−3, 1, 5]) a rovnoběžníka $ABCD$, A [0, 1, 7], B [−3, 6, 2], C [0, 6, 0]. Stanovte viditelnost (v půdoryse i nárysе). Rozhodněte, zda v půdoryse a nárysе vidíme stejnou stranu rovnoběžníka.

Formát: A4 na výšku (nepoužívejte nedostupné body, tj. body mimo uvedený formát).

7. MP: O [10.5, 15]
   Je dán trojúhelník ABC a úsečky PQ, KL, A [7, 5, 3], B [−1, 11, 8], C [−6, 4, 5], P [2, 5.5, 7], Q [−3, 10, 0], K [−2, 7, 3], L [−2, 7, 10]. Zobrazte průsečíky úseček PQ, KL s trojúhelníkem ABC. Stanovte viditelnost (v půdoryse i nárysе). Rozhodněte, zda v půdoryse a nárysе vidíme stejnou stranu trojúhelníka.

$\alpha \nparallel \beta$

$\alpha \cap \beta = r$



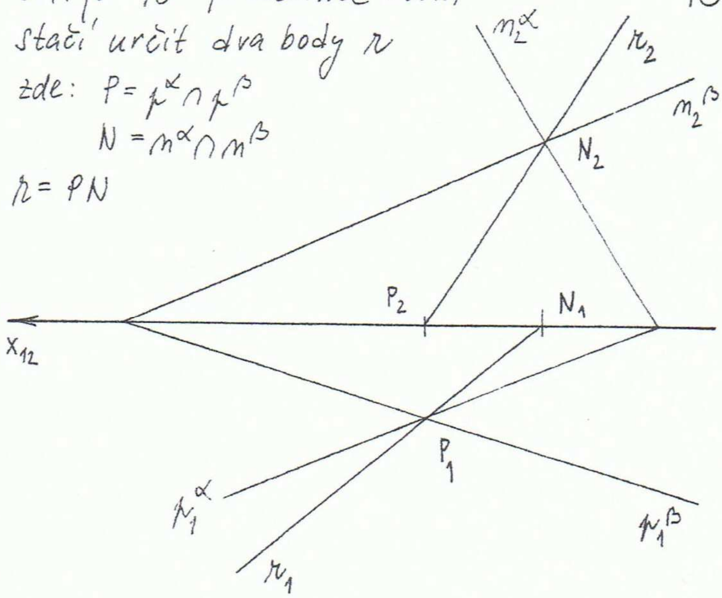
$\alpha \cap \beta = r$ průsečnice rovin

stačí určit dva body r

zde: $P = p^\alpha \cap p^\beta$

$N = n^\alpha \cap n^\beta$

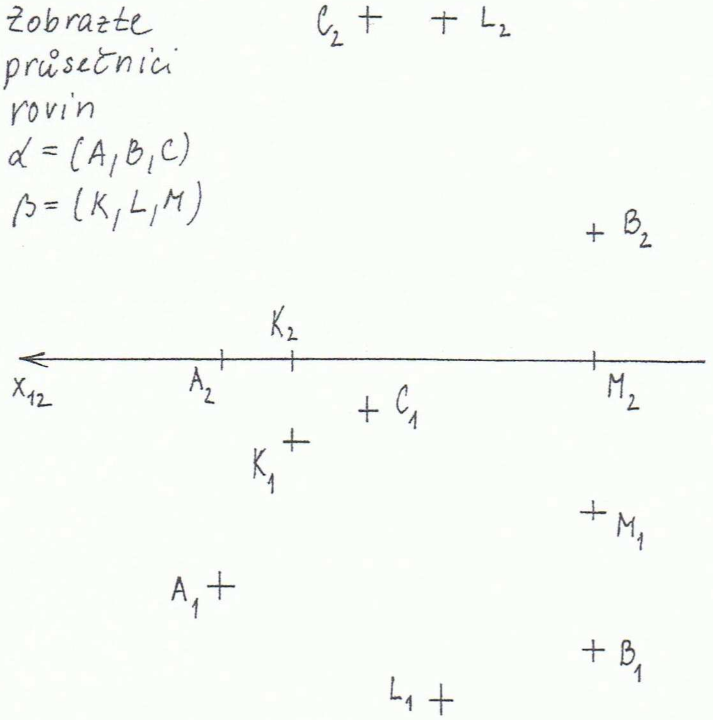
$r = PN$



Zobrazte průsečnici rovin

$\alpha = (A, B, C)$

$\beta = (K, L, M)$



$r = \alpha \cap \beta$

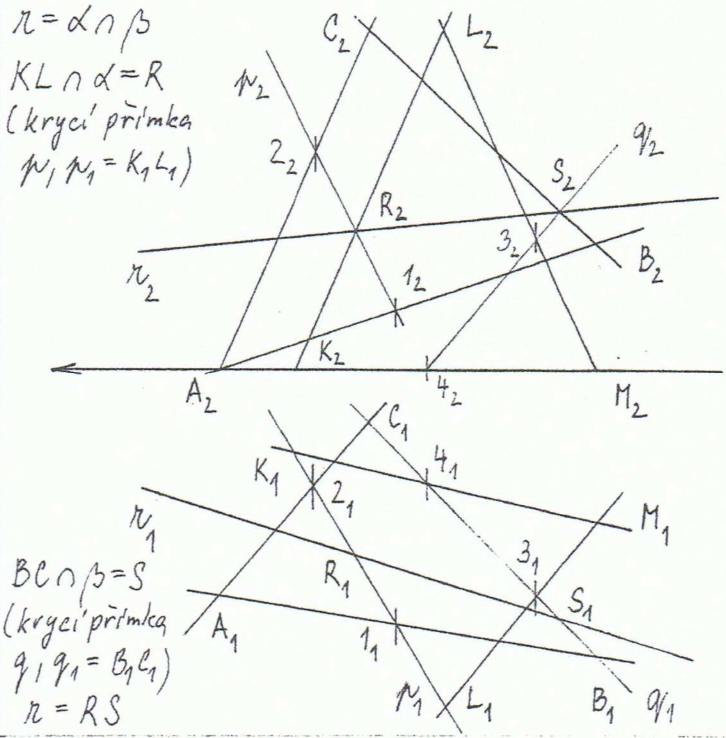
$KL \cap \alpha = R$

(krycí přímka p, $p_1 = K_1L_1$)

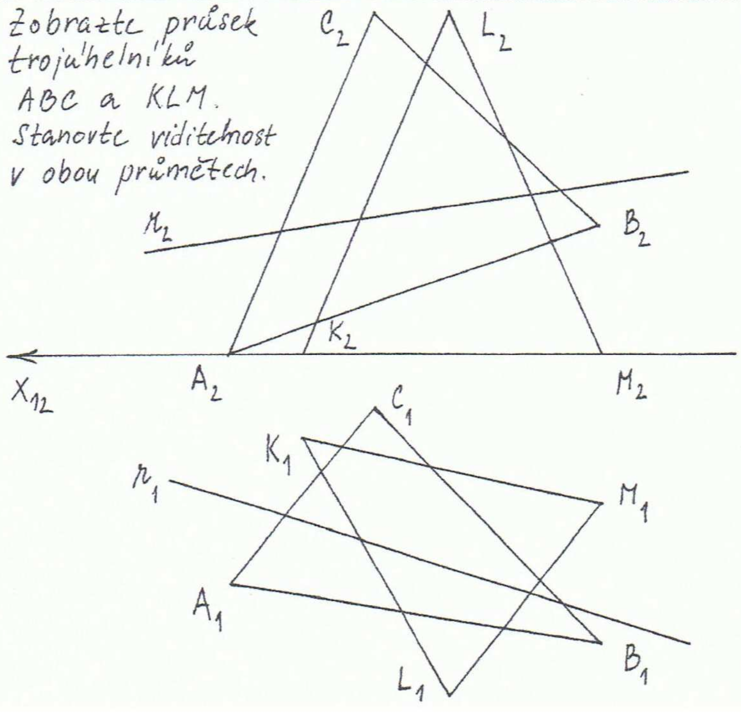
$BC \cap \beta = S$

(krycí přímka q, $q_1 = B_1C_1$)

$r = RS$

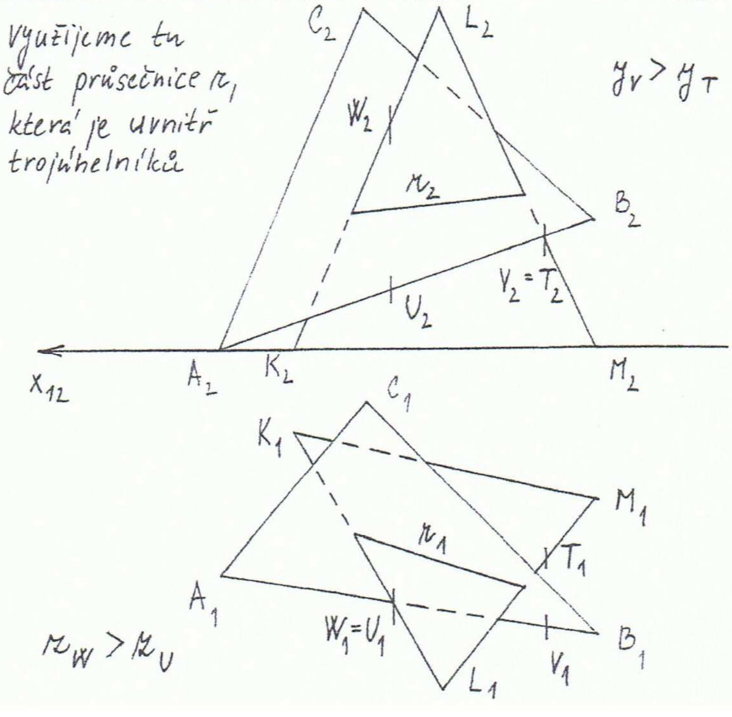


Zobrazte průsek trojúhelníků ABC a KLM. Stanovte viditelnost v obou průmětech.



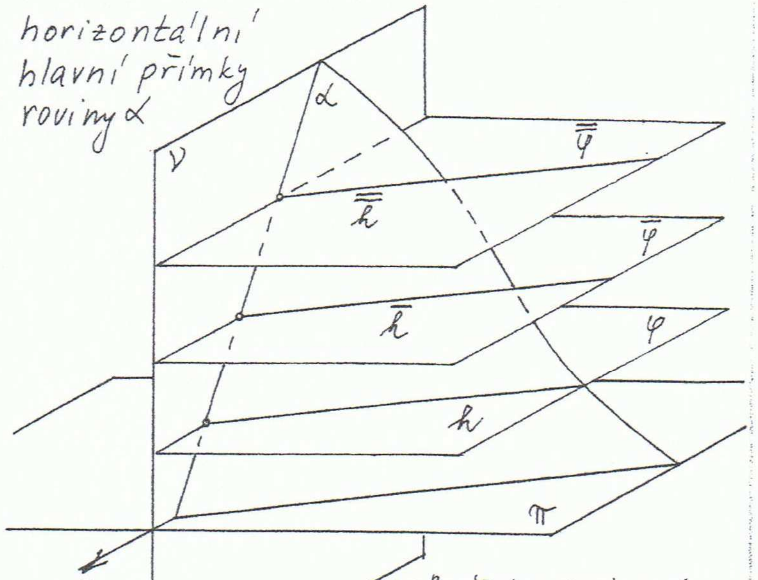
Využijeme tu část průsečnice r, která je uvnitř trojúhelníků

$y_V > y_T$



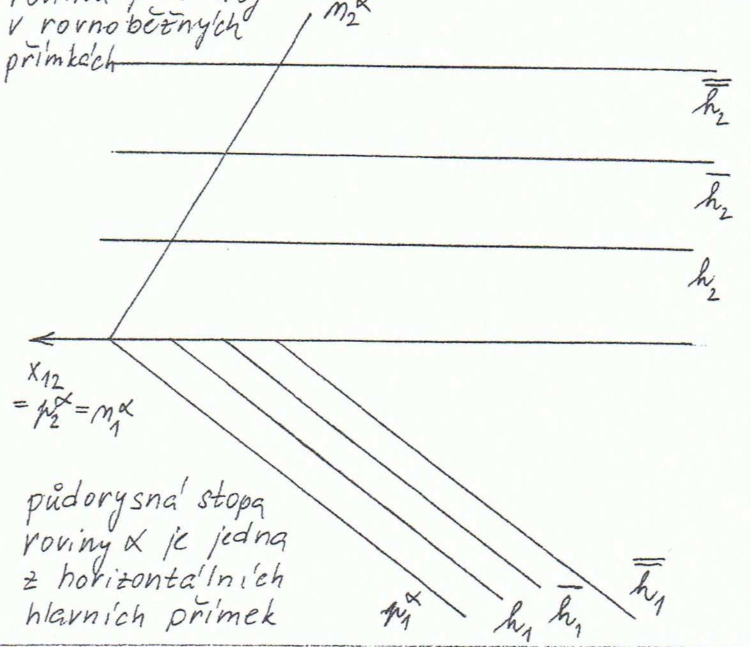
$z_W > z_U$

horizontální hlavní přímky roviny α



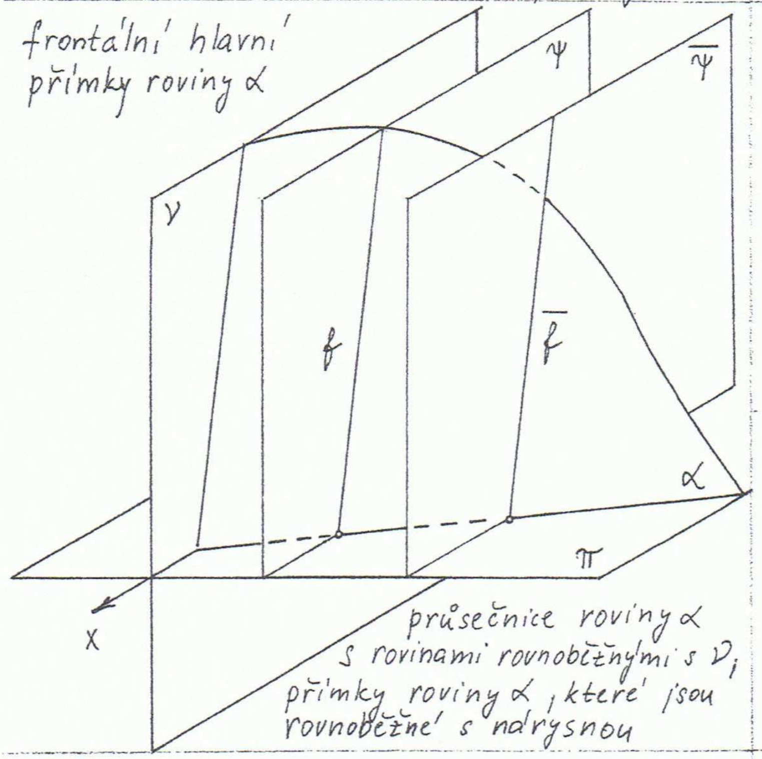
průsečnice roviny α s rovinami rovnoběžnými s π; přímky roviny α, které jsou rovnoběžné s půdorysnou

dvě rovnoběžné roviny jsou třetí (různoběžnou) rovinou protnuty v rovnoběžných přímkách



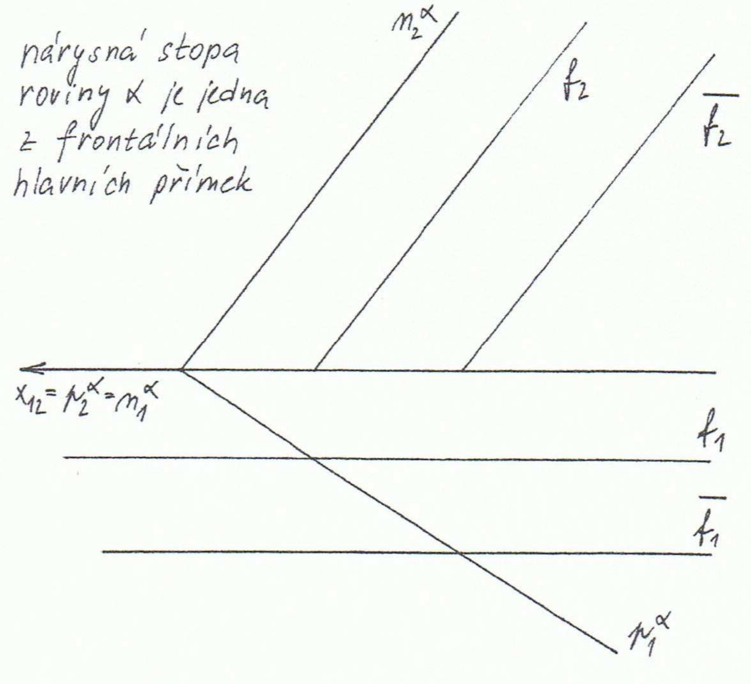
půdorysná stopa roviny α je jedna z horizontálních hlavních přímek

frontální hlavní přímky roviny α

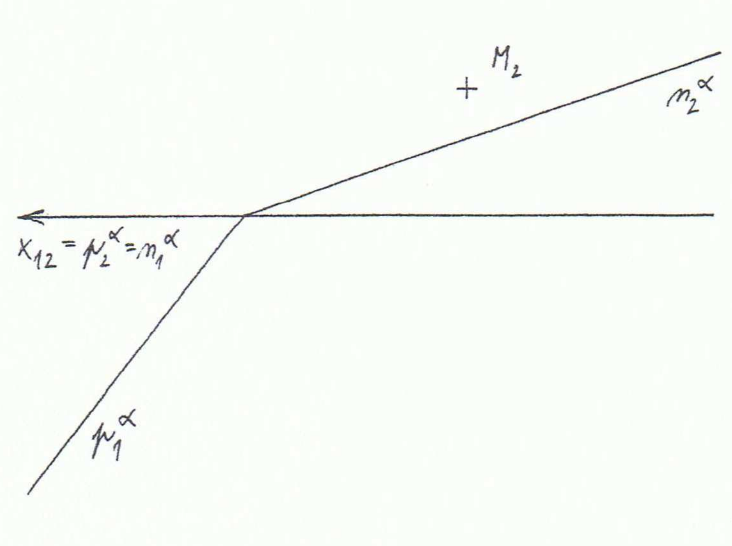


průsečnice roviny α s rovinami rovnoběžnými s ν; přímky roviny α, které jsou rovnoběžné s nárysnou

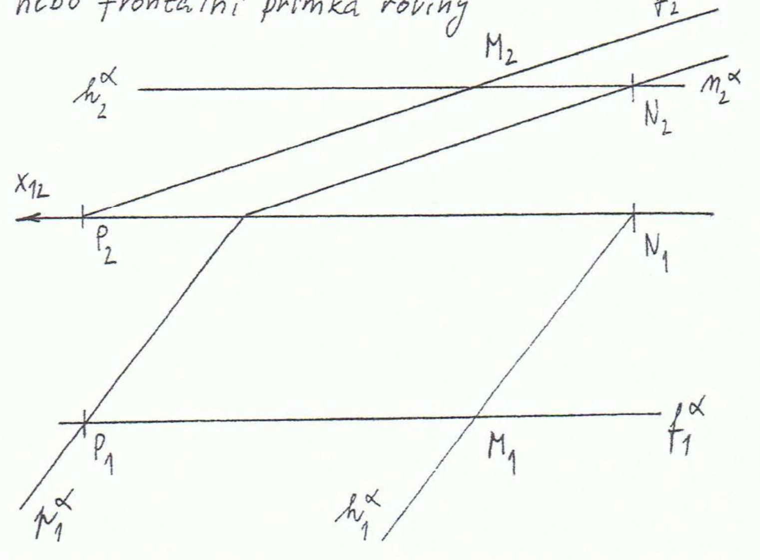
nárysná stopa roviny α je jedna z frontálních hlavních přímek



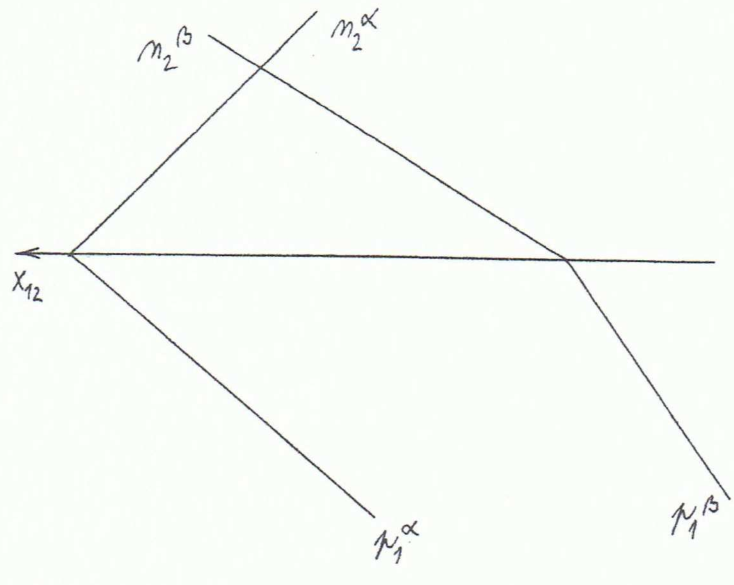
Dourčete bod M (tj: sestrojte jeho půdorys) tak, aby $M \in \alpha$.



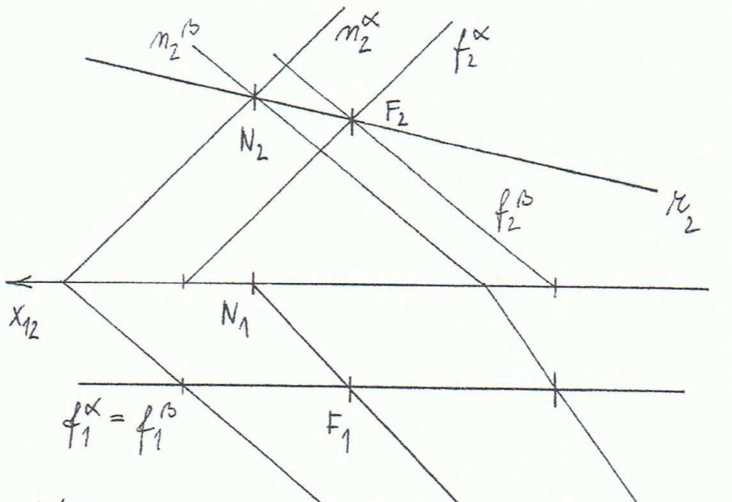
k dourčení bodu v rovině využíváme libovolnou přímku roviny, na které bod leží
často se používá horizontální nebo frontální přímka roviny



zobrazte průsečnici rovin α a β.

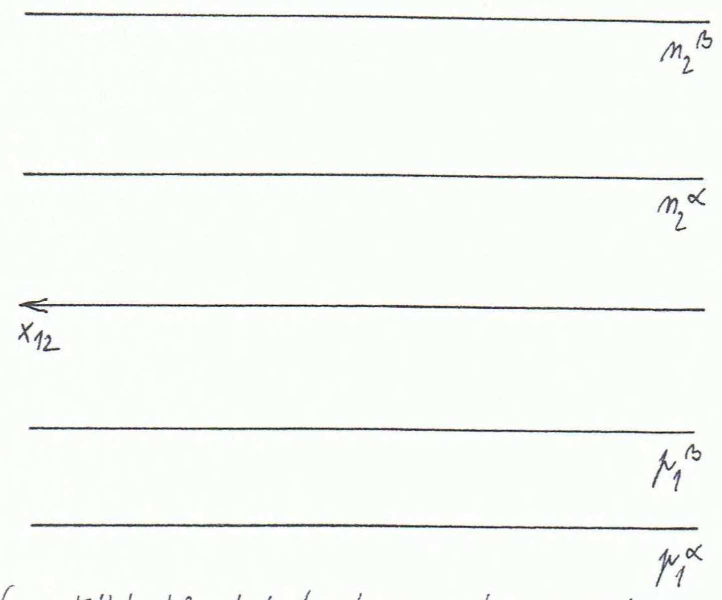


využijeme frontální hlavní přímky



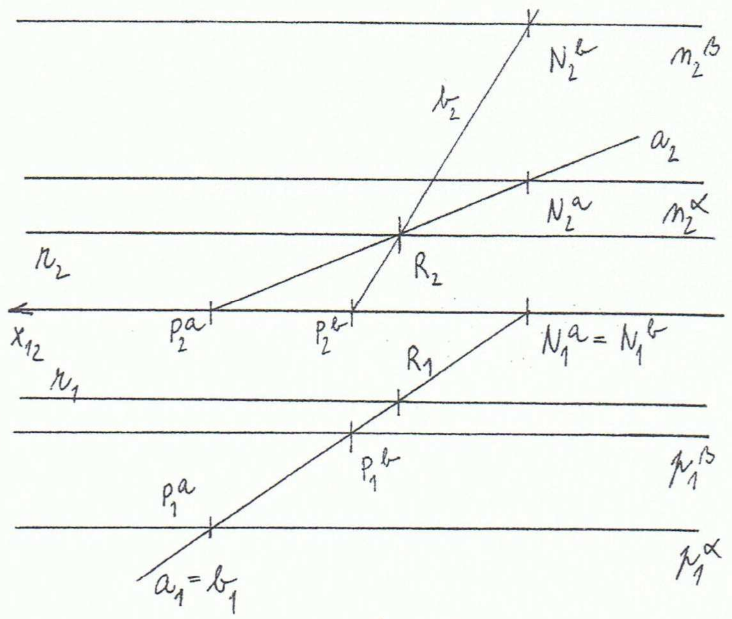
$f^\alpha \subset \alpha$
$f^\beta \subset \beta$
$f^\alpha \cap f^\beta = F$, $r = NF$

zobrazte průsečnici rovin α a β.



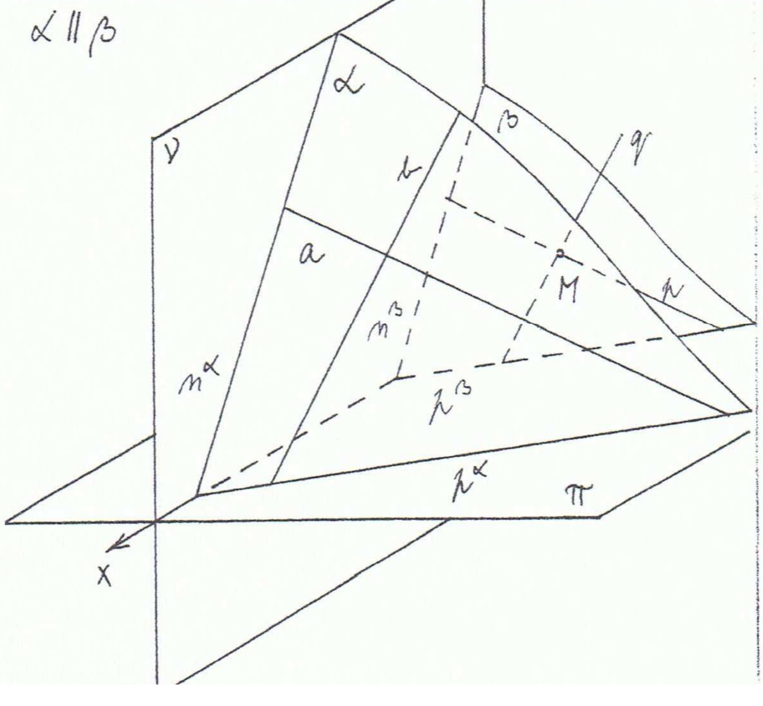
(u příkladů tohoto typu nelze využít hlavní přímky)

$r (= \alpha \cap \beta) \parallel x$, stačí sestrojit jeden bod r



$a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $a \cap b = R \in r$

$\alpha \parallel \beta$

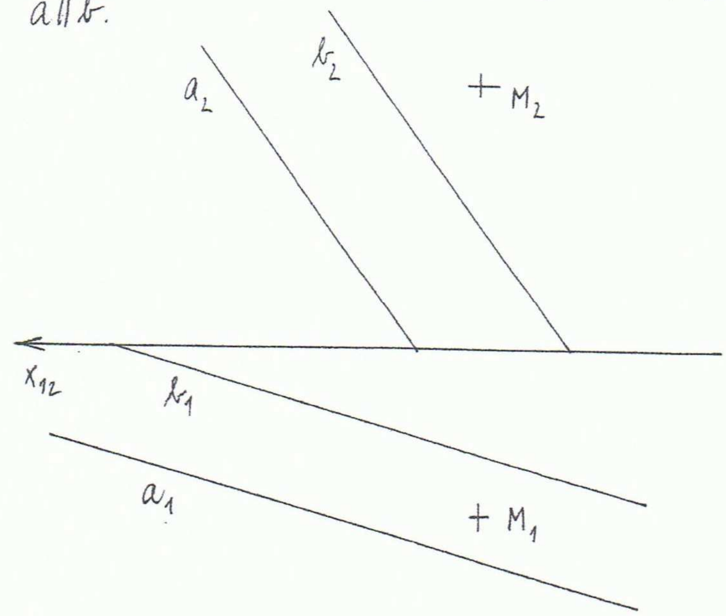


Každá přímka jedné roviny je rovnoběžná s rovinou druhou.

Dvě rovnoběžné roviny jsou třetí (různoběžnou) rovinou protnuty v rovnoběžných přímkách. $\Rightarrow p^\alpha \parallel p^\beta$, $n^\alpha \parallel n^\beta$

Máme-li daným bodem M vést rovinu β rovnoběžnou s danou rovinou α ($M \notin \alpha$), zvolíme v rovině α dvě různoběžné přímky a, b a bodem M vedeme přímky p, q s nimi rovnoběžné, $\beta = (p, q)$

Určete rovinu $\beta: M \in \beta,\ \beta \parallel \alpha;\ \alpha = (a, b)$, $a \parallel b$.



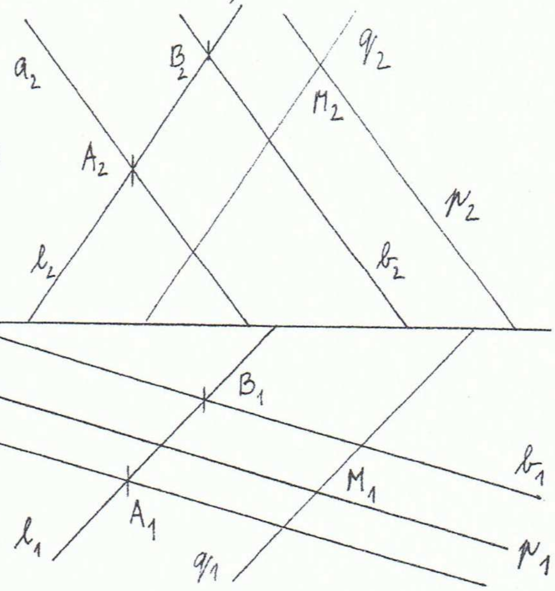
$p: M \in p,\ p \parallel a$

$l \subset \alpha$ libovolná ($l \nparallel a$)

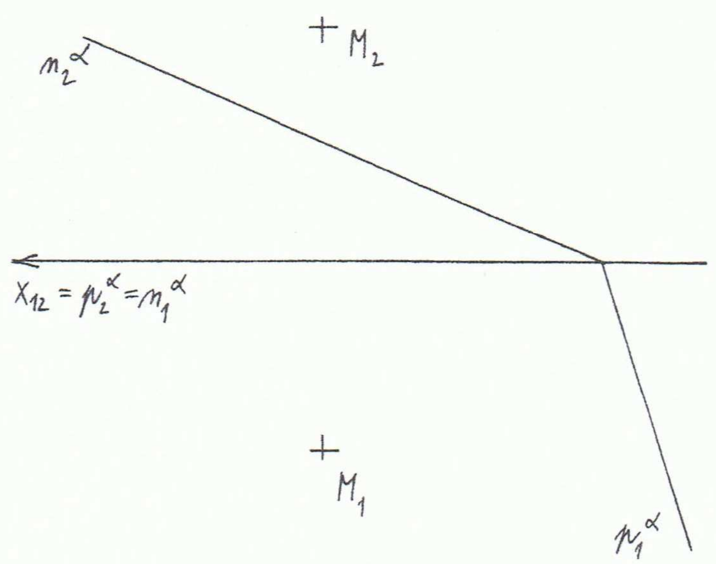
$q: M \in q$

$q \parallel l$

$\beta = (p, q)$

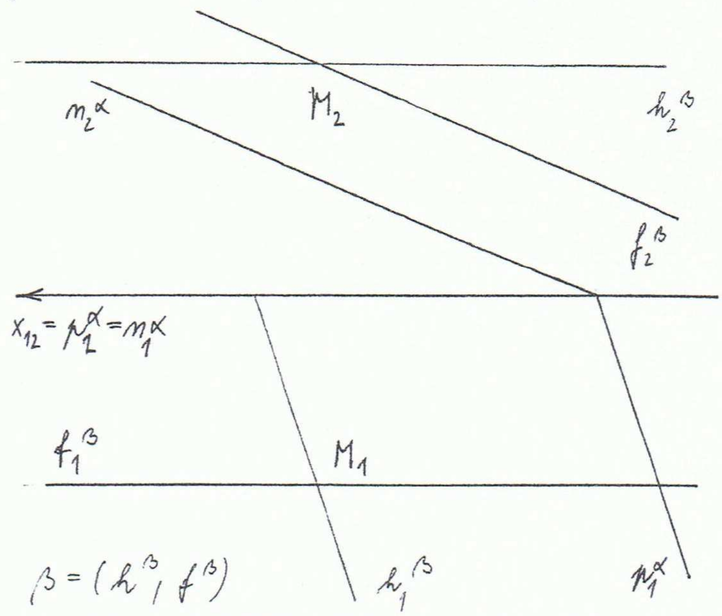


Určete rovinu $\beta: M \in \beta,\ \beta \parallel \alpha;\ \alpha = (p^\alpha, n^\alpha)$.



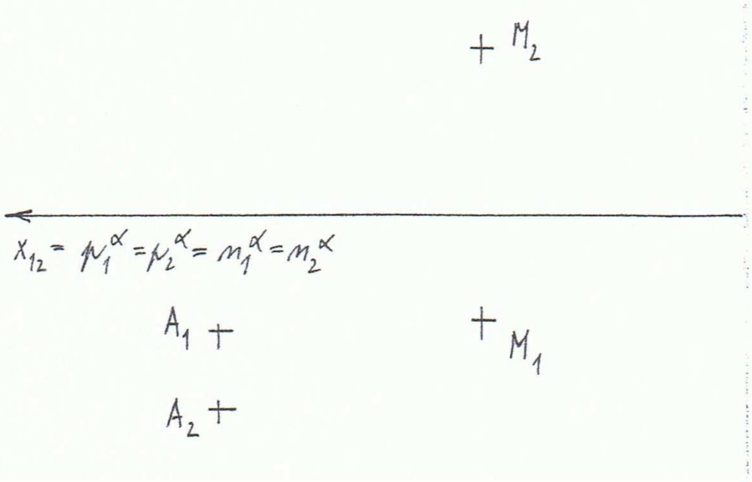
$h^\beta: M \in h^\beta,\ h^\beta \parallel p^\alpha$ hlavní přímky

$f^\beta: M \in f^\beta,\ f^\beta \parallel n^\alpha$ roviny β



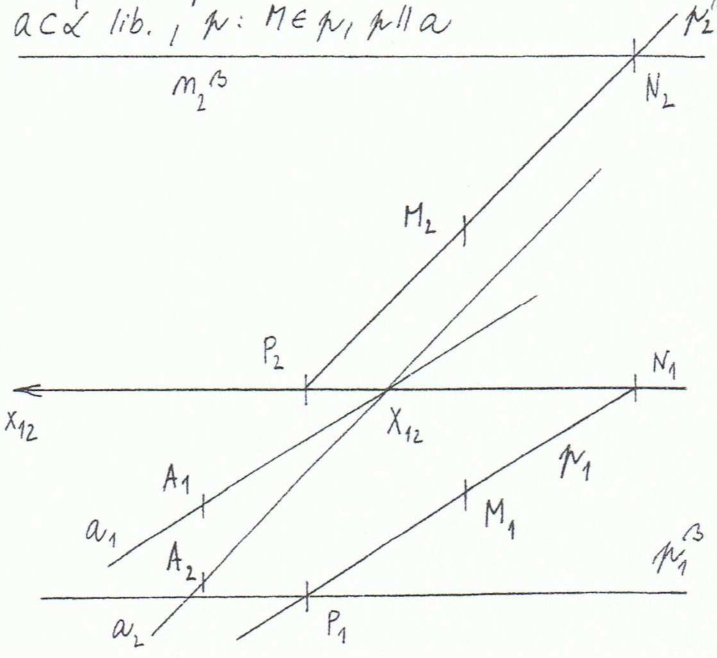
Zobrazte stopy roviny $\beta: M \in \beta,\ \beta \parallel \alpha$.

$\alpha = (A, x)$

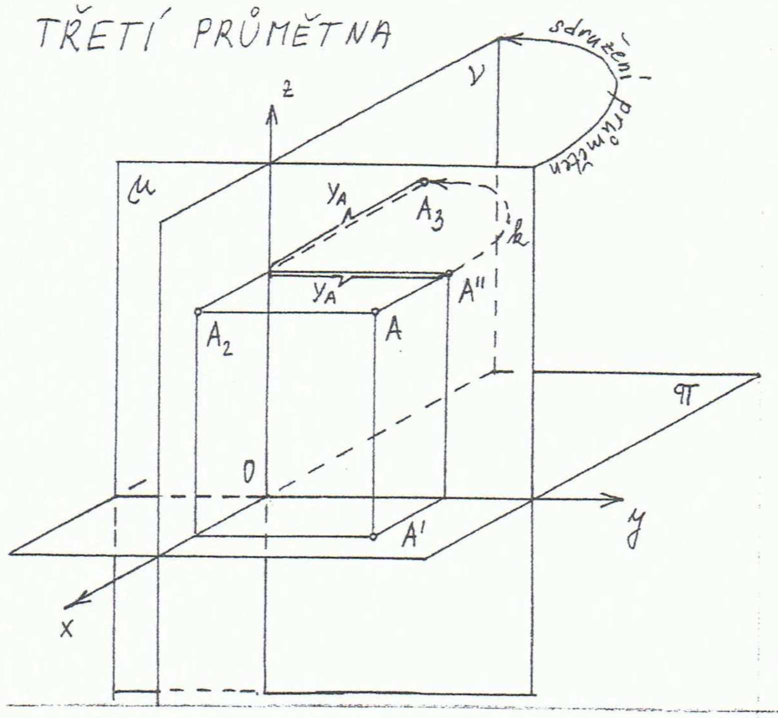


$x \parallel \beta \Rightarrow p^\beta \parallel n^\beta \parallel x$

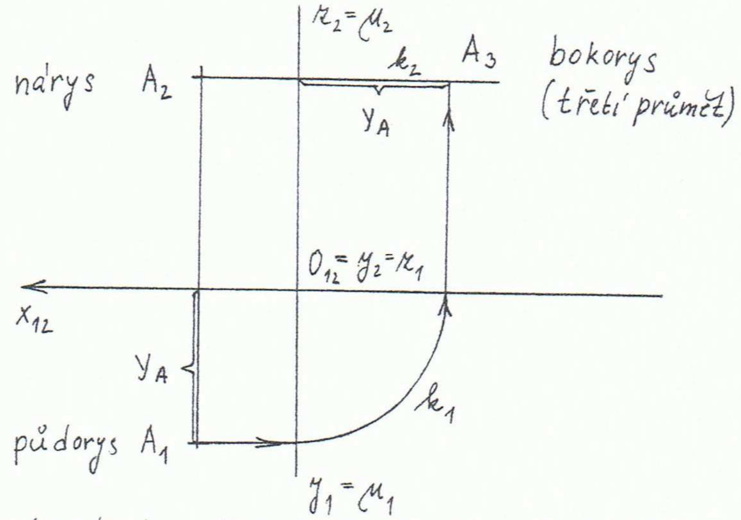
$a \subset \alpha$ lib., $p: M \in p,\ p \parallel a$



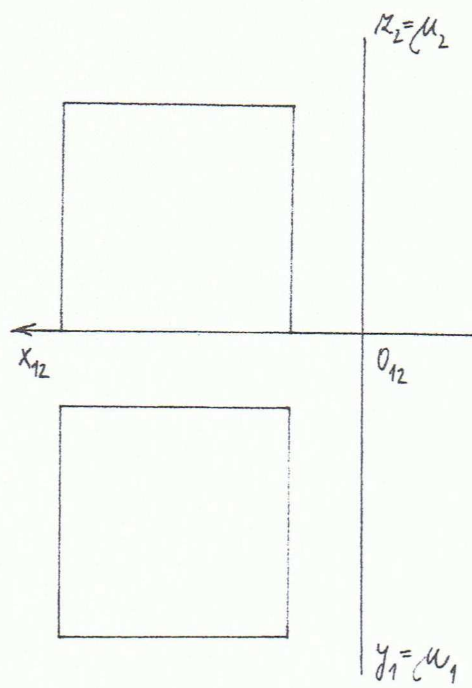
TŘETÍ PRŮMĚTNA



$\mu = (y, z)$ bokorysna
(třetí hlavní průmětna)



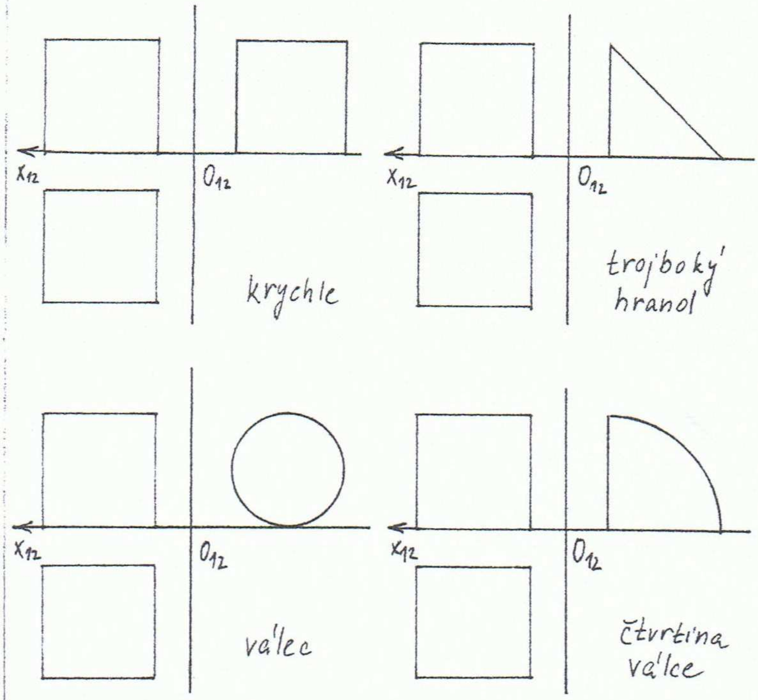
velmi často volíme třetí průmětnu ξ rovnoběžnou s μ, A_3 se pak nazývá třetí průmět bodu A



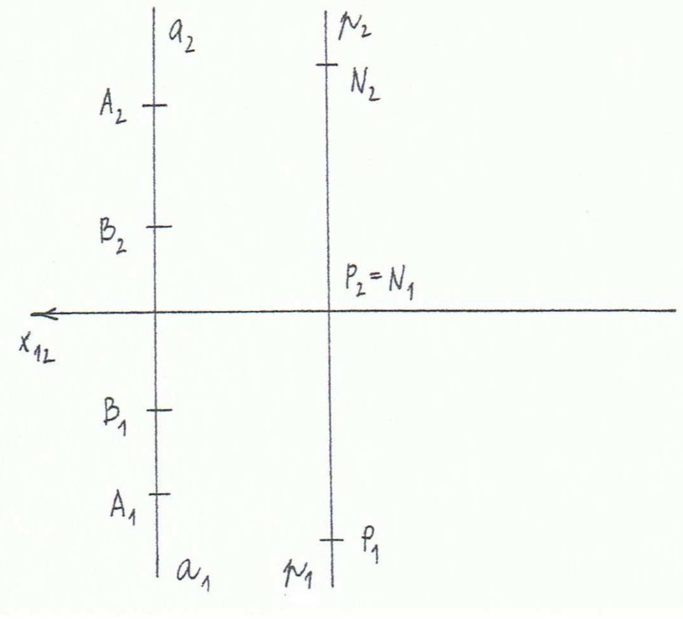
z půdorysu a nárysu objektu nelze určit o jaký objekt se jedná

vyžadovalo by to podrobný popis bodů (či útvarů) na úkor přehlednosti

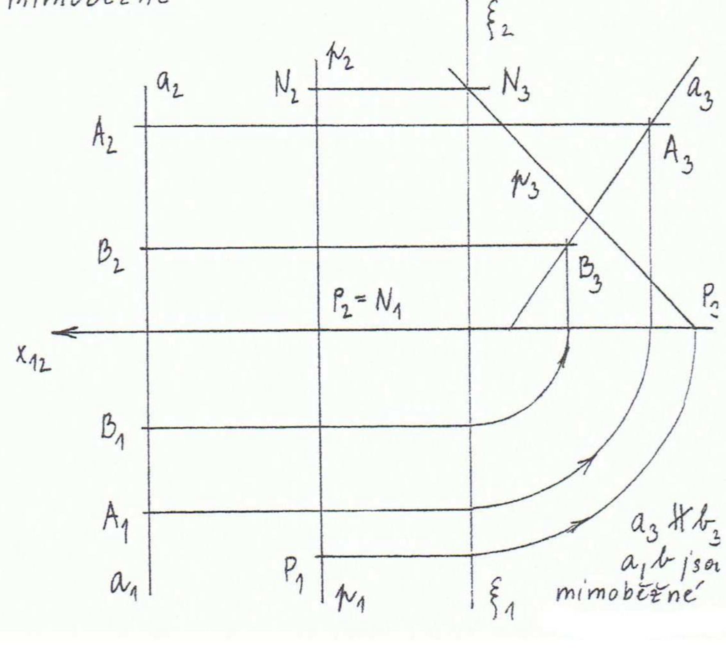
mnohdy stačí přidat bokorys objektu



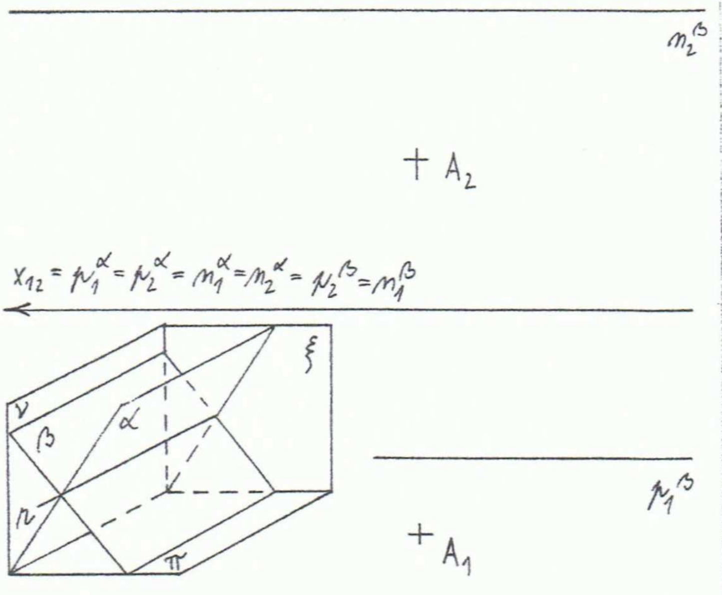
Určete vzájemnou polohu přímek $a = AB$, $p = PN$.



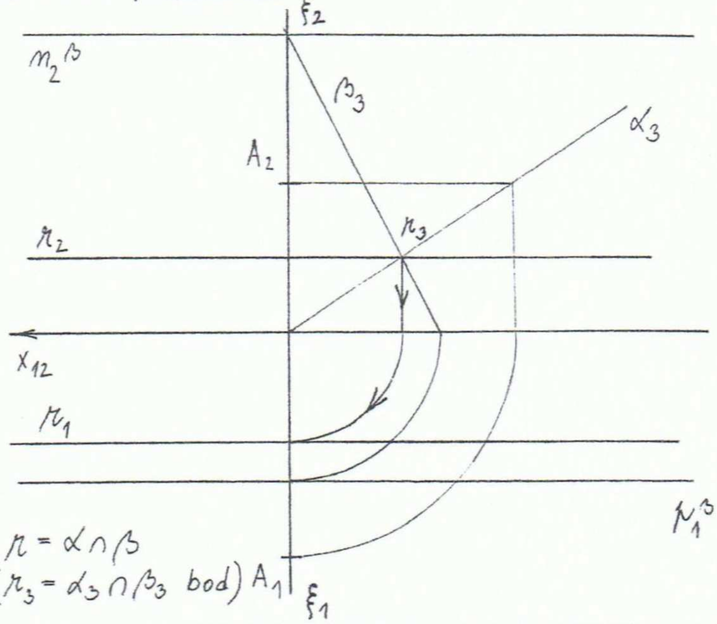
přímky a, p jsou buď rovnoběžné nebo mimoběžné



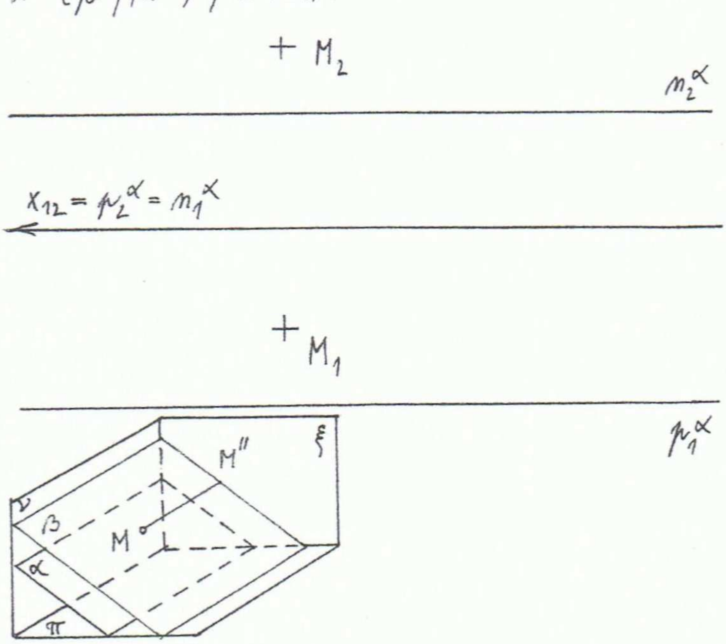
Zobrazte průsečnici rovin $\alpha = (A, x)$ a $\beta = (p_1^\beta, n^\beta)$.



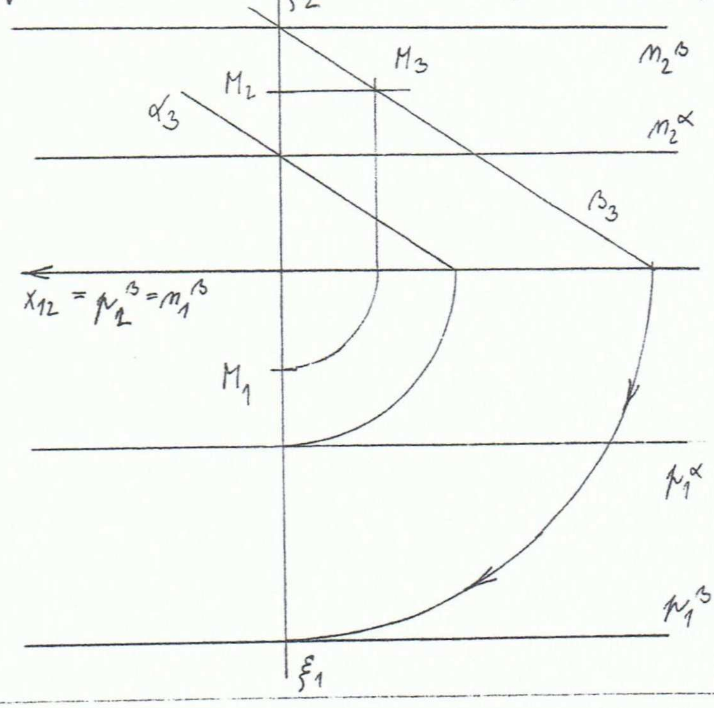
třetím průmětem roviny rovnoběžné s osou x je přímka



Sestrojte stopy roviny β: $M \in \beta$, $\beta \parallel \alpha$, $\alpha = (p^\alpha, n^\alpha)$ / $x \parallel \alpha$).



využijeme třetí průmětnu ξ $(M \in \xi, x \perp \xi)$



PŘÍKLADY III

Formát: A5 na šířku (nepoužívejte nedostupné body, tj. body mimo uvedený formát).

1. MP: O [10.5, 7.5]

   Zobrazte průsečík přímky p a roviny α.

   a) $\alpha = (5, 6, 4)$, $p = PQ$, P [3, 6, 3], Q [−2, 4, 4.5].

   b) $\alpha = (-5, 6, -2)$, $p = PQ$, P [1, 3, 1.5], Q [−1, 0, 5].

2. MP: O [10.5, 7.5]

   Zobrazte průsečnici rovin α a β.

   a) $\alpha = (-5, \infty, 4)$, $\beta = (b, c)$, $b = AB$, $c \parallel b$, $C \in c$, A [5, 4, 2.5], B [−3, 3, 4], C [2, 5, 6.5].

   b) $\alpha = (4, 120°, 120°)$, $\beta = (-4, 45°, 75°)$.

   c) $\alpha = (8, 105°, 120°)$, $\beta = (-3, 3.5, 5)$.

   d) $\alpha = (a, b)$, $a = AB$, $b = BC$, A [−4, 5, 3], B [3, 4, 1], C [−1, 1, 6], $\beta = (k, m)$, $k = KL$, $m \parallel k$, $M \in m$, K [2, 1, 5], L [−2, 6, 4], M [−4, 3, 6].

   e) $\alpha = (\infty, 3, 4)$, $\beta = (\infty, 6, 5)$.

   f) $\alpha = (\infty, 3, 5)$, $\beta = (B, x)$, B [−3, 5, 3].

3. MP: O [10.5, 7.5]

   Zobrazte horizontální a frontální hlavní přímku roviny α procházející bodem A.

   a) $\alpha = (b, c)$, $b = AB$, $c = AC$, A [0, 4, 4], B [6, 6, 5.5], C [−4, 5, 6].

   b) $\alpha = (\infty, 4, 5)$, $A \in \alpha$, A [−3, ?, 2].

   c) $\alpha \perp \pi$, $a = AB$, $a \subset \alpha$, A [2, 5, 4], B [−4, 1, 3].

   d) $\alpha = (B, x)$, B [3, 4, 6], $A \in \alpha$, A [−4, 2, ?].

4. MP: O [10.5, 7.5]

   Zobrazte stopy roviny β, která prochází bodem M a je rovnoběžná s rovinou α.

   a) $\alpha = (A, B, C)$, A [5, 6, 4], B [0, 4, 6], C [−6, 5, 3.5], M [0, 1, 3].

   b) $\alpha = (\infty, -2, -3)$, M [3, 1.5, 4].

   c) $\alpha = (A, x)$, A [−2, 3, 5], M [4, 4, 2].

   d) $\alpha = (5, 6, 3)$, M [−1, 4, −2].

5. MP: O [10.5, 7.5]

   Zobrazte přímku a procházející bodem A a rovnoběžnou s přímkou p; A [−1, 3, 2], $p = PQ$, P [2, 2, 0], Q [2, −1, 5]. Přímku a zobrazte tak, aby byla jednoznačně určena půdorysem a nárysem.

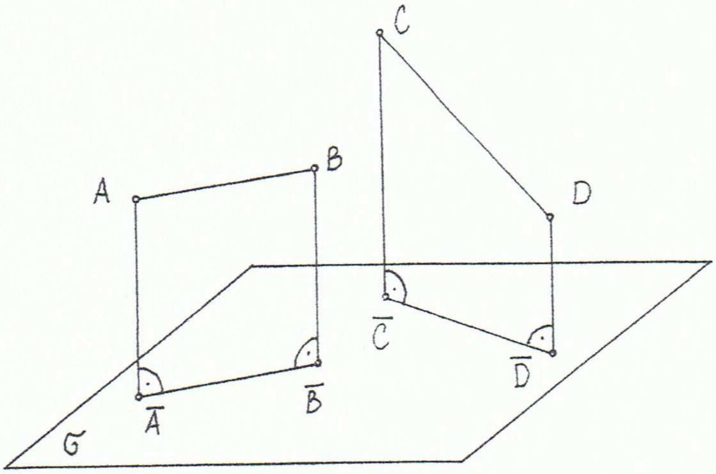
6. MP: O [10.5, 7.5]

   Zobrazte přímku a procházející bodem A a rovnoběžnou s rovinami α a β; A [0, 5, 3], $\alpha = (3, 4, 5)$, $\beta = (0, 60°, 150°)$.

Formát: A4 na výšku (nepoužívejte nedostupné body, tj. body mimo uvedený formát).

7. MP: O [10.5, 15]

   Jsou dány trojúhelníky ABC, DEF a úsečka QR; A [6, 6, 7], B [0, 10, 5], C [−7, 3, 10], D [2, 3, 3], E [−4, 7, 11.5], F [8, 13, 8], Q [2.5, 12, 7], R [2.5, 2, 7]. Zobrazte průsek trojúhelníků a průsečíky úsečky s trojúhelníky. Stanovte viditelnost v půdoryse i náryse.

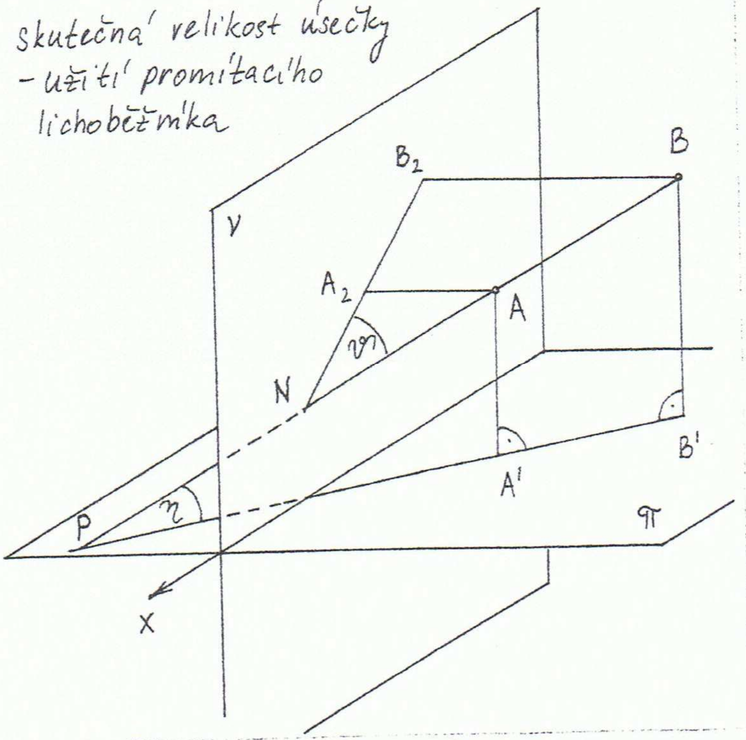


pravoúhlým průmětem úsečky AB rovnoběžné s průmětnou σ je úsečka $\bar{A}\bar{B}$ stejně dlouhá; $|AB| = |\bar{A}\bar{B}|$

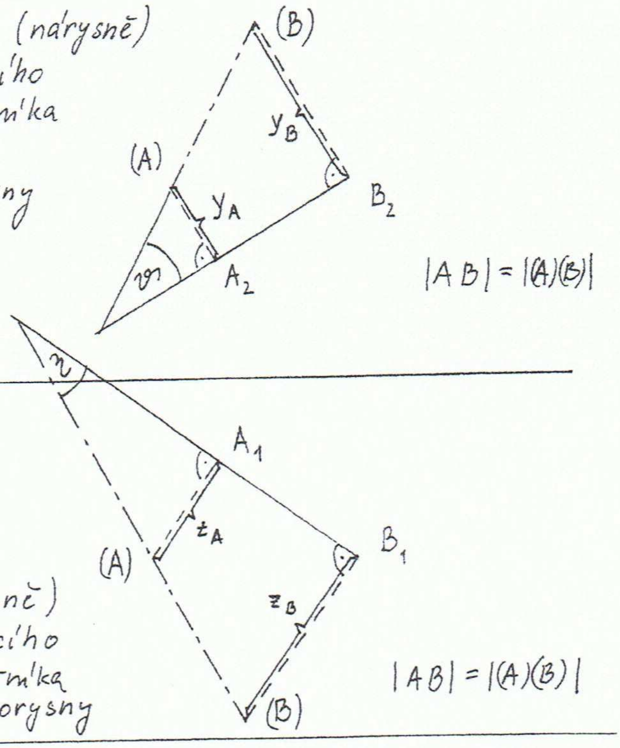
pravoúhlým průmětem úsečky CD, $CD \nparallel \sigma$, $CD \not\perp \sigma$ je úsečka $\bar{C}\bar{D}$ menší délky; $|\bar{C}\bar{D}| < |CD|$

pravoúhlý průmět úsečky

Skutečná velikost úsečky – užití promítacího lichoběžníka

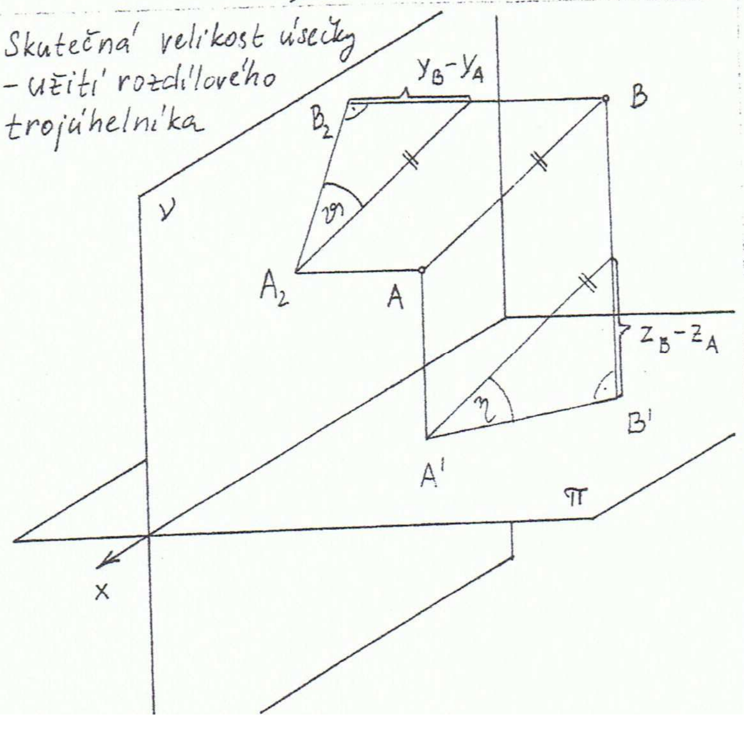


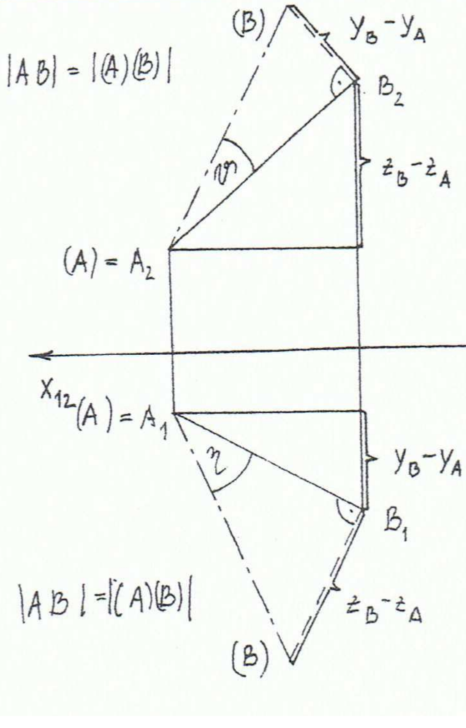
sklopení (nárysně) promítacího lichoběžníka ABB_2A_2 do nárysny



sklopení (půdorysně) promítacího lichoběžníka do půdorysny

Skutečná velikost úsečky – užití rozdílového trojúhelníka





$\vartheta \in \langle 0°, 90° \rangle$

$\vartheta = \measuredangle (AB, A_2B_2)$

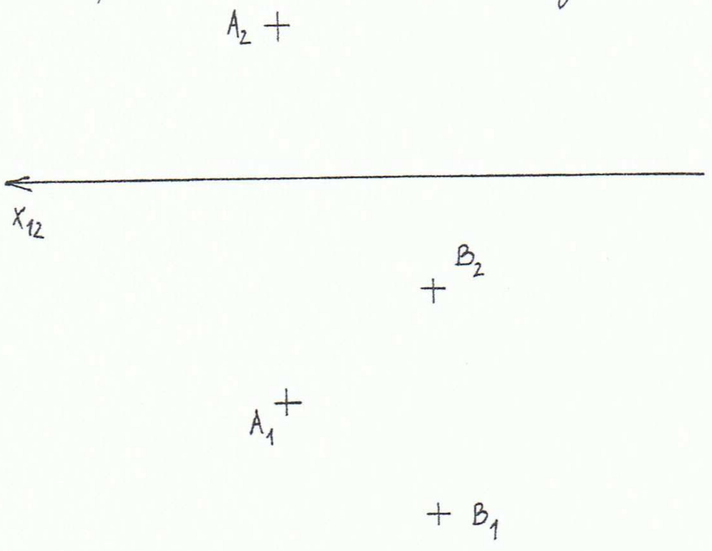
odchylka přímky AB od nárysny

$\eta \in \langle 0°, 90° \rangle$

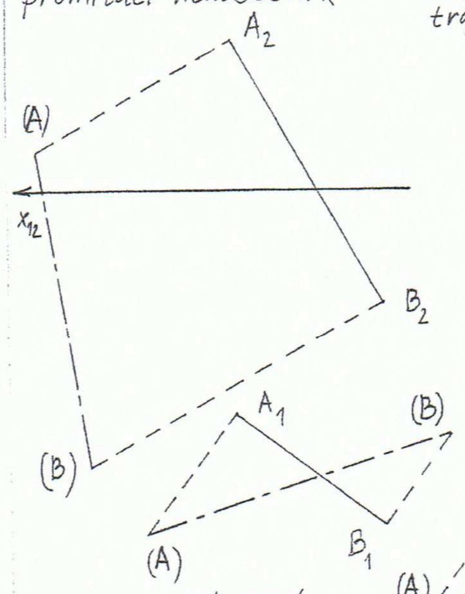
$\eta = \measuredangle (AB, A'B')$

odchylka přímky AB od půdorysny

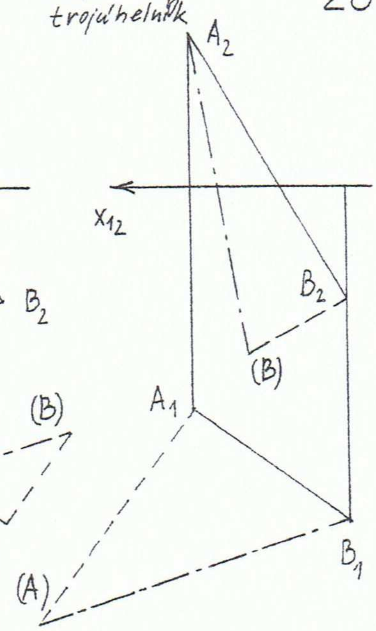
Sestrojte skutečnou velikost úsečky AB.



promítací lichoběžník

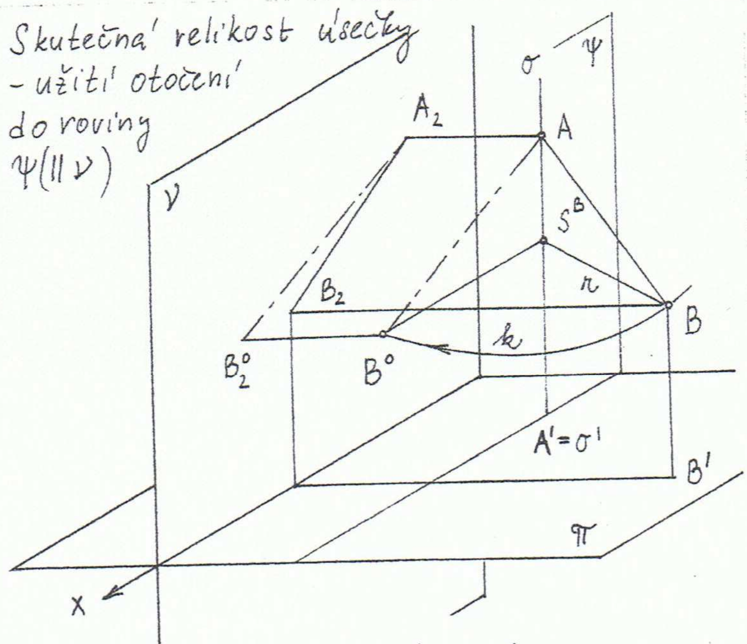


rozdílový trojúhelník



pozor na záporné souřadnice

Skutečná velikost úsečky - užití otočení do roviny $\psi (\parallel \nu)$

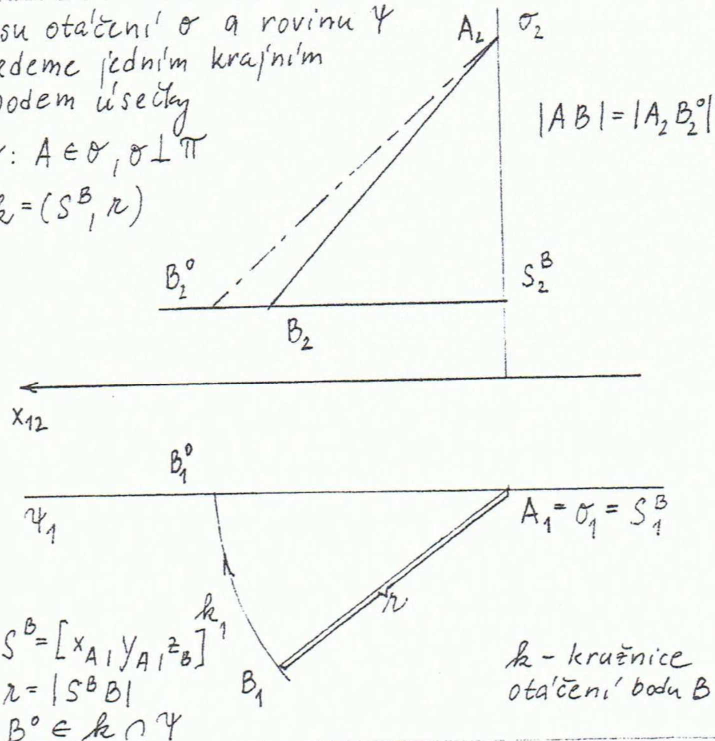


je-li úsečka rovnoběžná s nárysnou, je skutečná velikost úsečky rovna velikosti nárysu úsečky

osu otáčení σ a rovinu ψ vedeme jedním krajním bodem úsečky

$\sigma: A \in \sigma,\ \sigma \perp \pi$

$k = (S^B, r)$

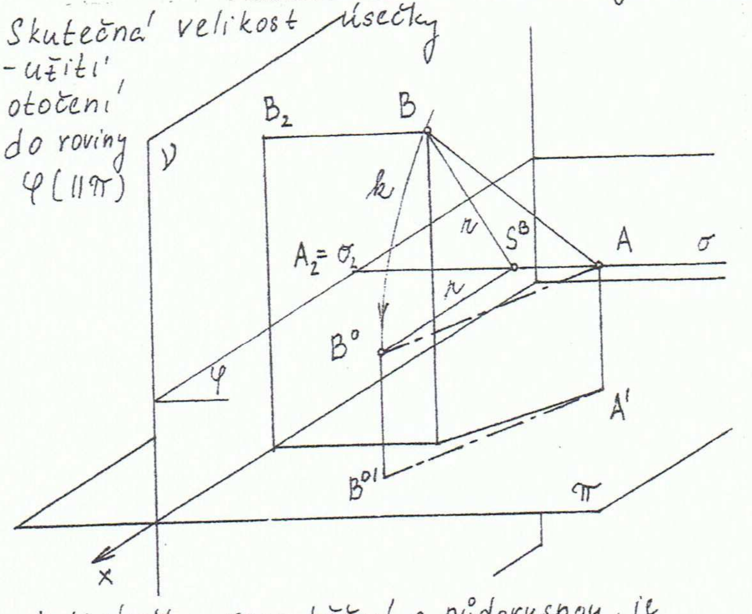


$S^B = [x_A, y_A, z_B]$

$r = |S^B B|$

$B^0 \in k \cap \psi$

Skutečná velikost úsečky - užití otočení do roviny $\varphi (\parallel \pi)$

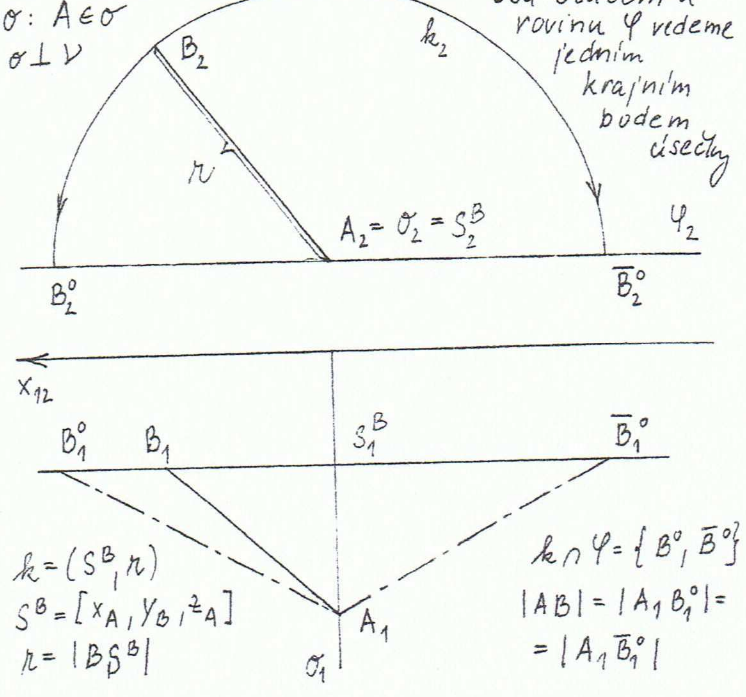


je-li úsečka rovnoběžná s půdorysnou, je skutečná velikost úsečky rovna velikosti půdorysu úsečky

$\sigma: A \in \sigma$

$\sigma \perp \nu$

osu otáčení a rovinu φ vedeme jedním krajním bodem úsečky



$k = (S^B, r)$

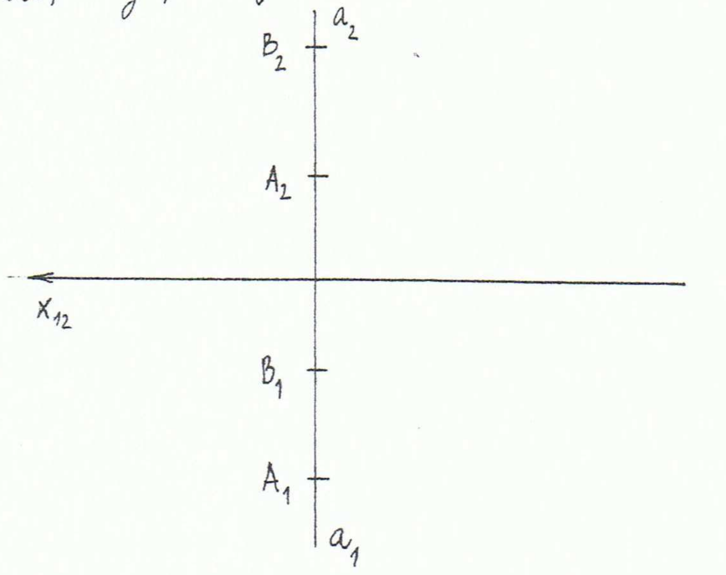
$S^B = [x_A, y_B, z_A]$

$r = |B S^B|$

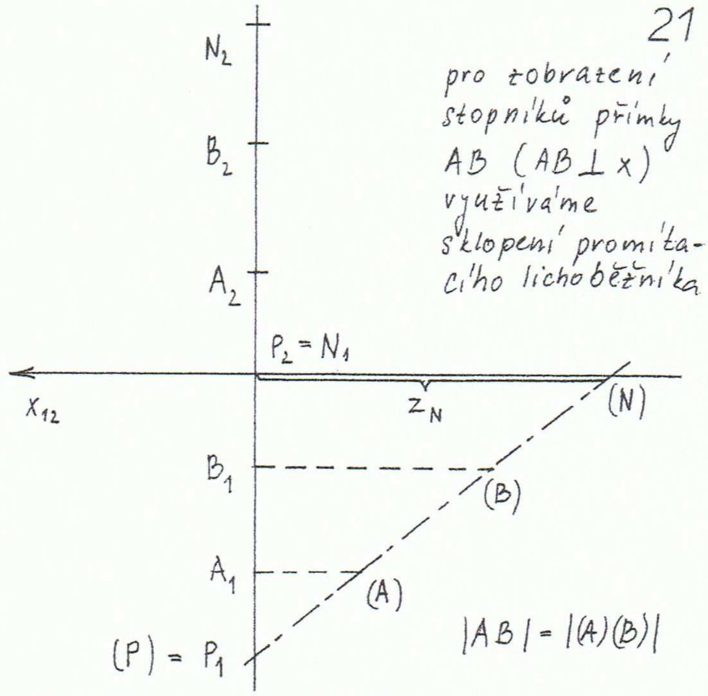
$k \cap \varphi = \{B^0, \overline{B}^0\}$

$|AB| = |A_1 B_1^0| =$
$= |A_1 \overline{B}_1^0|$

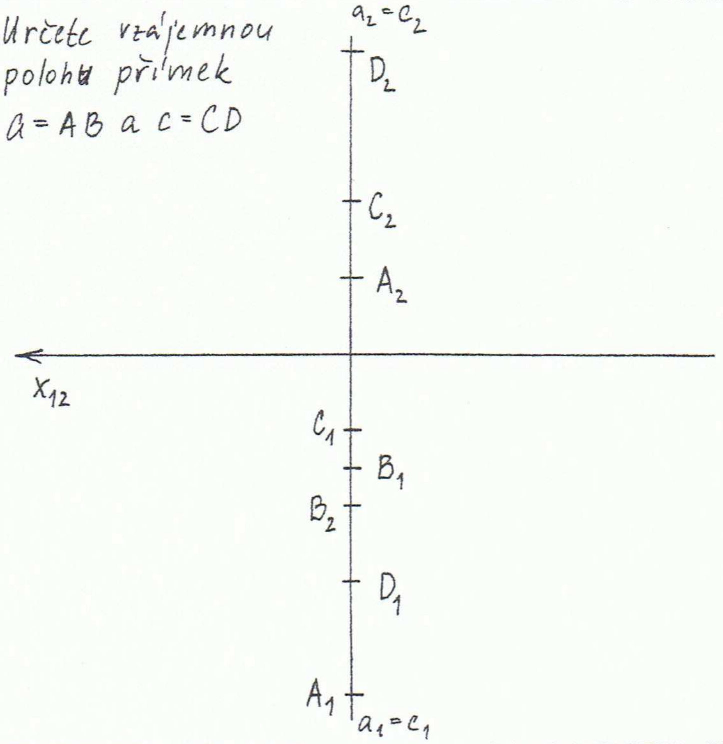
Určete skutečnou velikost úsečky AB a zobrazte stopníky přímky $a = AB$.



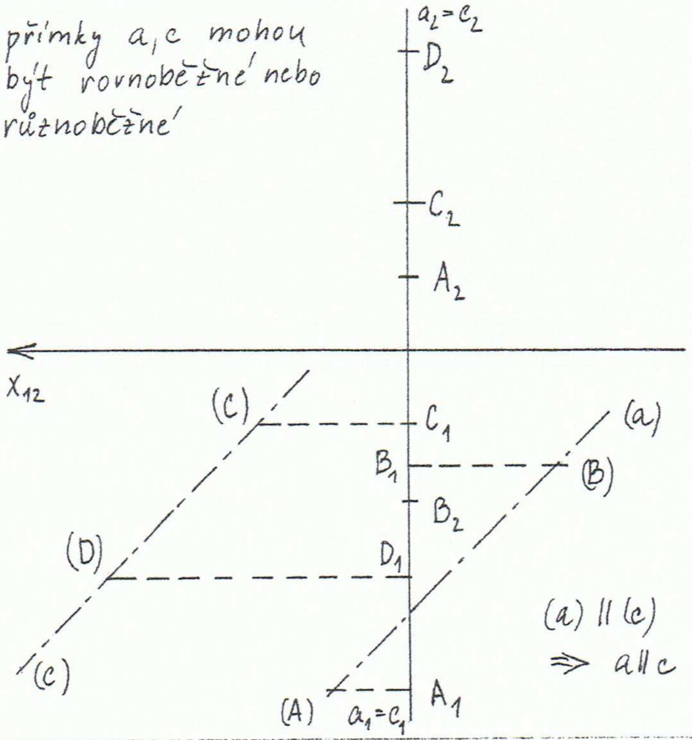
pro zobrazení stopníků přímky AB ($AB \perp x$) využíváme sklopení promítacího lichoběžníka



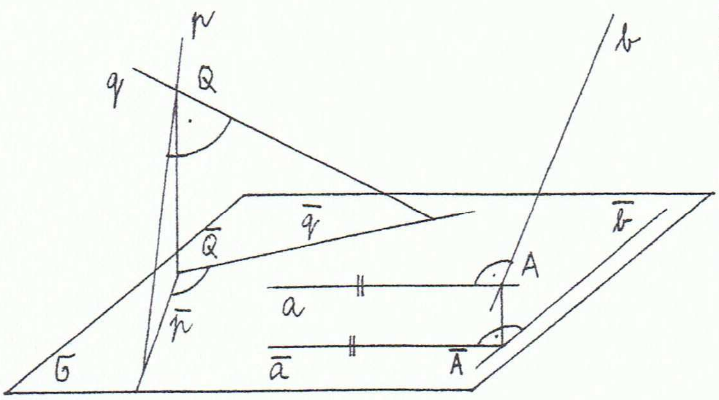
Určete vzájemnou polohu přímek $a = AB$ a $c = CD$



přímky a, c mohou být rovnoběžné nebo různoběžné



PRAVOÚHLÝ PRŮMĚT KOLMÝCH PŘÍMEK



σ - průmětna

pravoúhlým průmětem dvou kolmých přímek a, b (z nichž žádná není kolmá k průmětně σ) jsou kolmé přímky $\bar{a}, \bar{b}$ právě tehdy, když alespoň jedna z přímek a, b je rovnoběžná s průmětnou σ

$p \not\perp \sigma$, $q \not\perp \sigma$, $p \nparallel \sigma$, $q \nparallel \sigma$

$\measuredangle(p, q) = 90°$ $\measuredangle(\bar{p}, \bar{q}) \neq 90°$

($\bar{p}$ - pravoúhlý průmět p do σ

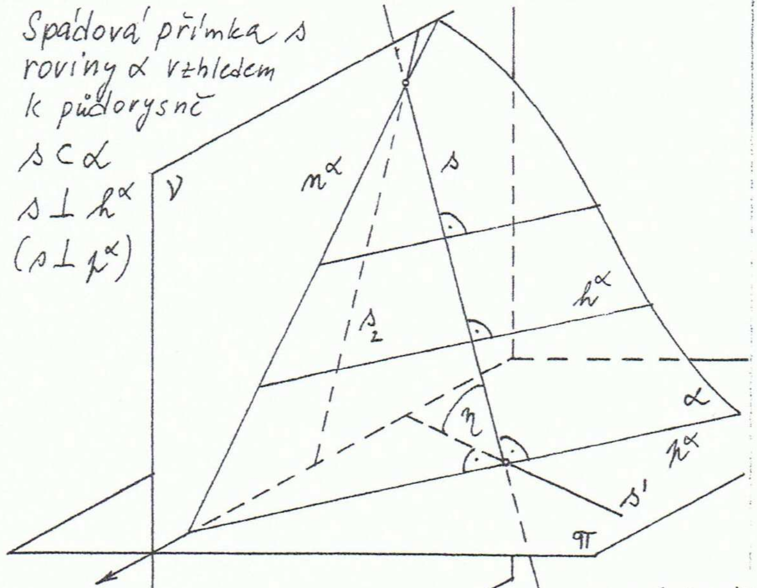
$\bar{q}$ - pravoúhlý průmět q do σ

Spádová přímka s roviny α vzhledem k půdorysně

$s \subset \alpha$

$s \perp h^\alpha$

$(s \perp p^\alpha)$

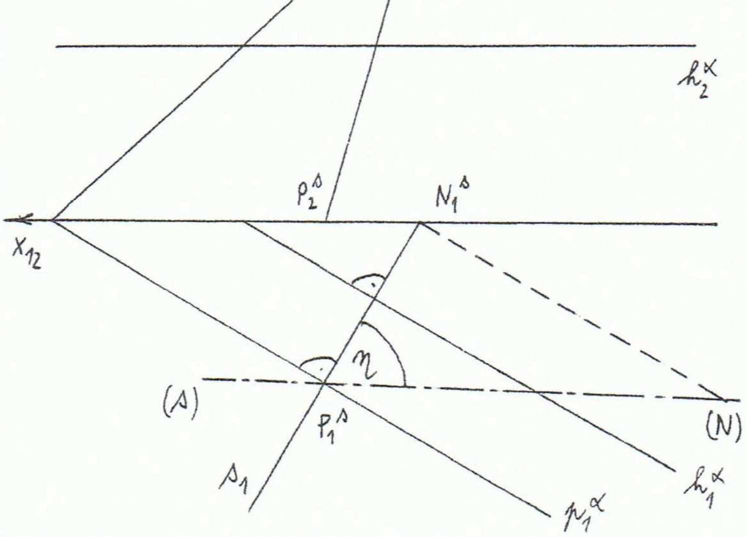


$\eta \in \langle 0°, 90° \rangle$

$\eta = \sphericalangle (s, s')$

odchylka roviny α od π

$$\left. \begin{array}{l} s \perp h^\alpha \\ h^\alpha \parallel \pi \\ (p^\alpha \parallel \pi) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} s_1 \perp h_1^\alpha \\ (s_1 \perp p_1^\alpha) \end{array}$$

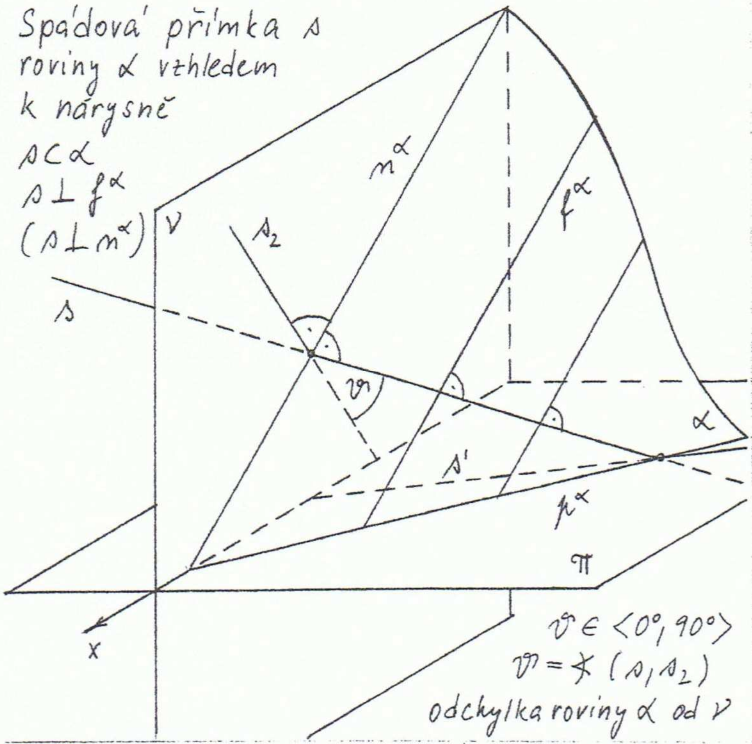


Spádová přímka s roviny α vzhledem k nárysně

$s \subset \alpha$

$s \perp f^\alpha$

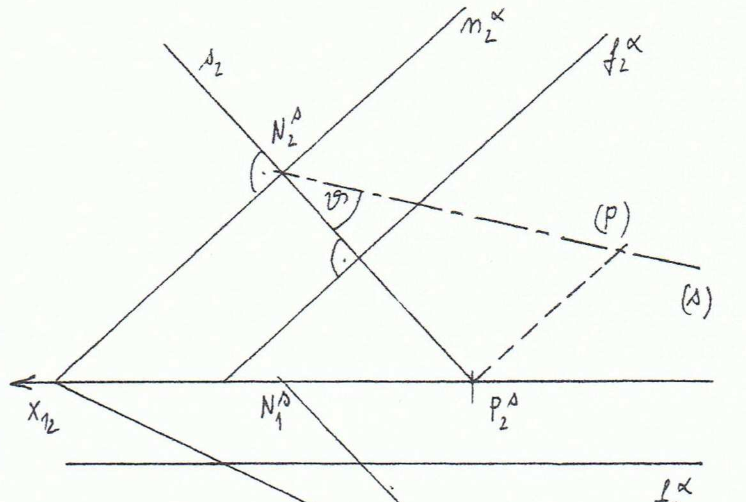
$(s \perp n^\alpha)$



$\vartheta \in \langle 0°, 90° \rangle$

$\vartheta = \sphericalangle (s, s_2)$

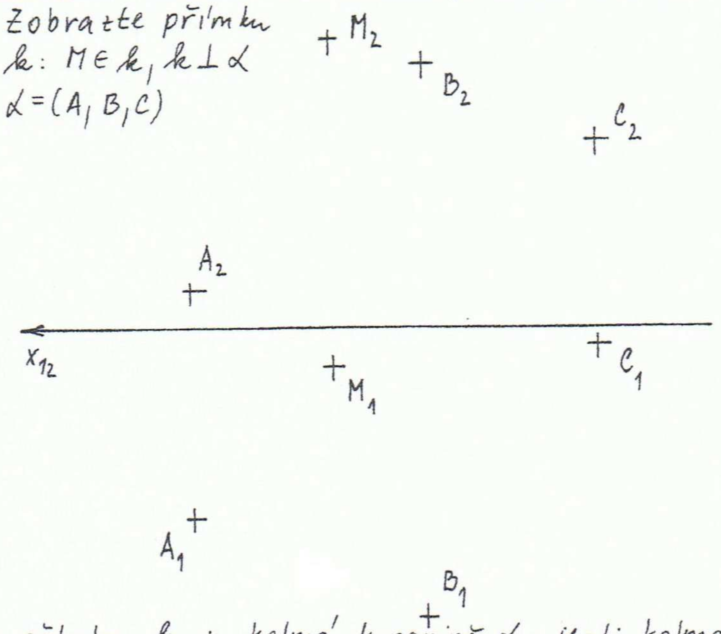
odchylka roviny α od ν



$$\left. \begin{array}{l} s \perp f^\alpha \\ f^\alpha \parallel \nu \\ (n^\alpha \parallel \nu) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} s_2 \perp f_2^\alpha \\ (s_2 \perp n_2^\alpha) \end{array}$$

Zobrazte přímku k: $M \in k$, $k \perp \alpha$

$\alpha = (A, B, C)$

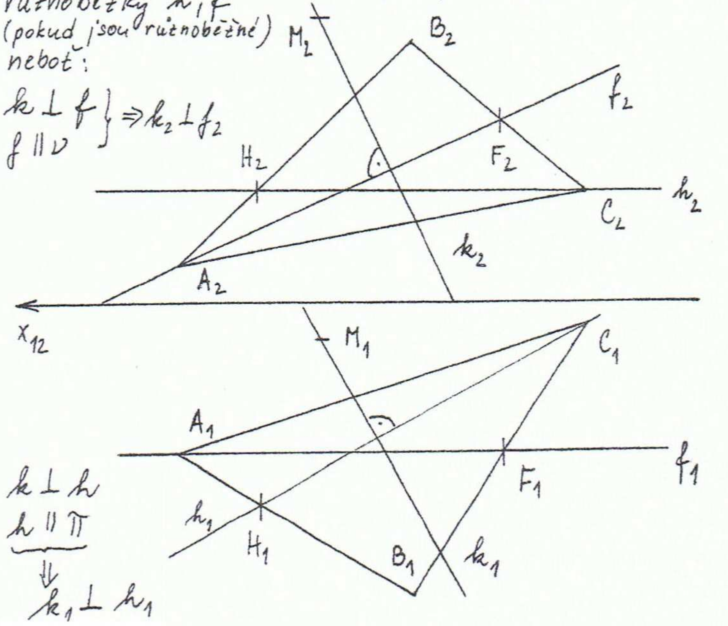


přímka k je kolmá k rovině α, je-li kolmá ke všem přímkám roviny α

přímka je kolmá k rovině právě tehdy, když je kolmá ke dvěma různoběžkám roviny, výhodné je zvolit různoběžky h, f (pokud jsou různoběžné)

neboť:

$$\left. \begin{array}{l} k \perp f \\ f \parallel \nu \end{array} \right\} \Rightarrow k_2 \perp f_2$$

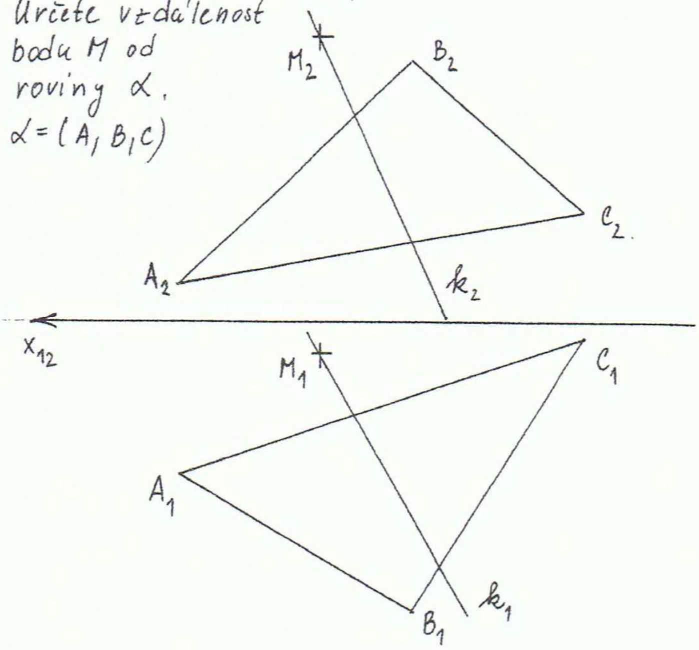


$$\left. \begin{array}{l} k \perp h \\ \underbrace{h \parallel \pi} \end{array} \right.$$

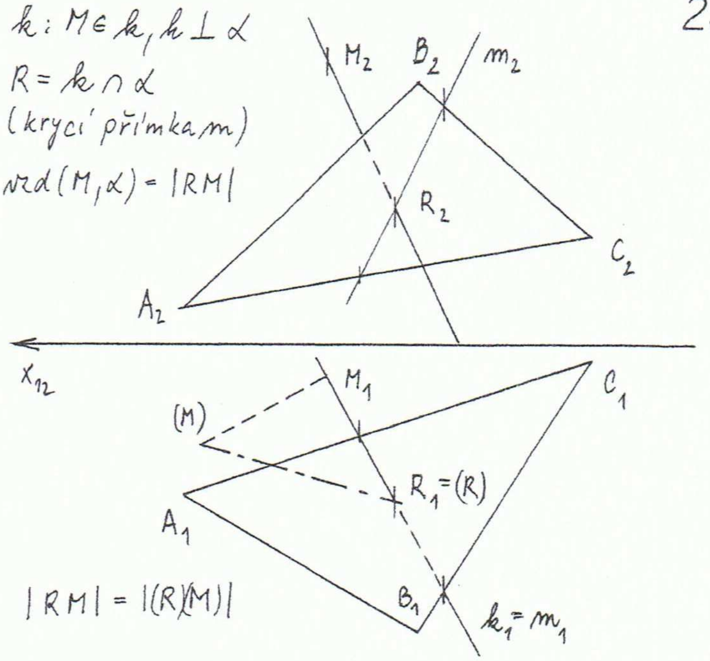
$\Downarrow$

$k_1 \perp h_1$

předchozí konstrukci využíváme v úloze:
Určete vzdálenost bodu M od roviny α.
$\alpha = (A, B, C)$

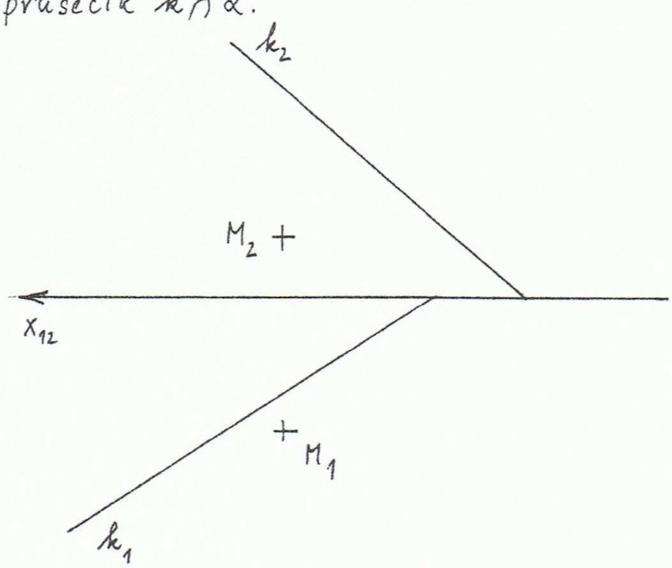


$k: M \in k, k \perp \alpha$
$R = k \cap \alpha$
(krycí přímka m)
$vzd(M, \alpha) = |RM|$

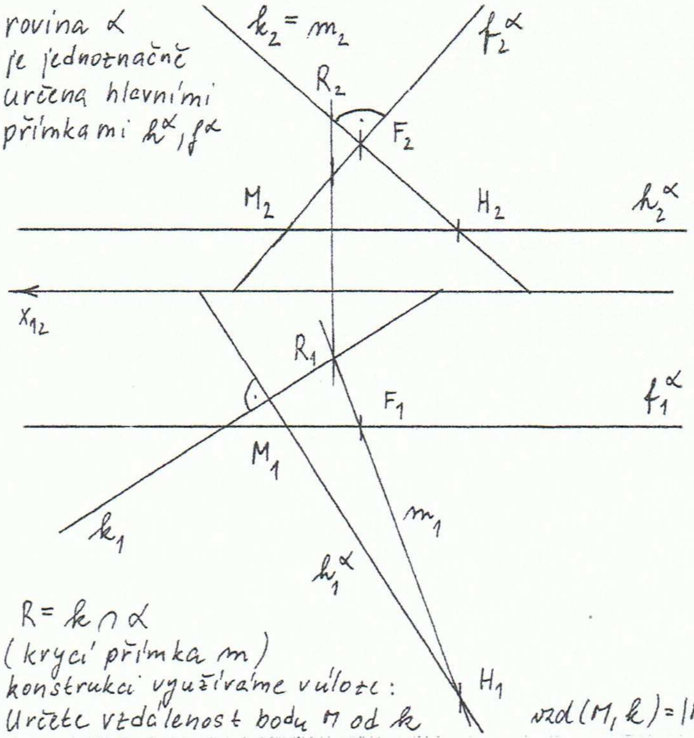


$|RM| = |(R)(M)|$

Určete rovinu α: $M \in \alpha$, $k \perp \alpha$. Zobrazte průsečík $k \cap \alpha$.



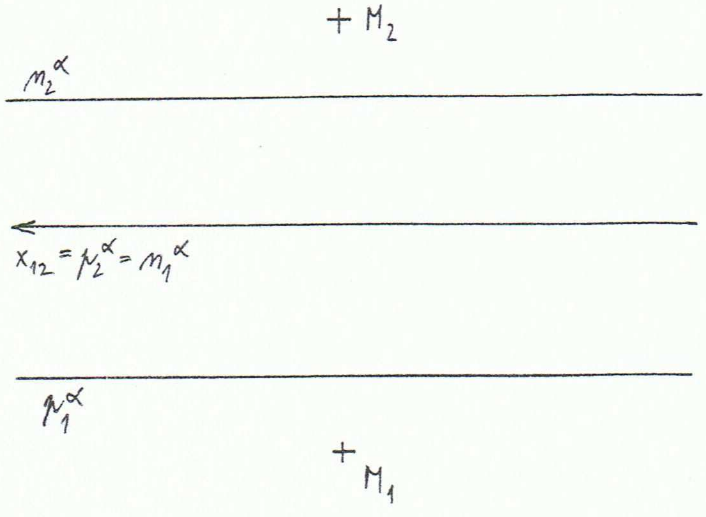
rovina α je jednoznačně určena hlavními přímkami h^α, f^α



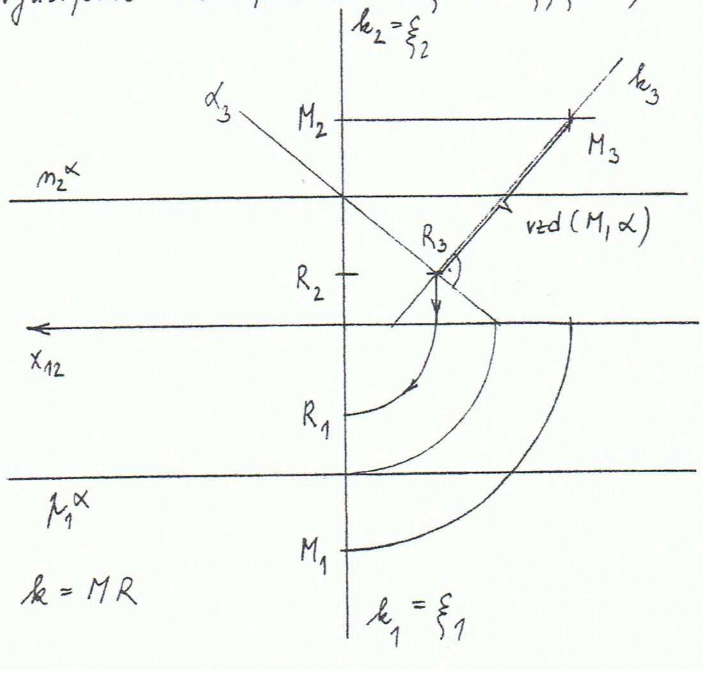
$R = k \cap \alpha$
(krycí přímka m)
konstrukci využíváme v úloze:
Určete vzdálenost bodu M od k

$vzd(M, k) = |MR|$

Sestrojte sdružené průměty přímky k: $M \in k$, $k \perp \alpha$.

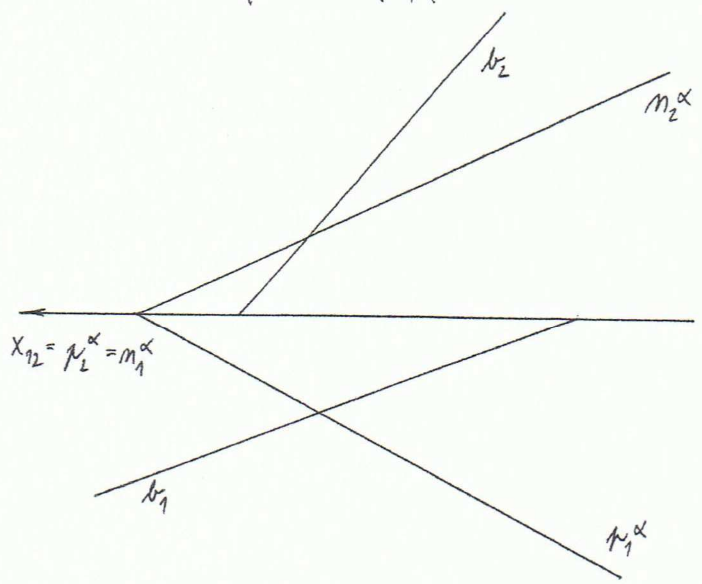


využijeme třetí průmětnu ξ $(M \in \xi, \xi \perp x)$

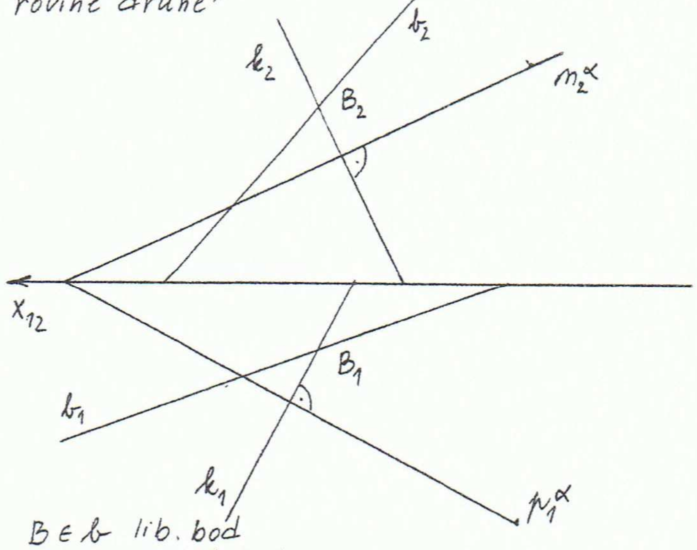


$k = MR$

Určete rovinu β: $b \subset \beta, \beta \perp \alpha$.



dvě roviny jsou vzájemně kolmé, jestliže jedna rovina obsahuje přímku kolmou k rovině druhé

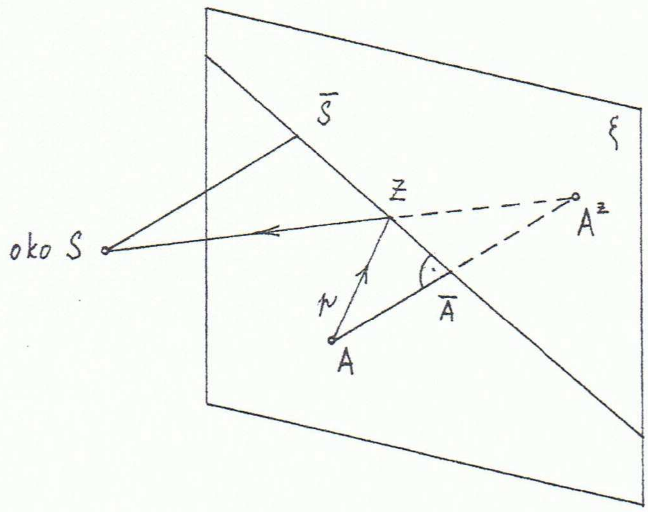


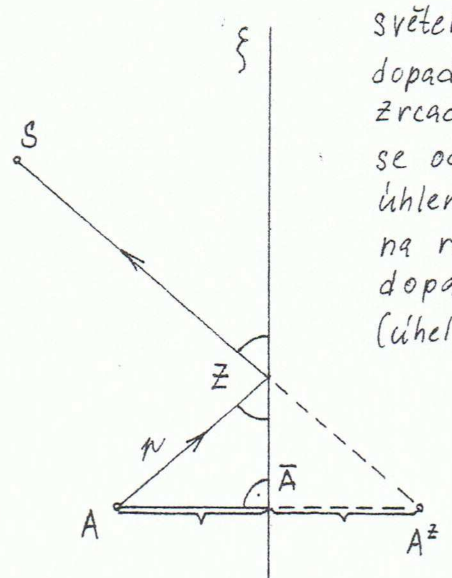
$B \in b$ lib. bod

$k: B \in k, k \perp \alpha$

$\beta = (b, k)$ rovina β je určena různoběžkami b, k

ZRCADLENÍ





světelný paprsek p dopadající na rovinu zrcadla ξ v bodě Z se odrazí pod týmž úhlem, pod kterým na rovinu zrcadla dopadá (úhel dopadu = úhel odrazu)

$|A\bar{A}| = |\bar{A}A^z|$

ξ - rovina zrcadla

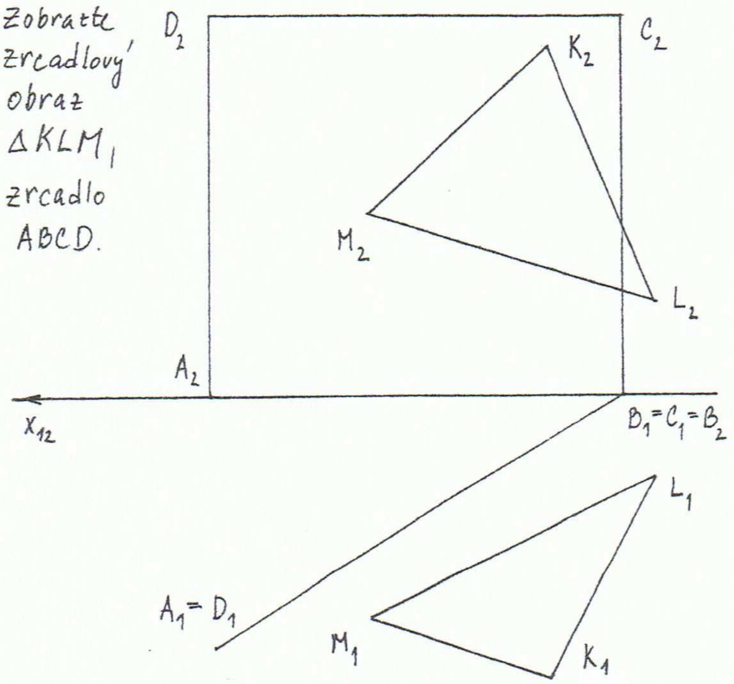
$\bar{A}$ - pravoúhlý průmět bodu A do ξ

$\bar{S}$ - pravoúhlý průmět bodu S do ξ

A^z - zrcadlový obraz bodu A

$A^zA \perp \xi$, A^z je souměrný k A podle ξ

Zobrazte zrcadlový obraz $\triangle KLM$, zrcadlo ABCD.



$\xi = (A, B, C)$

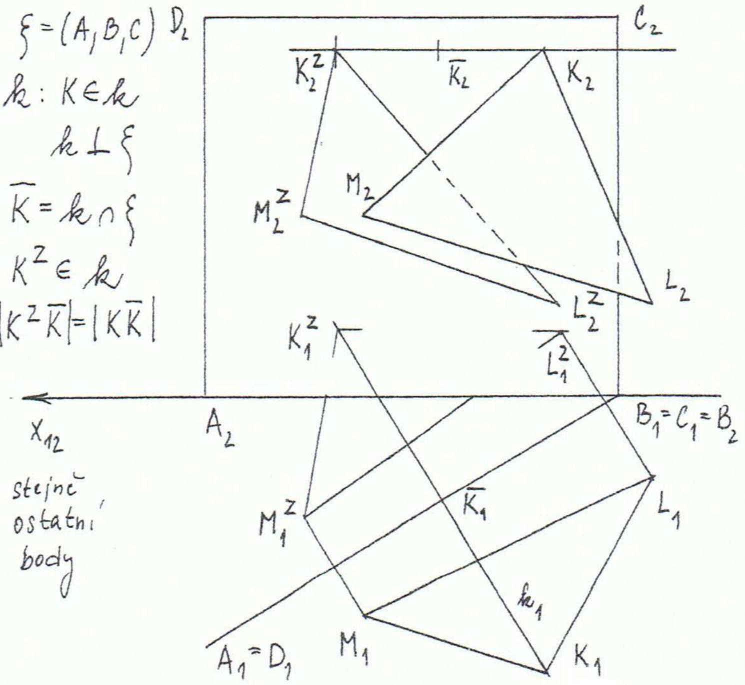
$k: K \in k$

$k \perp \xi$

$\bar{K} = k \cap \xi$

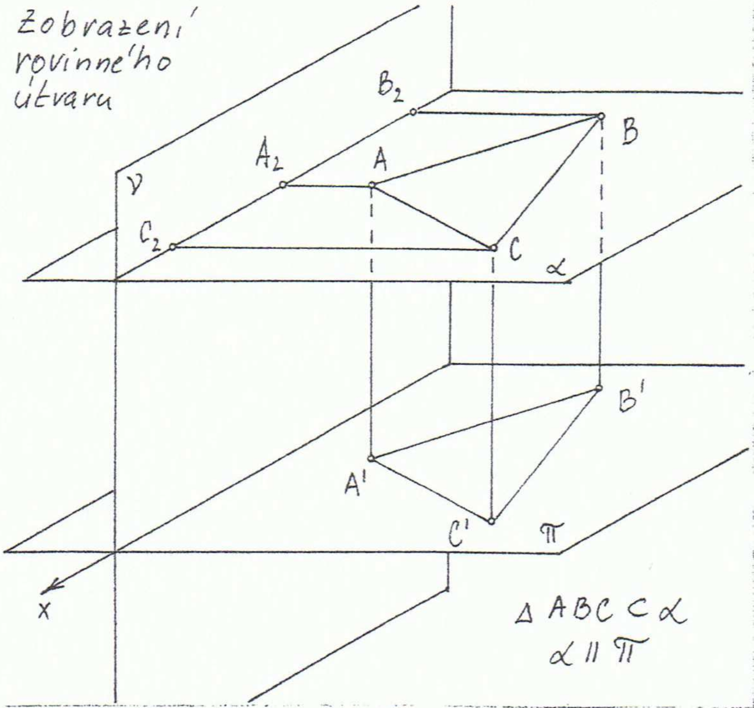
$K^z \in k$

$|K^z\bar{K}| = |K\bar{K}|$



stejně ostatní body

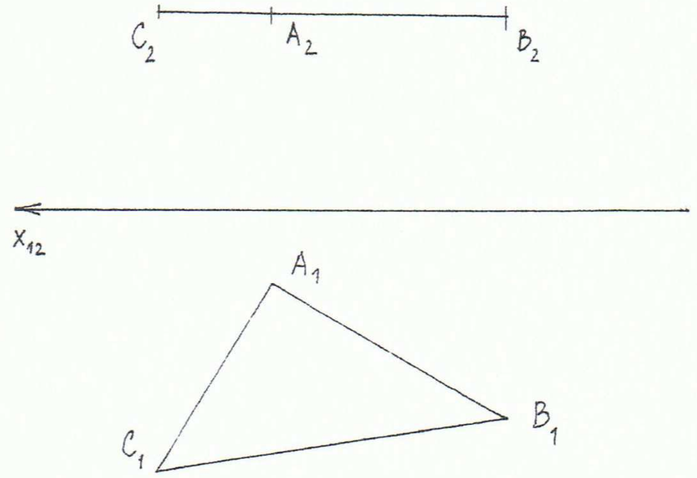
Zobrazení rovinného útvaru



$\triangle ABC \subset \alpha$

$\alpha \parallel \pi$

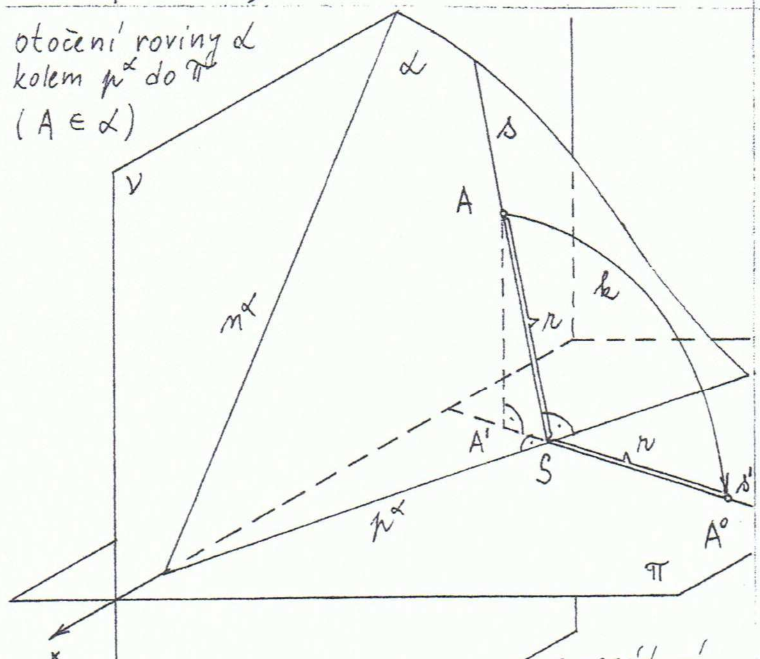
$\alpha \parallel \pi$ nárysem $\triangle ABC$ je úsečka



$\triangle A_1B_1C_1$ je shodný s $\triangle ABC$

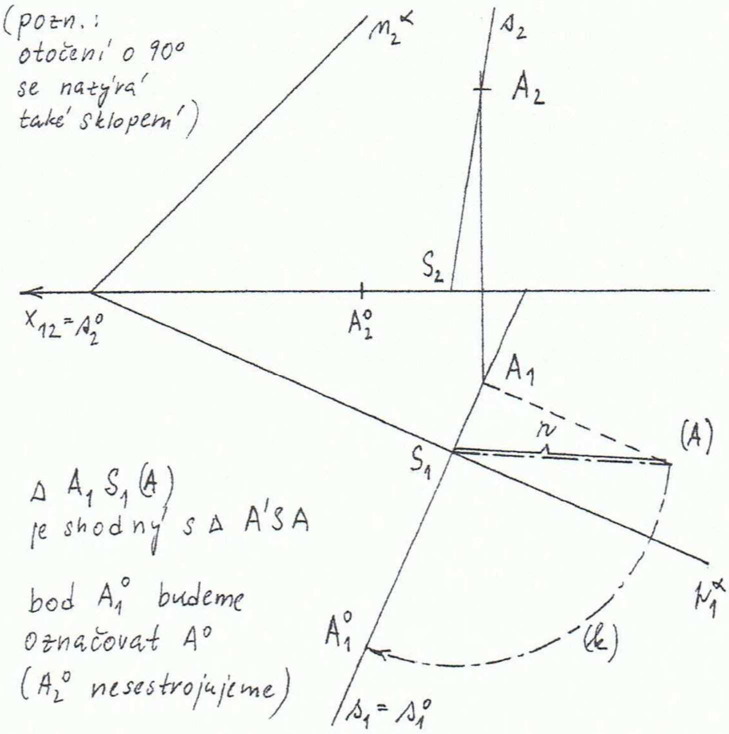
(analogicky pro $\alpha \parallel \nu$)

otočení roviny α kolem p^α do π ($A \in \alpha$)



s - spádová přímka roviny α vzhledem k π

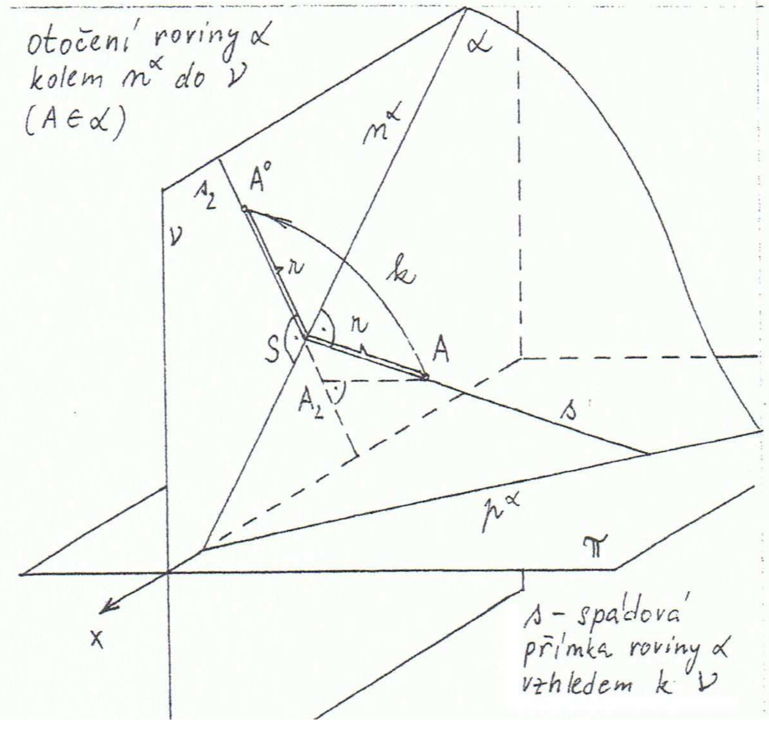
(pozn.: otočení o 90° se nazývá také sklopení)



$\triangle A_1 S_1 (A)$ je shodný s $\triangle A'SA$

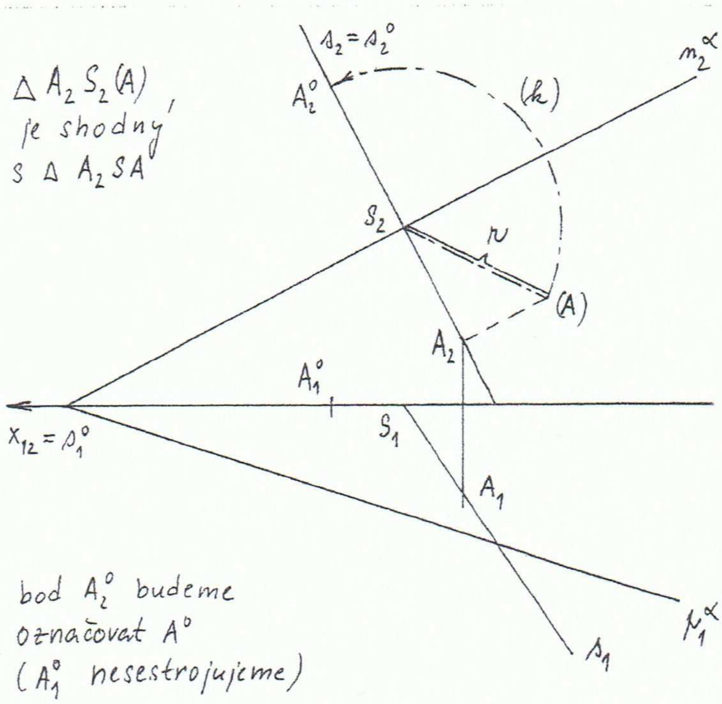
bod A_1^0 budeme označovat A^0 (A_2^0 nesestrojujeme)

otočení roviny α kolem n^α do ν ($A \in \alpha$)



s - spádová přímka roviny α vzhledem k ν

$\triangle A_2 S_2 (A)$ je shodný s $\triangle A_2 S A$



bod A_2^0 budeme označovat A^0 (A_1^0 nesestrojujeme)

PŘÍKLADY IV

Formát: A5 na šířku (nepoužívejte nedostupné body, tj. body mimo uvedený formát).

1. MP: $O\,[10.5,\ 7.5]$

   Zobrazte přímku k, která prochází bodem M a je kolmá k rovině α.

   a) $\alpha = (2,\ 1,\ -3)$, $M \in \alpha$, $M\,[-4,\ ?,\ 3]$.

   b) $\alpha = (a,\ b)$, $a = AM$, $b = BM$, $A\,[6,\ 6,\ 5.5]$, $B\,[-4,\ 5,\ 6]$, $M\,[0,\ 4,\ 4]$.

   c) $\alpha = (\infty,\ 5,\ 3)$, $M\,[2,\ 4,\ 5]$. Přímku k zobrazte tak, aby byla jednoznačně určena půdorysem a nárysem.

   d) $\alpha = (A,\ x)$, $A\,[5,\ 3,\ 4]$, $M \in \alpha$, $M\,[-3,\ 4,\ ?]$. Přímku k zobrazte tak, aby byla jednoznačně určena půdorysem a nárysem.

2. MP: $O\,[10.5,\ 7.5]$

   Zobrazte stopy roviny α, která prochází bodem M a je kolmá k přímce $a = AB$.

   a) $a = AB$, $A\,[3,\ 4,\ 2]$, $B\,[-2,\ 2,\ 6]$, $M\,[0,\ 5,\ 2]$.

   b) $a = AB$, $A\,[-3,\ 3,\ 2]$, $B\,[-3,\ 6,\ 5]$, $M\,[2,\ 1.5,\ 4]$.

3. MP: $O\,[10.5,\ 7.5]$

   a) Je dána rovina $\alpha = (3,\ 4,\ 5)$ a bod $A\,[-1,\ 3,\ ?]$, $A \in \alpha$. Zobrazte přímku k, procházející bodem A a kolmou k rovině α. Dále zobrazte body K, L na přímce k, jejichž vzdálenost od roviny α je 4.

   b) Je dána rovina $\alpha = (A,\ B,\ C)$ a bod $M \in \alpha$, $A\,[2.5,\ 4,\ 2]$, $B\,[-1.5,\ 5,\ 5]$, $C\,[-2.5,\ 1.5,\ 2]$, $M\,[0,\ 3.5,\ ?]$. Zobrazte přímku k, procházející bodem M a kolmou k rovině α.Dále zobrazte bod $K \in k$, $|KM| = 4$, $z_K > z_M$.

4. MP: $O\,[10.5,\ 7.5]$

   Určete vzdálenost bodu M od přímky $a = AB$.

   a) $M\,[2,\ 5,\ 2]$, $A\,[-4,\ 5,\ 0]$, $B\,[0,\ 1,\ 6]$.

   b) $M\,[0,\ 5,\ -2]$, $a = x$.

   c) $M\,[0,\ 2,\ 4]$, $A\,[2,\ 3,\ 1]$, $B\,[-2,\ 3,\ 1]$.

5. MP: $O\,[10.5,\ 7.5]$

   Určete vzdálenost bodu M od roviny α.

   a) $M\,[-4,\ 6,\ 4]$, $\alpha = (-4,\ 3,\ 2)$.

   b) $M\,[6,\ 6,\ 2]$, $\alpha = (3,\ 5.5,\ \infty)$.

6. MP: $O\,[10.5,\ 7.5]$

   a) Určete vzdálenost rovnoběžných přímek a, c; $a = AB$, $C \in c$, $A\,[4,\ 3,\ 2]$, $B\,[0,\ 1,\ 5]$, $C\,[0,\ 4,\ 2]$.

   b) Určete vzdálenost rovnoběžných rovin $\alpha = (-7,\ 5,\ 6)$, $\beta = (0,\ ?,\ ?)$.

7. MP: $O\,[10.5,\ 7.5]$

   Je dán rovnoběžník $ABCD$, $A\,[-3,\ 3,\ 3]$, $B\,[-1,\ 5,\ 5]$, $C\,[3,\ 4,\ 4]$. Zobrazte kolmice ve vrcholech rovnoběžníka k jeho rovině, naneste na tyto kolmice na obě strany od roviny rovnoběžníka délku 2 a zobrazte takto vzniklý hranol. Stanovte viditelnost hranolu v půdoryse i náryse.

Formát: A4 na výšku (nepoužívejte nedostupné body, tj. body mimo uvedený formát).

8. MP: $O\,[\mathbf{7.5},\ \mathbf{15}]$

   Zobrazte zrcadlový obraz trojúhelníka ABC, $A\,[1.5,\ 6.5,\ 10]$, $B\,[-2,\ 3,\ 5]$, $C\,[-4,\ 11,\ 9]$. Rovina zrcadla je $\zeta = (4,\ 6.5,\ 4)$.

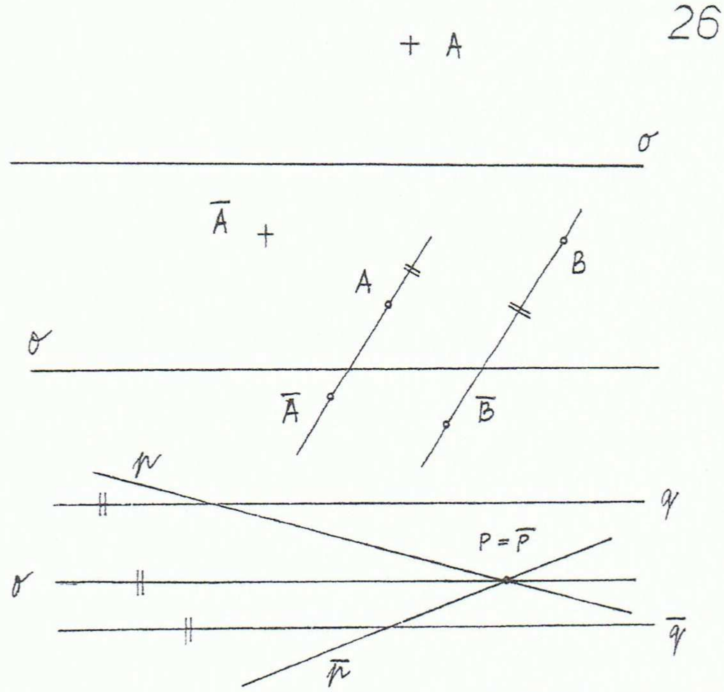
Při otáčení roviny budeme využívat geometrické zobrazení v rovině, které se nazývá osová afinita. Obraz bodu A v tomto zobrazení označme $\bar{A}$.

Osová afinita v rovině je jednoznačně určena osou afinity o a dvojicí odpovídajících si bodů A (vzor) a $\bar{A}$ (obraz) ($A \neq \bar{A}$, $A \notin o$, $\bar{A} \notin o$), značíme: $\mathcal{A}(o, A \to \bar{A})$.

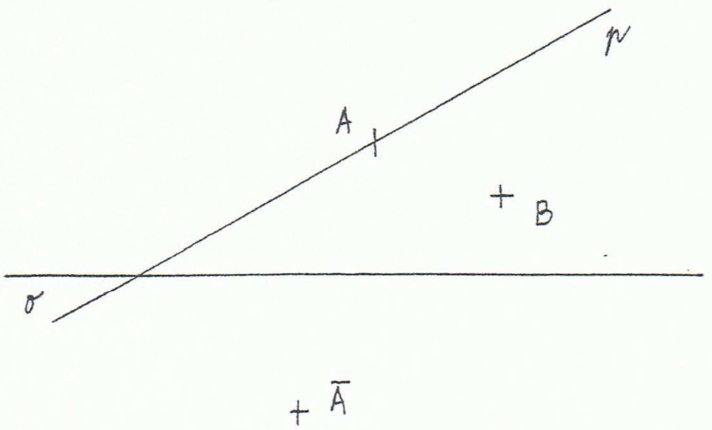
Při konstrukcích budeme využívat následující pravidla:

- spojnice odpovídajících si bodů ($A \to \bar{A}$, $B \to \bar{B}$, ...) jsou rovnoběžné, $A\bar{A} \parallel B\bar{B} \parallel \ldots$ tzv. směr afinity
- každý bod osy je samodružný bod
  $O \in o \Rightarrow \bar{O} = O$
- přímka a její afinní obraz se protínají na ose (samodružný bod přímky) nebo jsou s osou rovnoběžné

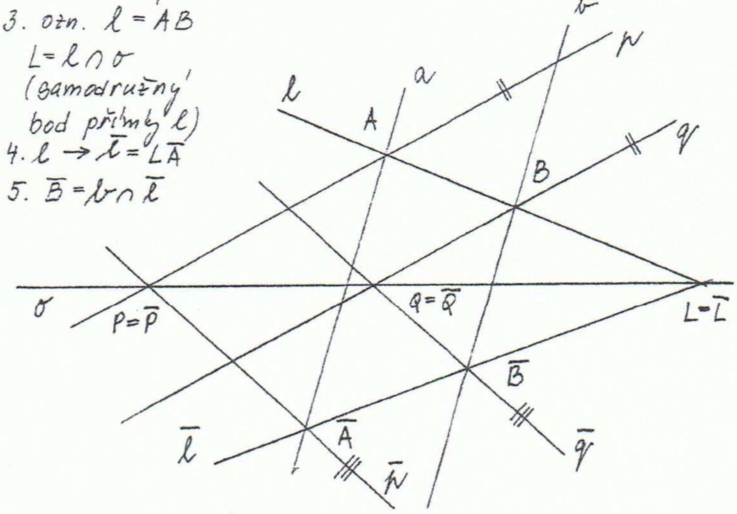
$A\bar{A} \perp o$ pravoúhlá osová afinita
(osová souměrnost je speciální případ pravoúhlé os. afinity)



V osové afinitě $\mathcal{A}(o, A \to \bar{A})$ sestrojte obraz bodu B a obrazy přímek p, q; $B \in q$, $q \parallel p$.



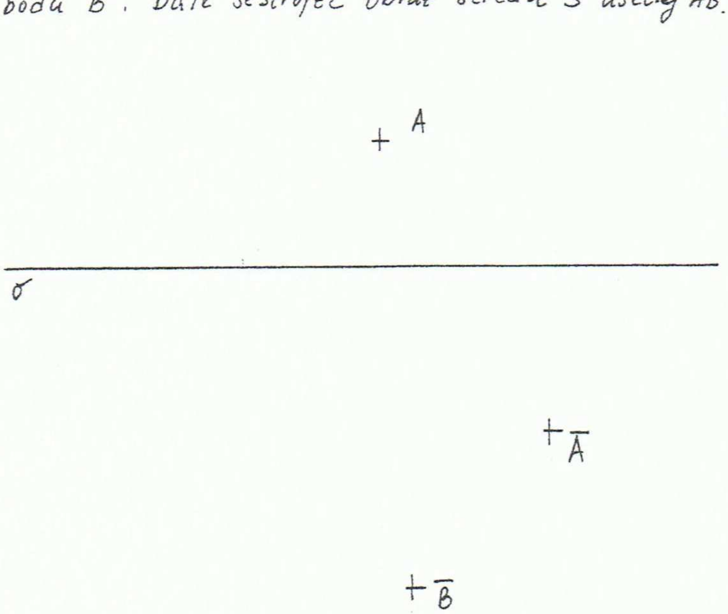
1. přímka $a = A\bar{A}$ určuje směr afinity
2. b: $B \in b$, $b \parallel a$
3. ozn. $l = AB$
   $L = l \cap o$
   (samodružný bod přímky l)
4. $l \to \bar{l} = L\bar{A}$
5. $\bar{B} = b \cap \bar{l}$



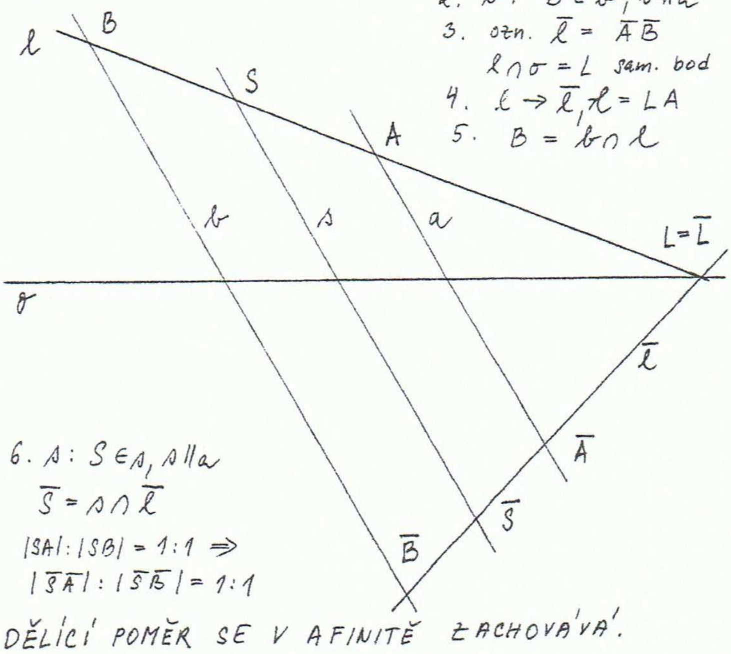
6. $p \cap o = P$ sam. bod
   $p \to \bar{p} = P\bar{A}$
   $q \cap o = Q$ sam. bod
   $q \to \bar{q} = Q\bar{B}$

$p \parallel q \Rightarrow \bar{p} \parallel \bar{q}$
ROVNOBĚŽNOST SE V AFINITĚ ZACHOVÁVÁ!

V osové afinitě $\mathcal{A}(o, A \to \bar{A})$ sestrojte vzor bodu $\bar{B}$. Dále sestrojte obraz středu S úsečky AB.



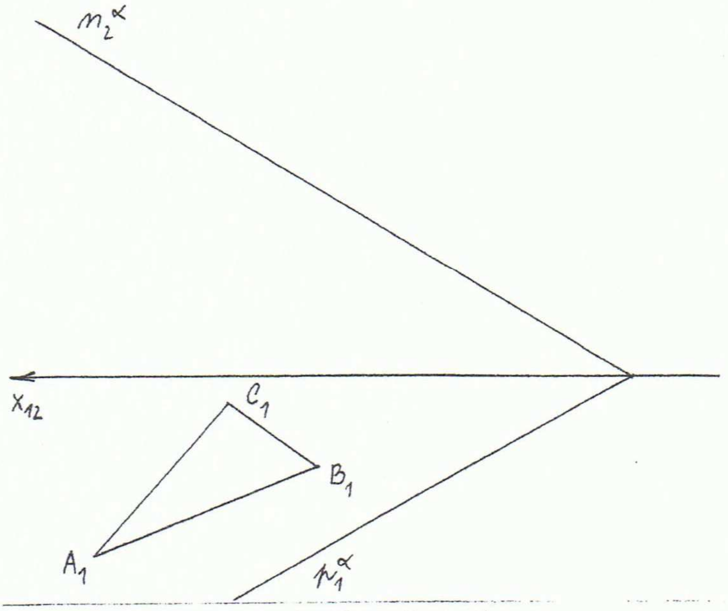
1. přímka $a = A\bar{A}$ určuje směr afinity
2. b: $\bar{B} \in b$, $b \parallel a$
3. ozn. $\bar{l} = \bar{A}\bar{B}$
   $\bar{l} \cap o = L$ sam. bod
4. $\bar{l} \to l$, $l = LA$
5. $B = b \cap l$

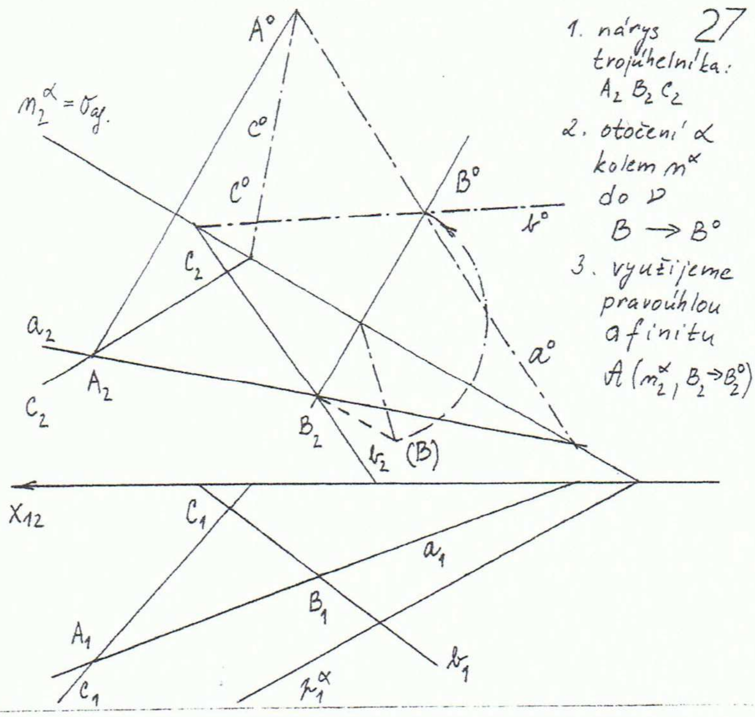


6. s: $S \in s$, $s \parallel a$
   $\bar{S} = s \cap \bar{l}$
   $|SA| : |SB| = 1:1 \Rightarrow$
   $|\bar{S}\bar{A}| : |\bar{S}\bar{B}| = 1:1$

DĚLICÍ POMĚR SE V AFINITĚ ZACHOVÁVÁ.

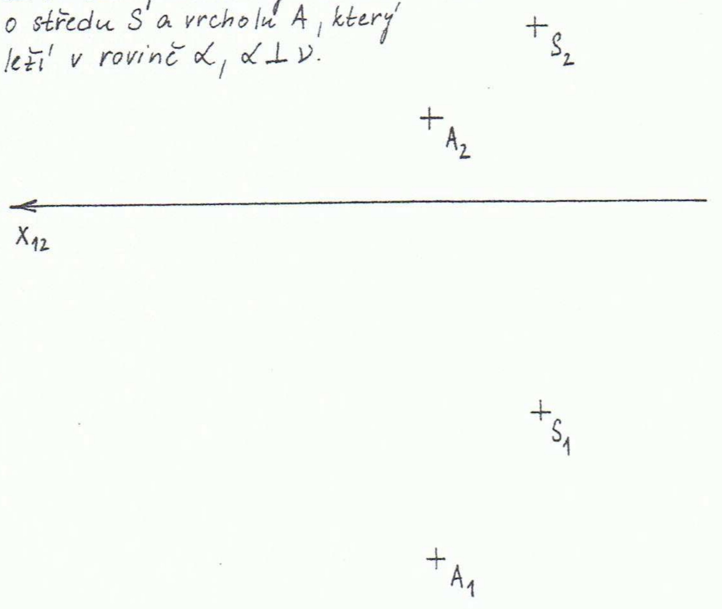
Sestrojte skutečnou velikost trojúhelníka ABC, ležícího v rovině α.



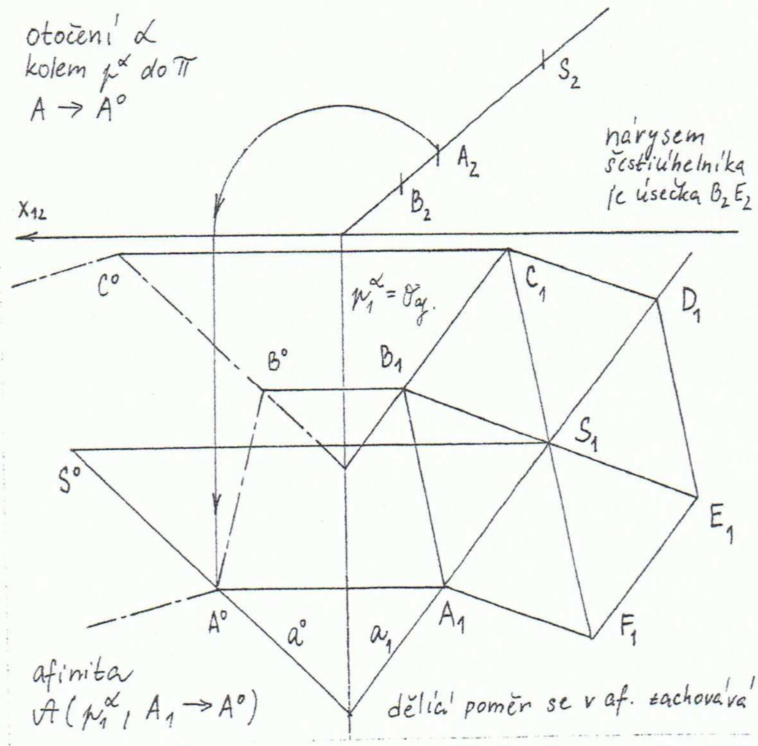


1. nárys trojúhelníka: $A_2 B_2 C_2$
2. otočení α kolem n^α do ν $B \to B^0$
3. využijeme pravoúhlou afinitu $\mathcal{A}(n_2^\alpha, B_2 \to B_2^0)$

Zobrazte pravidelný šestiúhelník o středu S a vrcholu A, který leží v rovině α, $\alpha \perp \nu$.



otočení α kolem p^α do π
$A \to A^0$

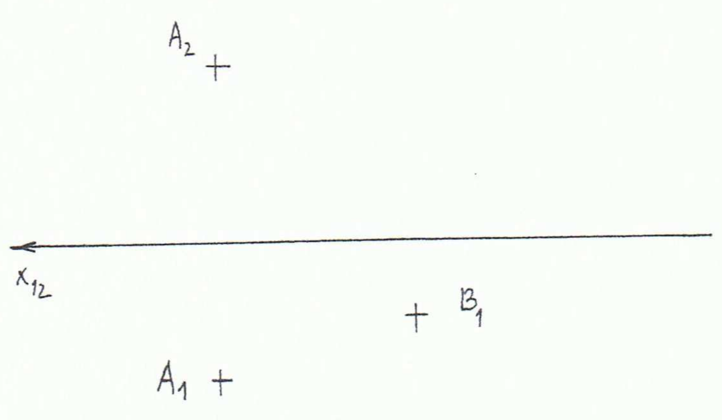


nárysem šestiúhelníka je úsečka $B_2 E_2$

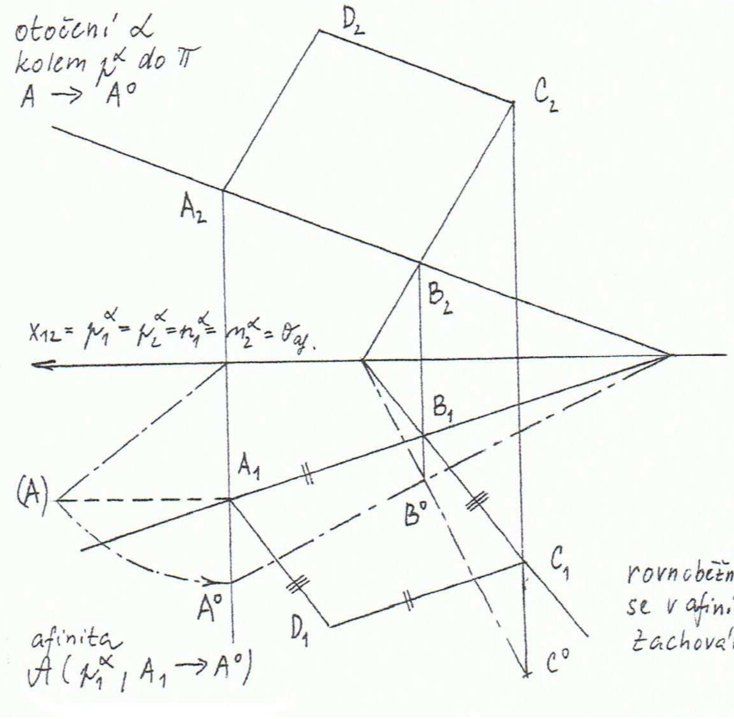
afinita $\mathcal{A}(p_1^\alpha, A_1 \to A^0)$

dělicí poměr se v af. zachovává

Zobrazte čtverec $ABCD$, který leží v rovině $\alpha = (A, x)$ $(y_C > y_B)$.



otočení α kolem p^α do π
$A \to A^0$



rovnoběžnost se v afinitě zachovává

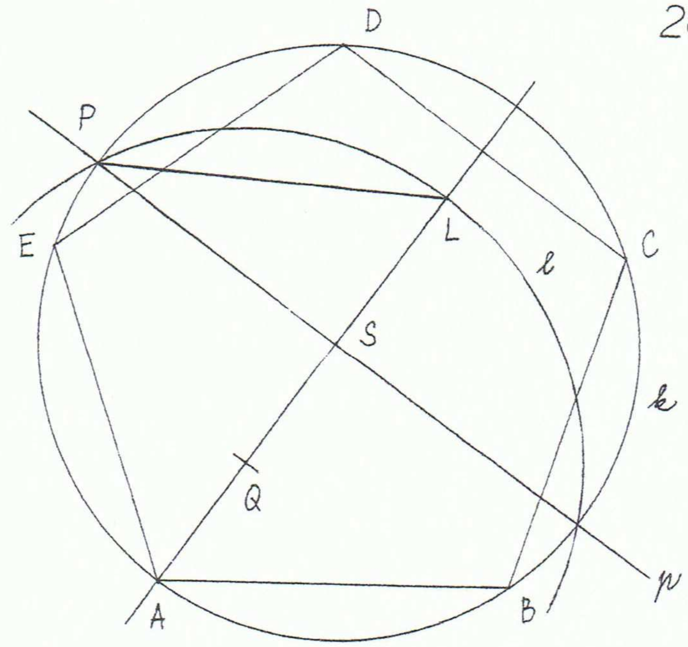
afinita $\mathcal{A}(p_1^\alpha, A_1 \to A^0)$

PRAVIDELNÝ PĚTIÚHELNÍK o středu S a vrcholu A

přesná konstrukce:

1. $k(S, r = |SA|)$
2. $p: S \in p,\ p \perp SA$, $P \in p \cap k$
3. Q - střed úsečky SA
   $l(Q, |QP|)$, $L \in l \cap SA$ (vnitřní bod kružnice k)
4. $|LP| = a$ strana pětiúhelníka

platí: $AB \parallel CE$, $BC \parallel AD$, $CD \parallel BE$, $DE \parallel AC$, $AE \parallel BD$

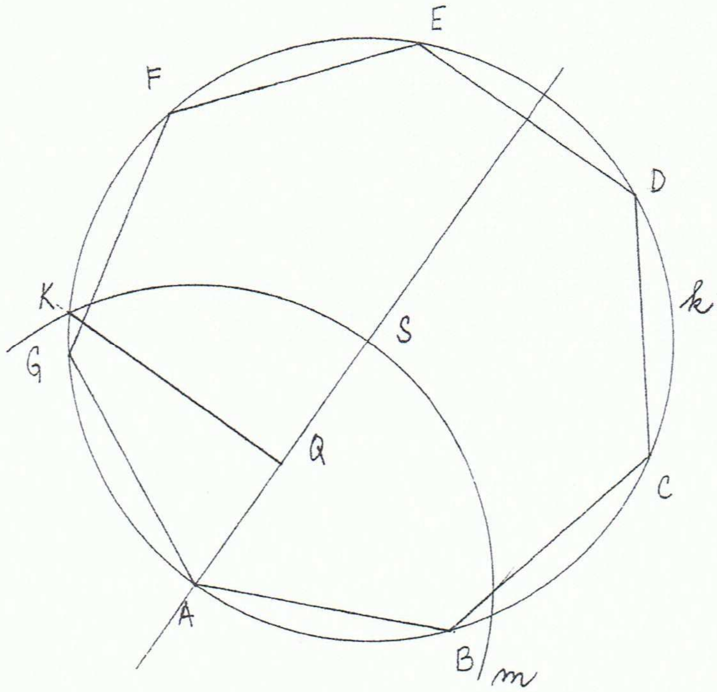


PRAVIDELNÝ SEDMIÚHELNÍK o středu S a vrcholu A

přibližná konstrukce:

1. $k(S, r = |SA|)$
2. Q - střed úsečky SA
3. $m(A, |AS|)$
   $K \in m \cap k$
4. $|KQ| = a$ (přibližně) strana sedmiúhelníka

platí: $AB \parallel CG \parallel FD$ atd.

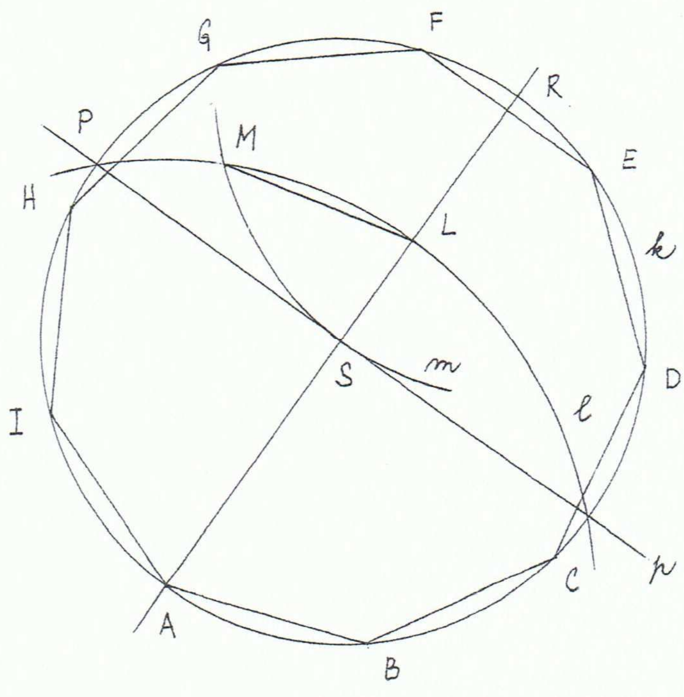


PRAVIDELNÝ DEVÍTIÚHELNÍK o středu S a vrcholu A

přibližná konstrukce:

1. $k(S, r = |SA|)$
2. $p: S \in p,\ p \perp SA$, $P \in p \cap k$
3. $l(A, |AP|)$, $L \in l \cap SA$ (vnitřní bod kružnice k)
4. $SA \cap k = \{A, R\}$
   $m(R, r = |RS|)$
5. $M \in m \cap l$
6. $|ML| = a$ (přibližně) strana devítiúhelníka

platí: $AB \parallel CI \parallel DH \parallel EG$ atd.



ELIPSA $\mathcal{E}$ (v rovině α)

jsou dány dva body E, F v rovině α a číslo $a > 0$ takové, že $|EF| < 2a$

$\mathcal{E} = \{ M \in \alpha;\ |ME| + |MF| = 2a \}$

(pro $E = F$ dostaneme kružnici o středu E a poloměru a)

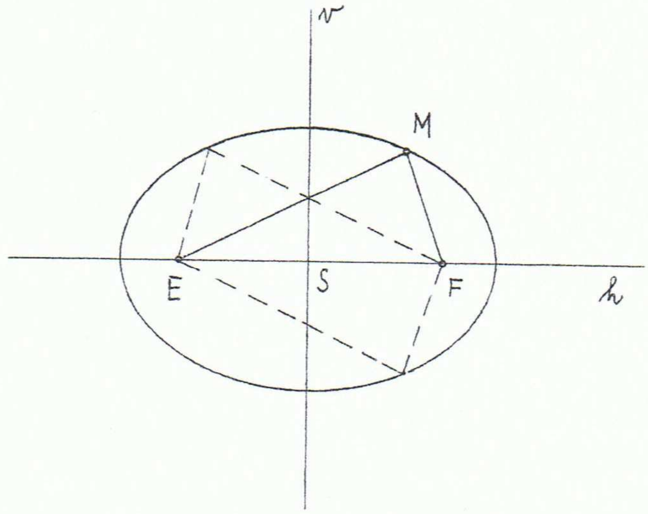
E, F – ohniska elipsy

$h = EF$ – hlavní osa elipsy

S – střed úsečky EF – střed elipsy

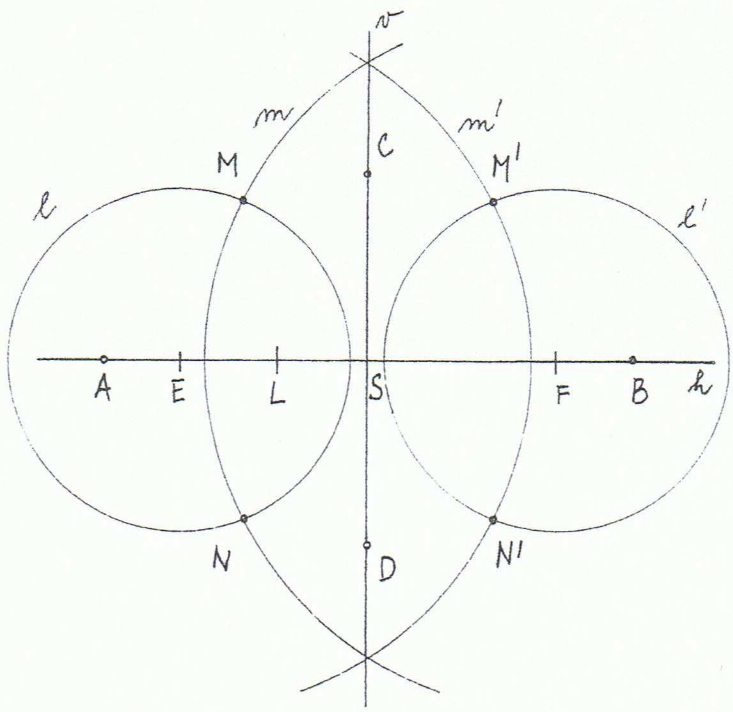
v: $S \in v$, $v \perp h$ – vedlejší osa elipsy

$|ES| = |FS| = e$ excentricita (výstřednost) elipsy



KONSTRUKCE BODŮ ELIPSY (podle definice)

1. A, B: $A \in h$, $B \in h$, $|AS| = |BS| = a$
   $|AE| + |AF| = |BF| + |BE| = (a-e) + (a+e) = 2a$
   A, B – hlavní vrcholy elipsy
   a – velikost hlavní poloosy elipsy
2. C, D: $C \in v$, $D \in v$, $|CE| = |CF| = |DE| = |DF| = a$
   $|CE| + |CF| = |DE| + |DF| = a + a = 2a$
   C, D – vedlejší vrcholy elipsy
   $|CS| = |DS| \overset{\text{ozn.}}{=} b$ – velikost vedlejší poloosy
   platí: $a^2 = e^2 + b^2$ (Pythagorova věta v $\triangle ESC$)
3. $L \in h$ lib. (L je vnitřní bod úsečky EF)
   $|LA| + |LB| = 2a$
   $l = (E, |LA|)$ (resp. $l' = (F, |LA|)$)
   $m = (F, |LB|)$ (resp. $m' = (E, |LB|)$)
   $\left.\begin{array}{l} l \cap m = \{M, N\} \\ l' \cap m' = \{M', N'\} \end{array}\right\}$ body elipsy



Konstrukce oskulačních kružnic ve vrcholech elipsy:

$k\ (A, b)$

$l\ (C, a)$

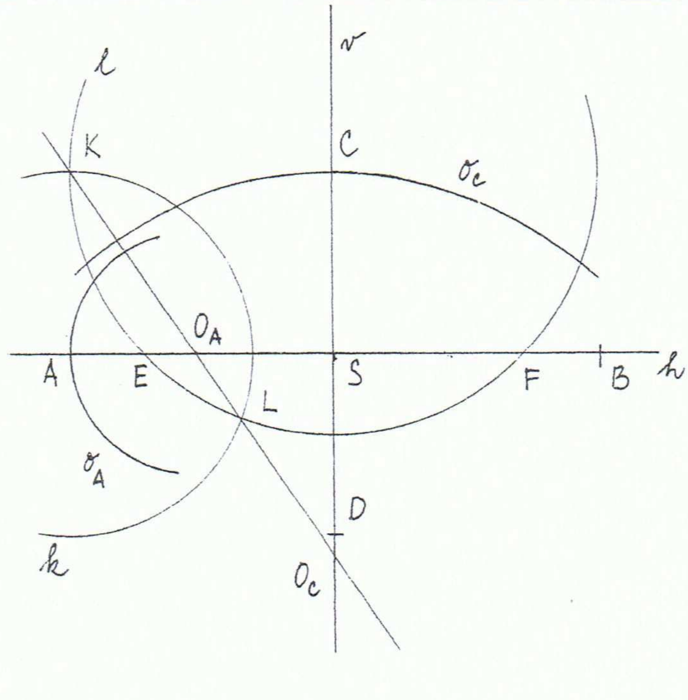
$k \cap l = \{K, L\}$

$KL \cap h = O_A$

$KL \cap v = O_C$

oskulační kružnice ve vrcholu A: $o_A\ (O_A, |O_A A|)$

oskulační kružnice ve vrcholu C: $o_C\ (O_C, |O_C C|)$



TROJÚHELNÍKOVÁ KONSTRUKCE BODŮ ELIPSY

$k(S, a)$

$l(S, b)$

p – lib. polopřímka vycházející z bodu S

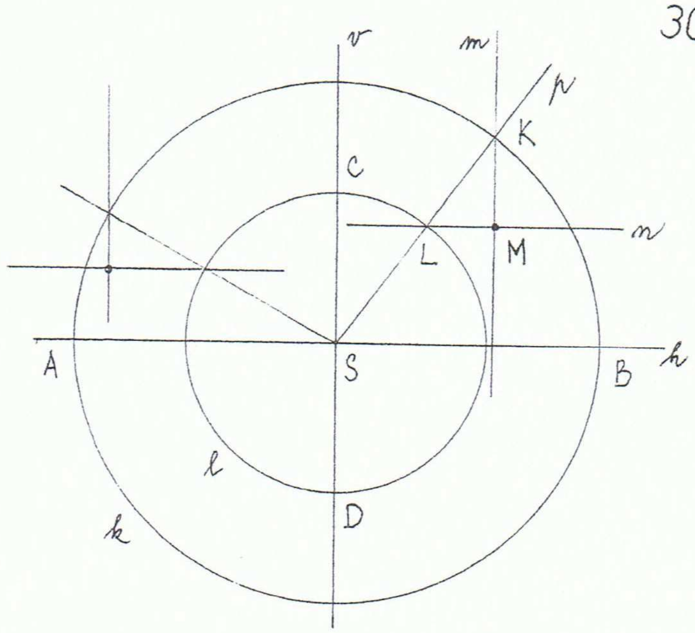
$K = p \cap k$

$L = p \cap l$

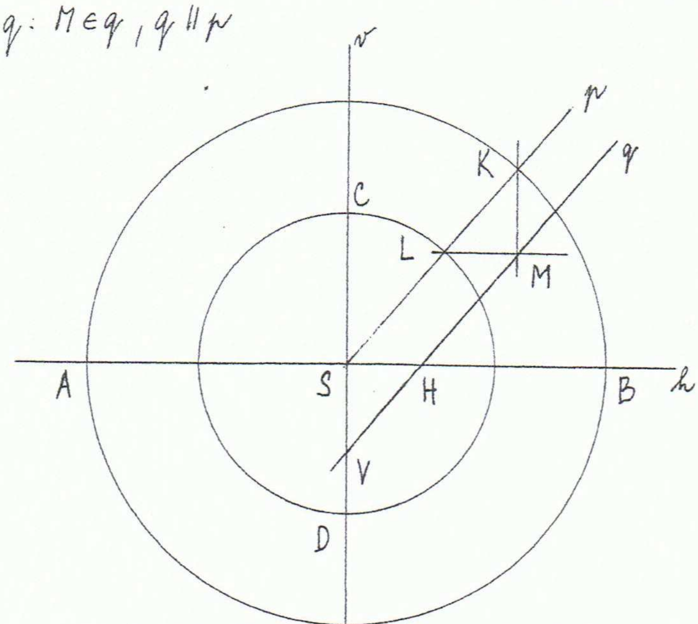
$m: K \in m,\ m \parallel v$

$n: L \in n,\ n \parallel h$

$M = m \cap n$ bod elipsy



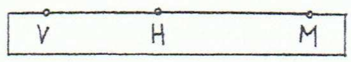
$q: M \in q,\ q \parallel p$

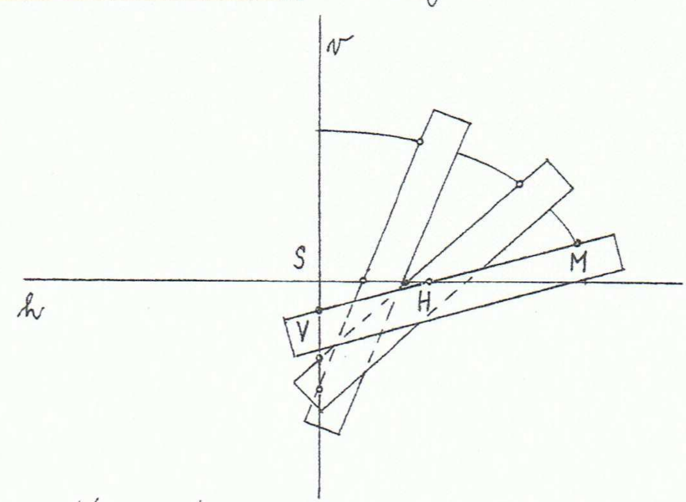


rovnoběžník $VMKS$:
$|VM| = |SK| = a$

rovnoběžník $HMLS$:
$|HM| = |SL| = b$

Proužková konstrukce elipsy

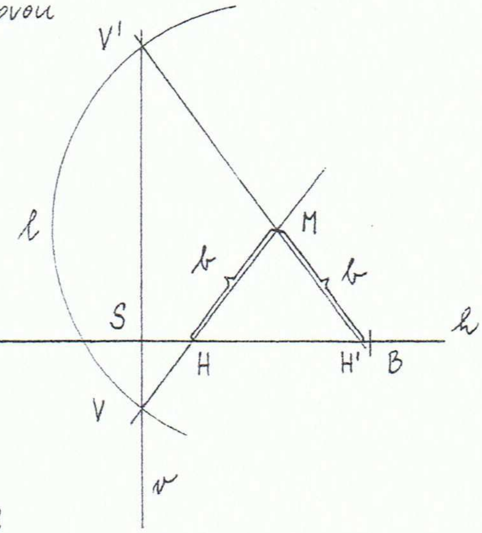




na proužku papíru sestrojíme body V, H, M:
$|VM| = a$, $|HM| = b$ (viz obr.)
pohybujeme proužkem tak, že $V \in v$, $H \in h$
bod M se pak pohybuje po elipse

Sestrojte elipsu, jsou-li dány její hlavní vrcholy A, B a její bod M.

využijeme proužkovou konstrukci:
$h = AB$
S – střed úsečky AB
$|SA| = |SB| = a$



$l(M, a)$

$l \cap v = \{V, V'\}$

$H = VM \cap h$, $H' = V'M \cap h$

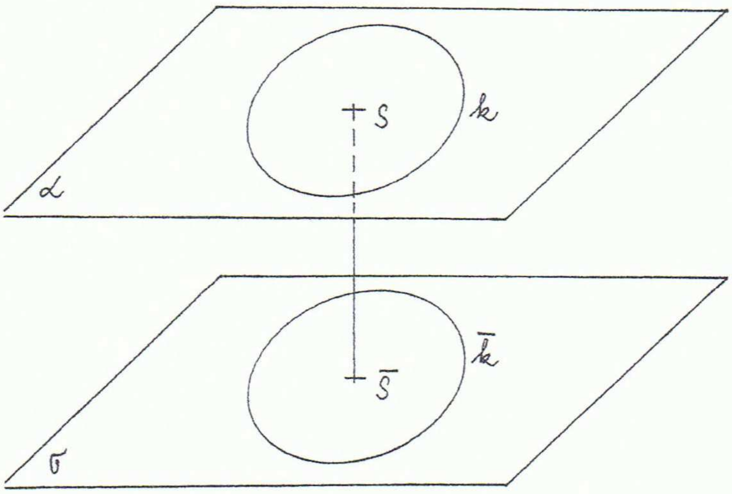
$|HM| = |H'M| = b$ velikost vedlejší poloosy

PŘÍKLADY V

Formát: A4 na výšku (nepoužívejte nedostupné body, tj. body mimo uvedený formát).

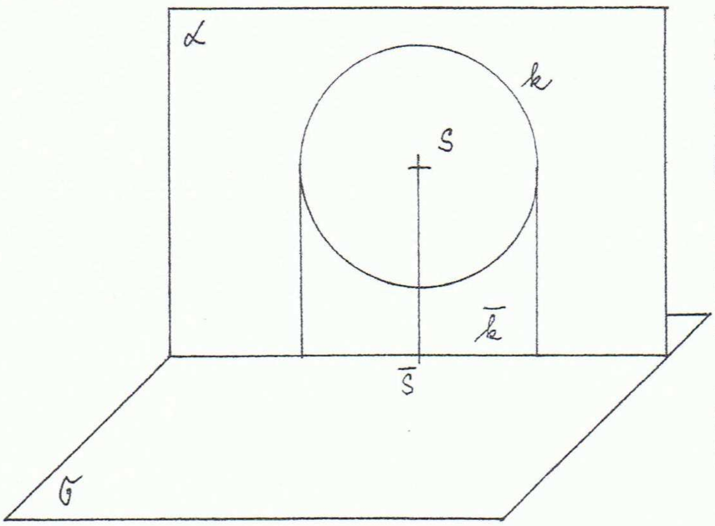
1. MP: O [9, 16]
   Zobrazte pravidelný šestiúhelník o středu S [−5, 3.5, ?] a vrcholu A [−2, ?, 3.5], který leží v rovině $\alpha = (7, 5, 4)$.
2. MP: O [11, 16]
   Zobrazte rovnostranný trojúhelník ABC, který leží v rovině $\alpha = (-9, ?, ?)$. Strana AB trojúhelníka leží na přímce AM, A [5, 7, 10.5], M [0, 3, 7.5], $y_B < y_A$, $y_C > 0$. Poloměr kružnice trojúhelníku opsané je $r = 5.5$.
3. MP: O [10.5, 15]
   Je dána přímka $k = KL$, K [0, 7.5, 8.5], L [−7.5, 0, −5] a bod A [1, 2.5, 2]. Zobrazte čtverec $ABCD$, který leží v rovině kolmé k přímce k a má střed na přímce k.
4. MP: O [10.5, 15]
   Zobrazte rovnostranný trojúhelník ABC, který leží v rovině $\alpha = (6, 6, 5)$, A [−2, 4, ?], bod B leží v půdorysně, bod C v nárysně, $x_C > 0$.
5. MP: O [12.5, 20]
   Je dána přímka $a = SA$, S [2, 5, 4], A [5, 7, 2]. Zobrazte pravidelný pětiúhelník o středu S a vrcholu A, který leží v rovině rovnoběžné s osou x.
6. MP: O [10.5, 18]
   Zobrazte průsečík výšek trojúhelníka ABC, A [4, 1, 4], B [−6, 2.5, 6.5], C [−1, 6, 1].
7. MP: O [10.5, 13]
   Je dána rovina $\alpha = (A, x)$ a bod B, A [7, −5, 7], B [−4, 5, 3]. Sestrojte stopy roviny β : $B \in \beta$, $\beta \parallel \alpha$. Určete odchylku přímek $k = BK$, $l = BL$, ležících v rovině β, K [6, ?, 2], L [1, 2, ?].

Pravoúhlý průmět kružnice



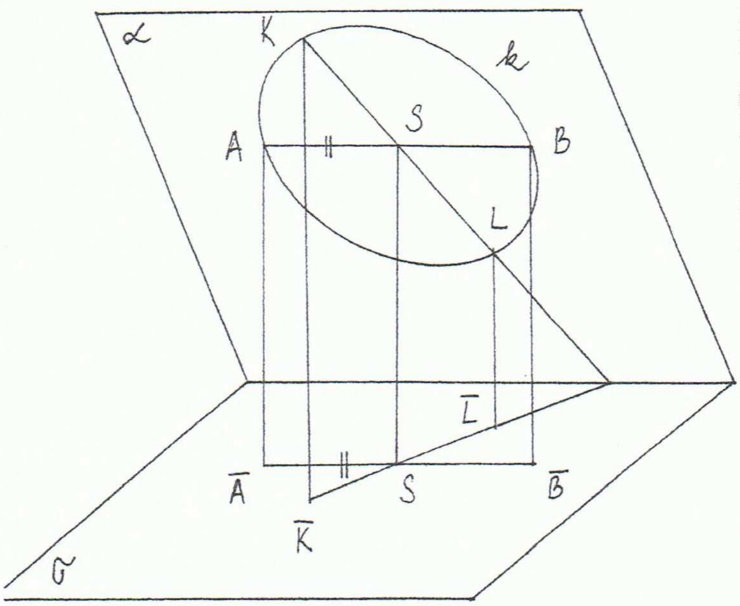
$k \subset \alpha$
$\alpha \parallel \sigma$

pravoúhlým průmětem kružnice k do průmětny σ je kružnice $\bar{k}$ shodná s kružnicí k



$k \subset \alpha$, $k(S, r)$
$\alpha \perp \sigma$

pravoúhlým průmětem kružnice k do průmětny σ je úsečka délky $2 \cdot r$



$k \subset \alpha$, $k(S, r)$
$\alpha \nparallel \sigma$, $\alpha \not\perp \sigma$

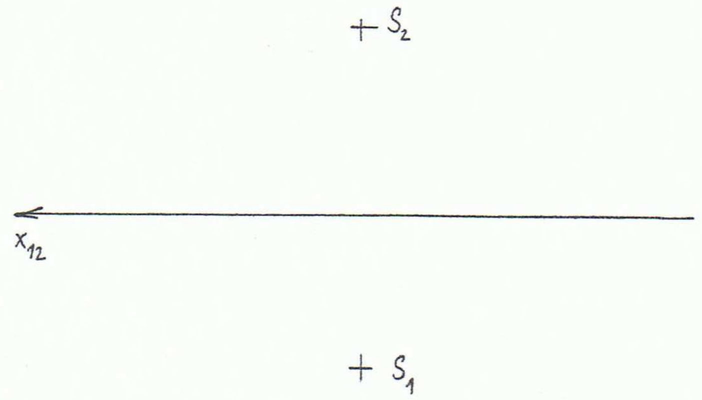
pravoúhlý průmět průměru KL kružnice k do roviny σ je úsečka $\bar{K}\bar{L}$ a platí:
$|\bar{K}\bar{L}| \leq |KL|$

pravoúhlý průmět průměru AB je úsečka $\bar{A}\bar{B}$ stejně dlouhá právě tehdy, když $AB \parallel \sigma$

pravoúhlým průmětem kružnice k do průmětny σ je elipsa $\bar{k}$

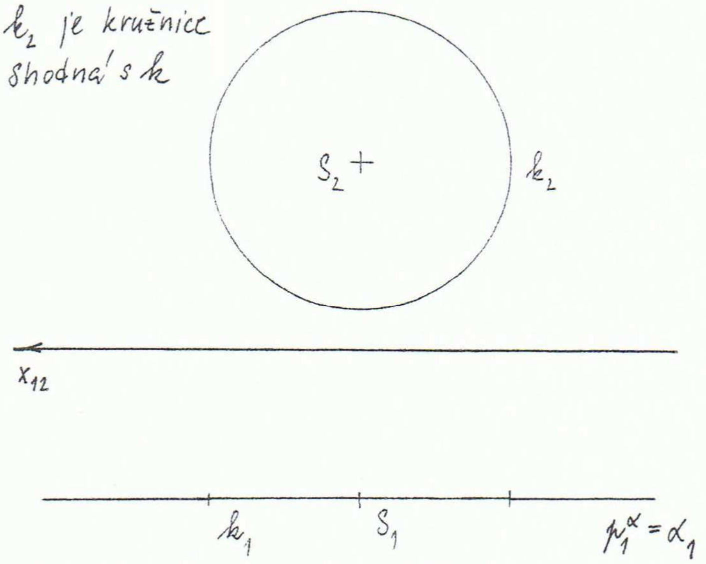
$\bar{A}\bar{B}$ je hlavní osa elipsy $\bar{k}$ ($\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou hlavní vrcholy)

Zobrazte kružnici $k(S, r=2)$, která leží v rovině α, $\alpha \parallel \nu$.



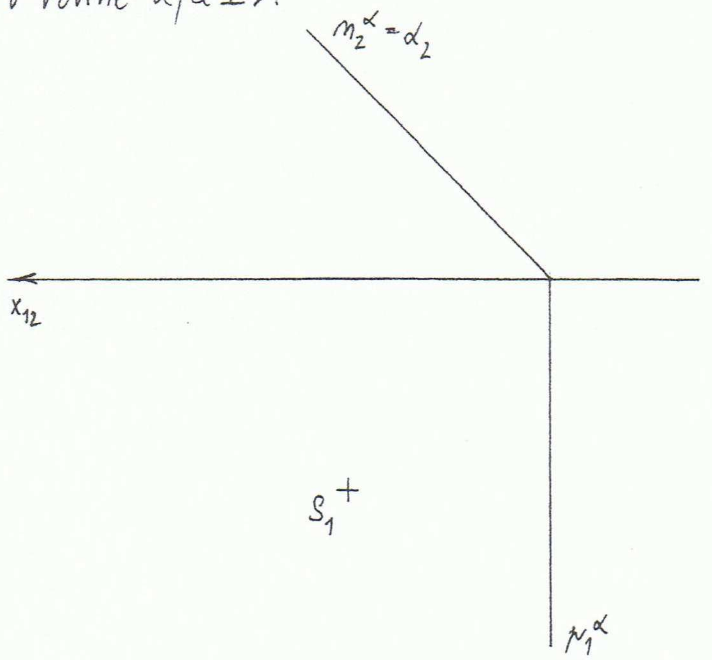
$\alpha \parallel \nu$

k_2 je kružnice shodná s k



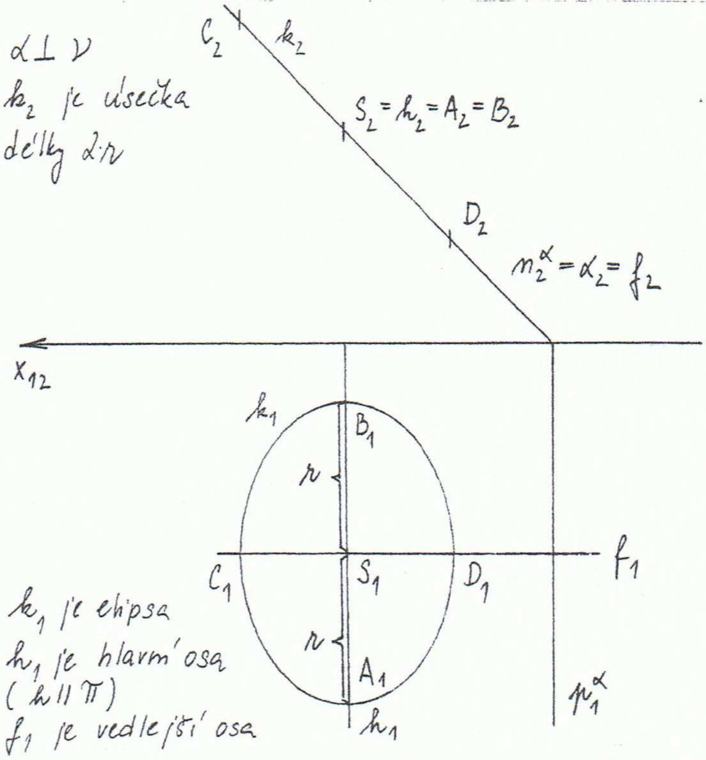
$\alpha \perp \pi$, k_1 je úsečka délky $2 \cdot r$

Zobrazte kružnici $k(S, r=2)$, která leží v rovině α, $\alpha \perp \nu$.



$\alpha \perp \nu$

k_2 je úsečka délky $2 \cdot r$

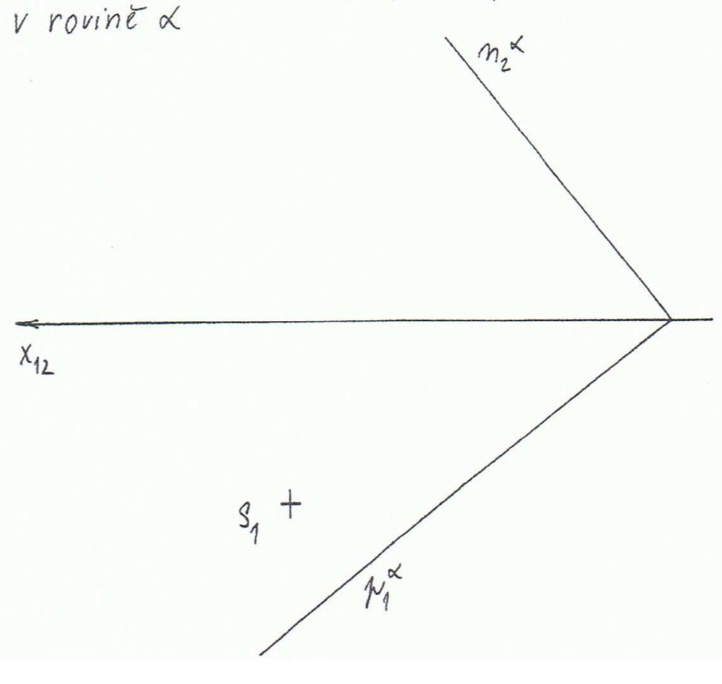


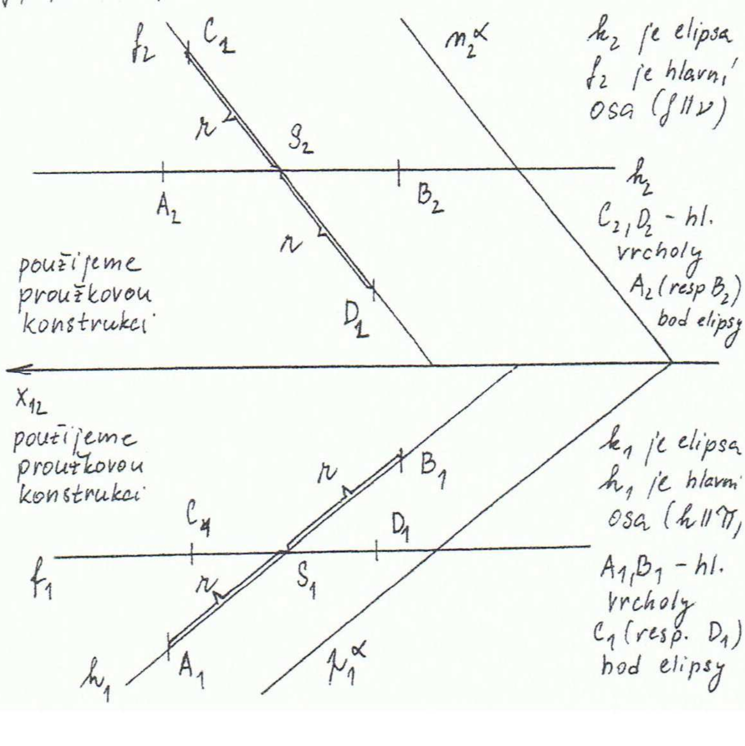
k_1 je elipsa

h_1 je hlavní osa ($h \parallel \pi$)

f_1 je vedlejší osa

Zobrazte kružnici $k(S, r=2)$, která leží v rovině α

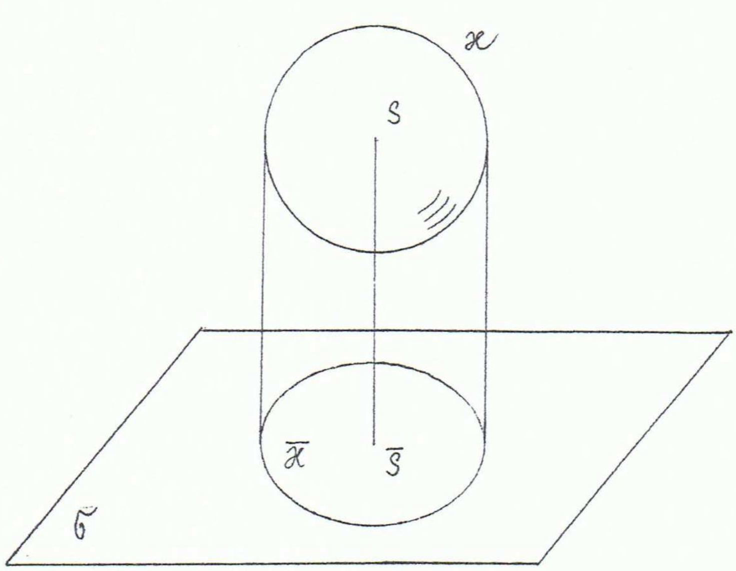




k_2 je elipsa
f_2 je hlavní osa ($f \parallel \nu$)
C_2, D_2 - hl. vrcholy
A_2 (resp B_2) bod elipsy

k_1 je elipsa
h_1 je hlavní osa ($h \parallel \pi$)
A_1, B_1 - hl. vrcholy
C_1 (resp. D_1) bod elipsy

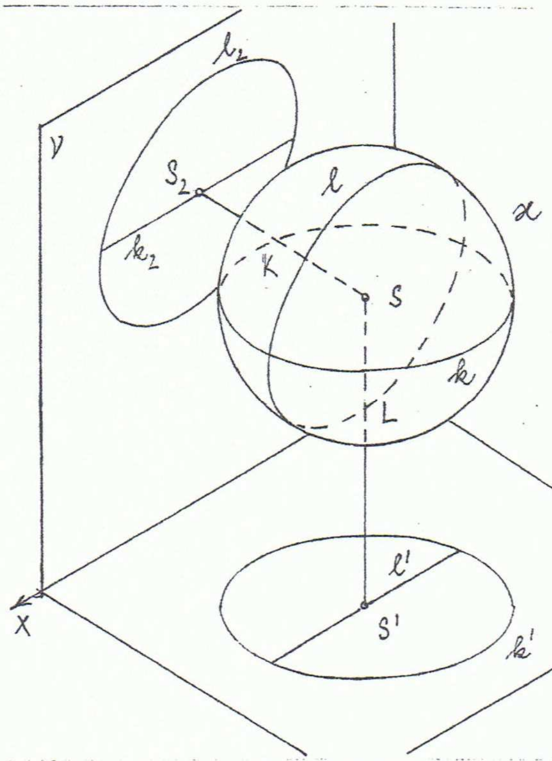
Pravoúhlý průmět kulové plochy



kulová plocha $\varkappa(S, r)$

$\varkappa(S, r) = \{M \in \mathbb{E}^3, |SM| = r\}$

pravoúhlým průmětem kulové plochy do průmětny σ je <u>kruh</u> o středu $\bar{S}$ a poloměru r

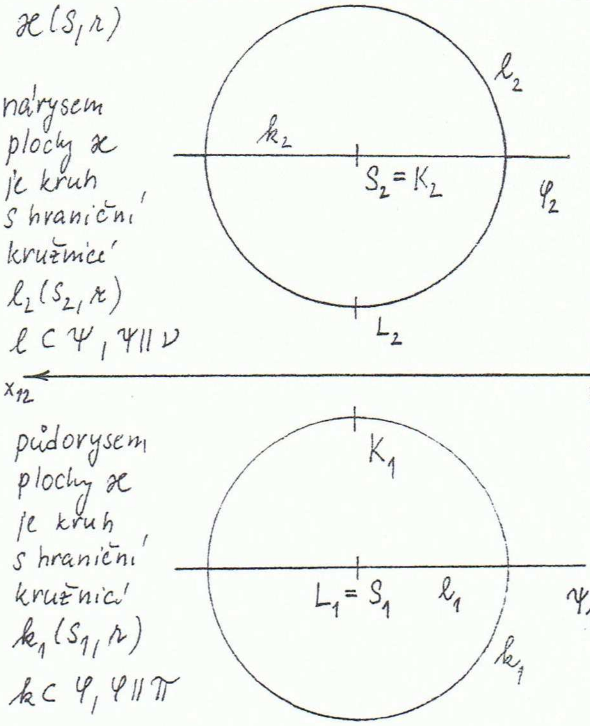


zobrazení kulové plochy v <u>MP</u>

$\varkappa(S, r)$

nárysem plochy $\varkappa$ je kruh s hraniční kružnicí $l_2(S_2, r)$

$l \subset \psi$, $\psi \parallel \nu$



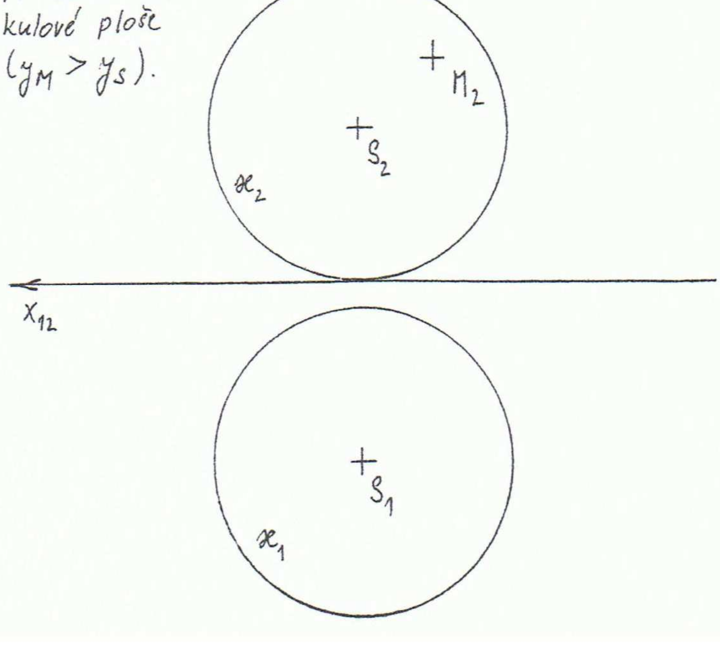
v nárysu je vidět polovina kulové plochy, která leží v poloprostoru opačném k poloprostoru určeném rovinou φ a bodem K

půdorysem plochy $\varkappa$ je kruh s hraniční kružnicí $k_1(S_1, r)$

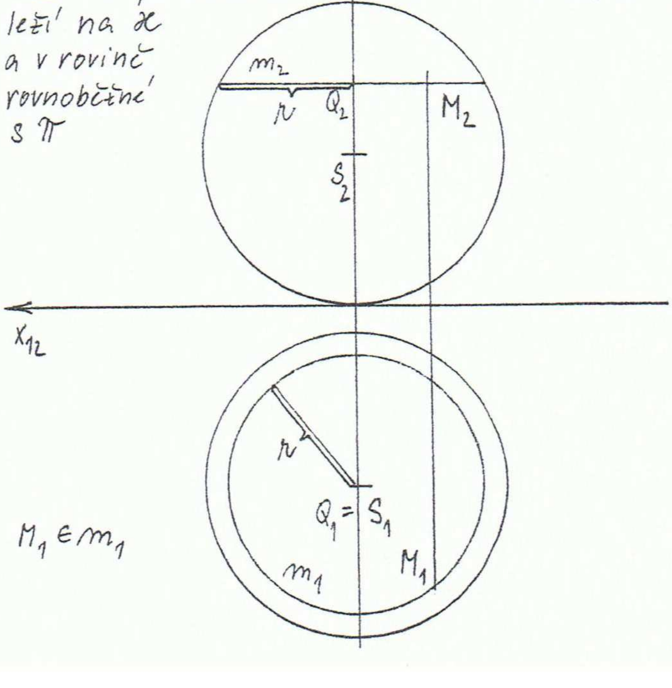
$k \subset \varphi$, $\varphi \parallel \pi$

v půdoryse je vidět polovina kulové plochy, která leží v poloprostoru opačném k poloprostoru určeném rovinou φ a bodem L

Dourčete bod M (tj. sestrojte půdorys M_1) tak, aby M ležel na kulové ploše ($y_M > y_S$).

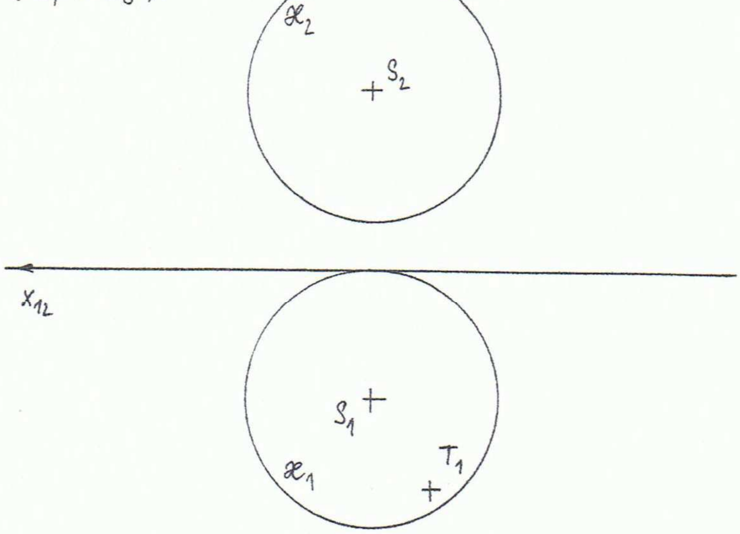


bod M je bodem kružnice $m(Q, r)$, která leží na $\varkappa$ a v rovině rovnoběžné s π



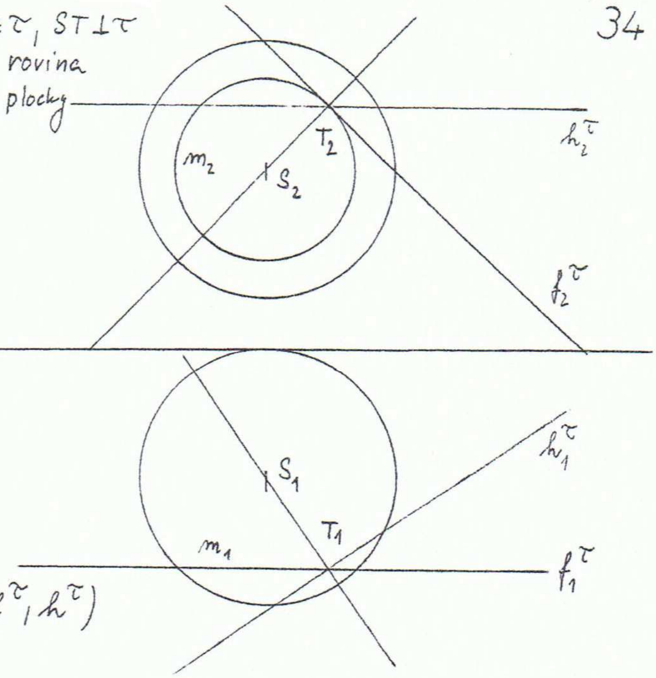
$M_1 \in m_1$

Určete tečnou rovinu kulové plochy v bodě $T \in \varkappa$ $(z_T > z_S)$.



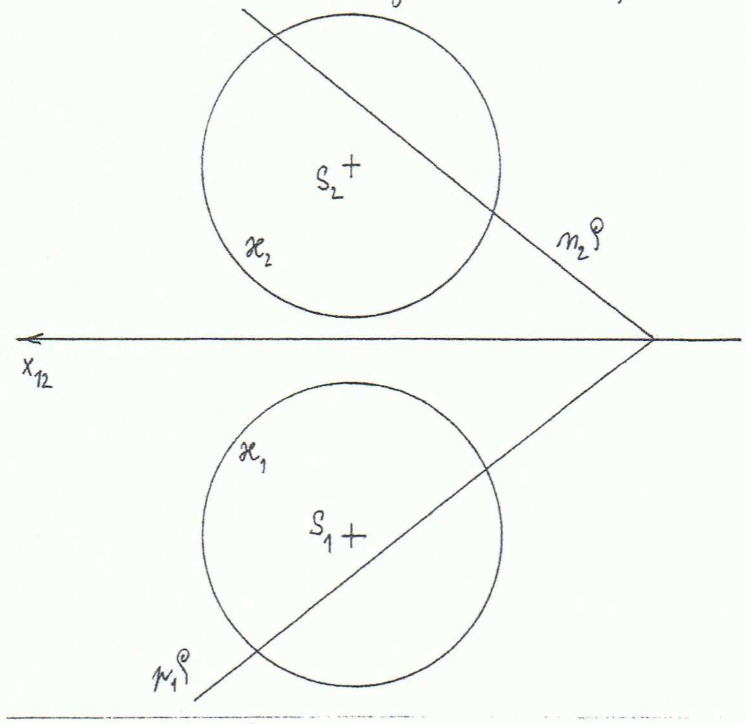
τ: $T \in \tau$, $ST \perp \tau$

- tečná rovina kulové plochy



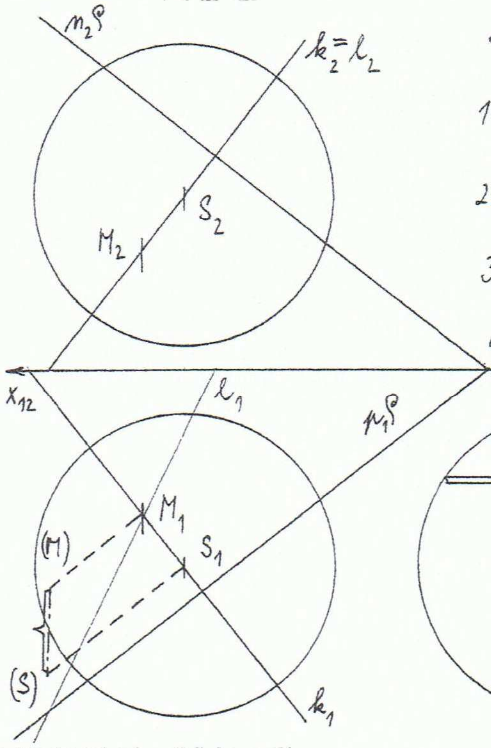
$\tau = (f^\tau, h^\tau)$

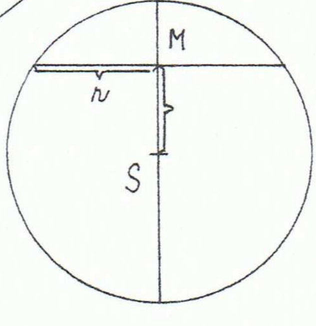
Zobrazte řez kulové plochy $\varkappa$ rovinou ρ.



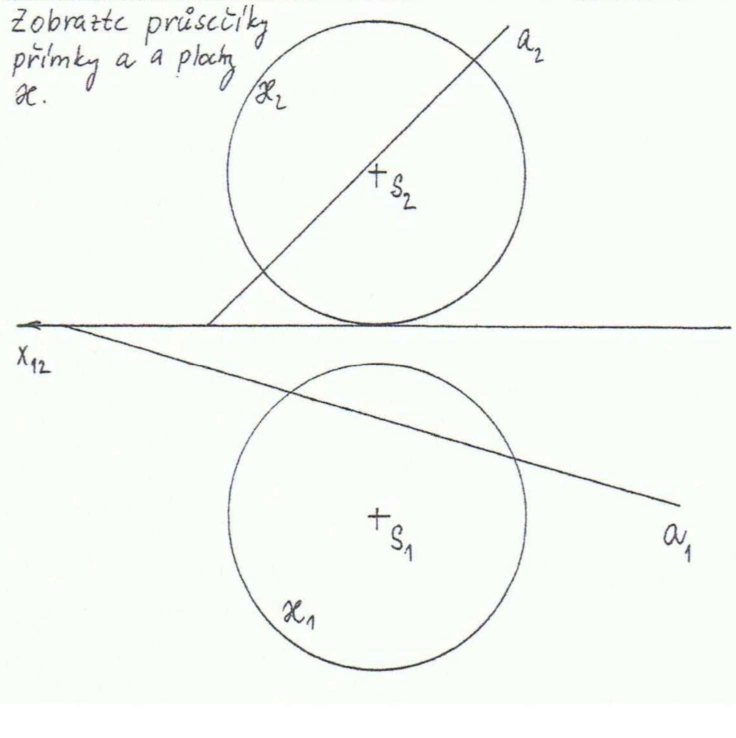
$\varkappa \cap \rho$ = kružnice $m(M, r)$

1. k: $S \in k$, $k \perp \rho$
   $M = k \cap \rho$
2. poloměr r
   - viz pomocný obr.
3. zobrazit kružnici $m(M, r) \subset \rho$
4. viditelnost

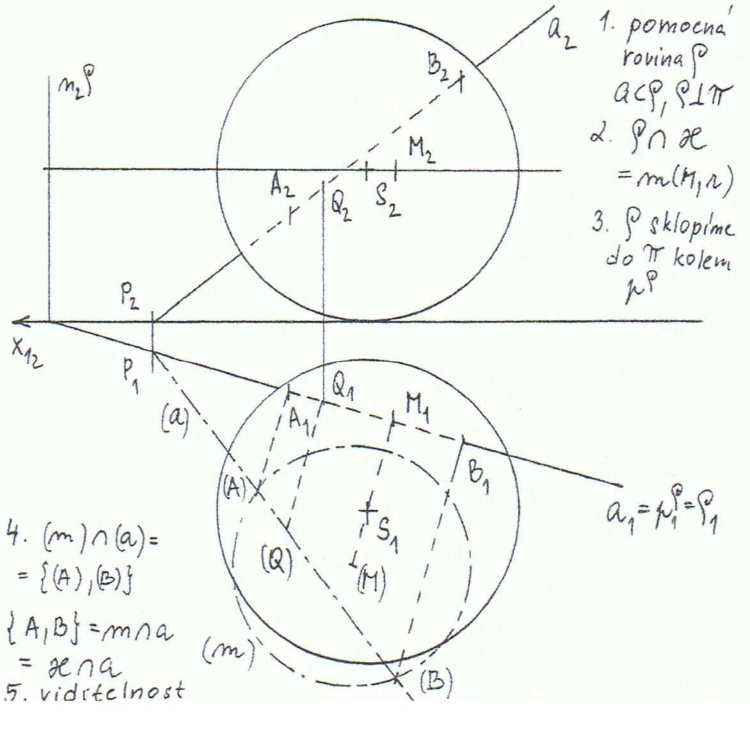




Zobrazte průsečíky přímky a a plochy $\varkappa$.



1. pomocná rovina ρ
   $a \subset \rho$, $\rho \perp \pi$
2. $\rho \cap \varkappa = m(M, r)$
3. ρ sklopíme do π kolem p^ρ



4. $(m) \cap (a) = \{(A), (B)\}$
   $\{A, B\} = m \cap a = \varkappa \cap a$
5. viditelnost

PŘÍKLADY VI

Formát: A4 na výšku (nepoužívejte nedostupné body, tj. body mimo uvedený formát).

1. MP: $O\ [10.5,\ 15]$
   Zobrazte kružnici o středu $S\ [4,\ 9,\ 7]$ a poloměru $r = 5$, která leží v rovině rovnoběžné s rovinou $\alpha = (8, 7, 5)$.
2. MP: $O\ [8,\ 15]$
   Je dána rovina $\alpha = (\ A,\ x)$, $A\ [5,\ 6,\ 8]$, dále je dána přímka $p = KL$, $K\ [-2,\ 4,\ 7]$, $L\ [-6,\ 5,\ 2]$. Zobrazte kružnici, která leží v rovině α, jejíž střed leží na přímce p a poloměr je $r = \mid KL \mid$.
3. MP: $O\ [10.5,\ 15]$
   Zobrazte kružnici k o středu $S\ [0,\ 8,\ 9]$, která leží v rovině kolmé k přímce $l = LS$, $L\ [4,\ 1,\ 2]$. Bod $A\ [-1,\ 3.5,\ ?]$ je bodem kružnice.
4. MP: $O\ [10,\ 15]$
   Zobrazte kružnici, na které leží body A, B, C ; $A\ [0,\ 2,\ 8]$, $B\ [4,\ 8,\ 4]$, $C\ [-5,\ 5,\ 2]$.

Formát: A5 na šířku (nepoužívejte nedostupné body, tj. body mimo uvedený formát).

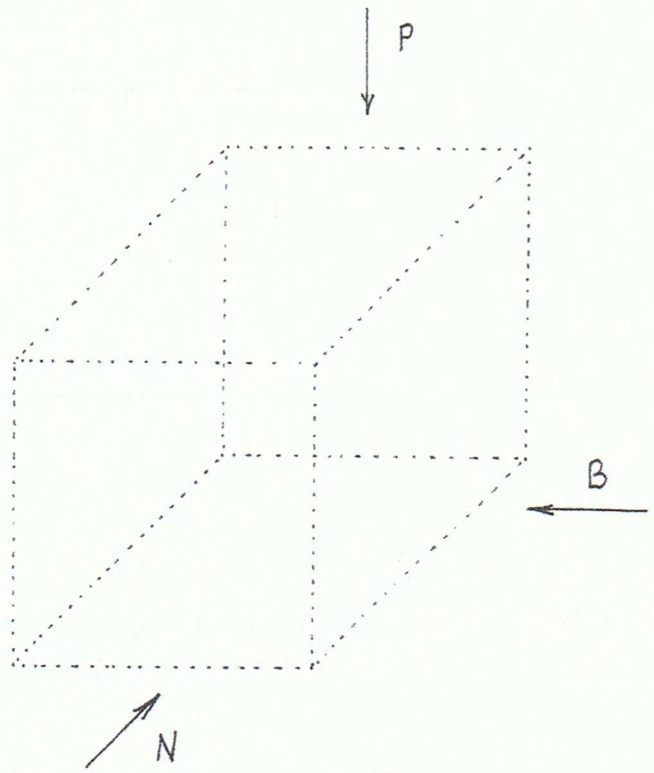
5. MP: $O\ [10.5,\ 7.5]$
   Zobrazte kulovou plochu.
   a) Je dán střed kulové plochy $S\ [3,\ 4,\ 5]$ a bod $M\ [0,\ 6,\ 7]$ plochy. Určete tečnou rovinu plochy v bodě M.
   b) Je dán střed kulové plochy $S\ [2,\ 6,\ 6]$ a její tečná rovina $\tau = (6, 4, 5)$.
   c) Je dána tečná rovina plochy $\tau = (-6, 4, 5)$ s bodem dotyku $T\ [1,\ 2,\ ?]$. Střed plochy leží v rovině $\alpha = (6, 4, \infty)$.

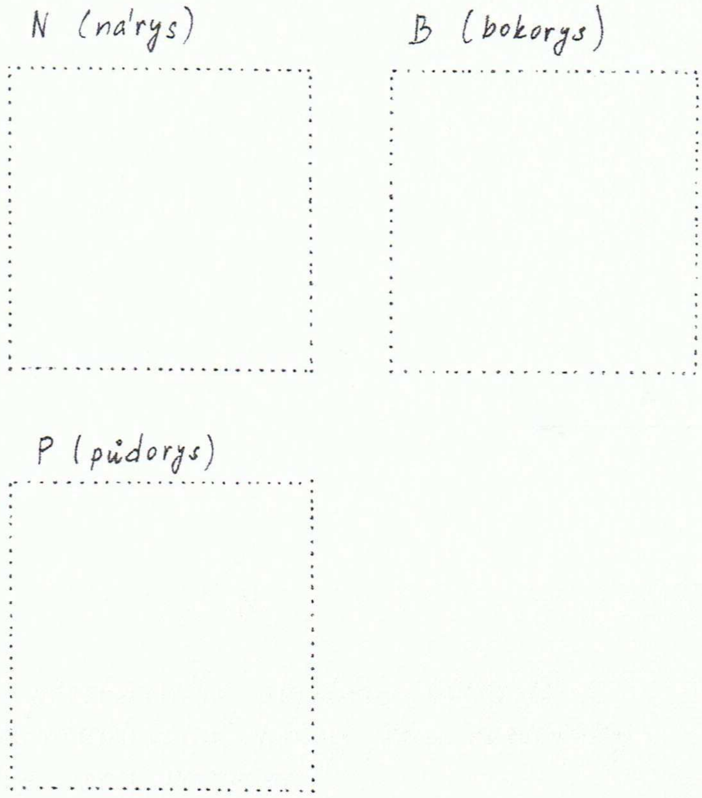
Formát: A4 na výšku (nepoužívejte nedostupné body, tj. body mimo uvedený formát).

6. MP: $O\ [10.5,\ 15]$
   Zobrazte řez kulové plochy $\kappa\ (S, r)$ rovinou ρ. Stanovte viditelnost.
   a) $S\ [2,\ 4,\ 4.5]$, $r = 4$, $\rho = (-5, 8, 8)$.
   b) $S\ [0,\ 5,\ 5]$, $r = 4.5$, $\rho = (-5.5, 11, \infty)$.
7. MP: $O\ [10.5,\ 15]$
   Zobrazte průsečíky přímky $p = PQ$, $P\ [-3,\ 1,\ 0]$, $Q\ [0,\ 9,\ 10]$ s kulovou plochou $\kappa\ (S, r)$, $S\ [0,\ 4,\ 4]$, $r = 4$. Stanovte viditelnost.

1. V názorném promítání je zobrazen prostorový objekt, který je umístěn v (pomocné) krychli. Viditelné a neviditelné čáry jsou rozlišeny plnou a čárkovanou čarou, tečkované čáry jsou pomocné.

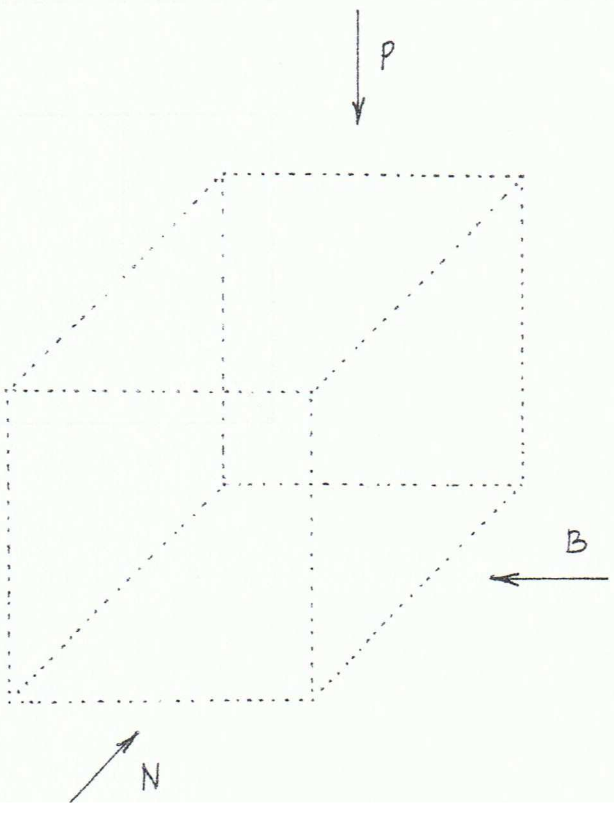
Sestrojte půdorys, nárys a bokorys objektu.

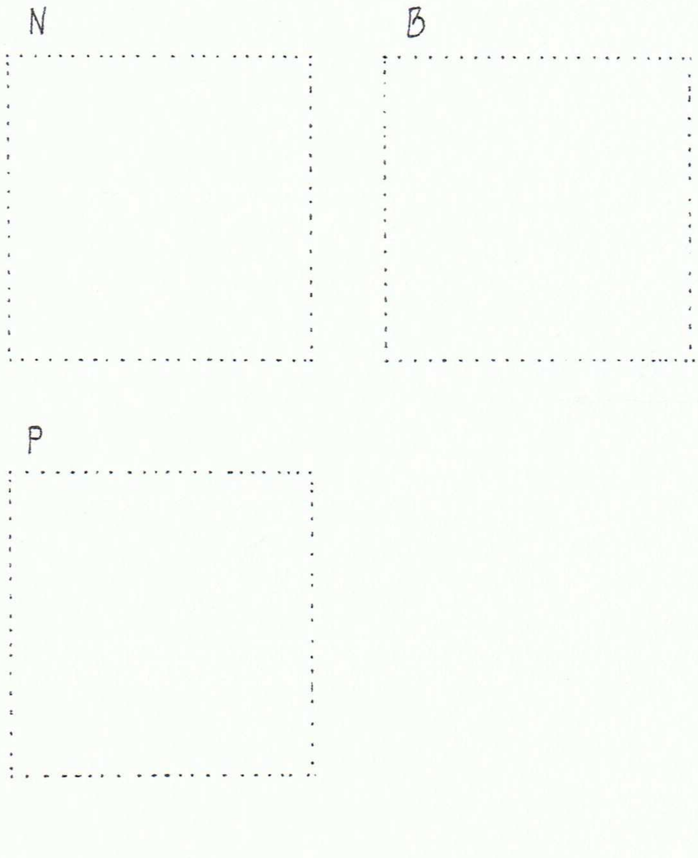




2. V názorném promítání je zobrazen prostorový objekt, který je umístěn v (pomocné) krychli. Viditelné a neviditelné čáry jsou rozlišeny plnou a čárkovanou čarou, tečkované čáry jsou pomocné.

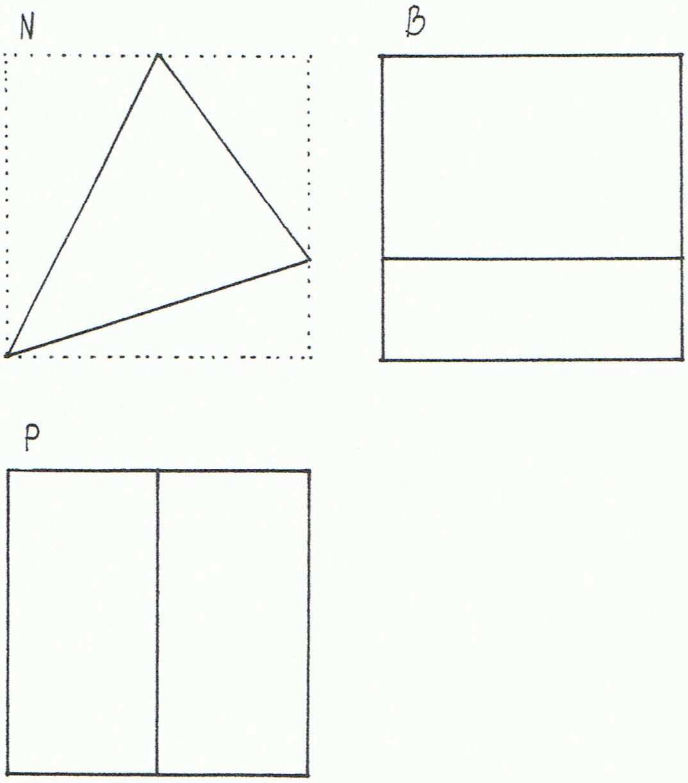
Sestrojte půdorys, nárys a bokorys objektu.

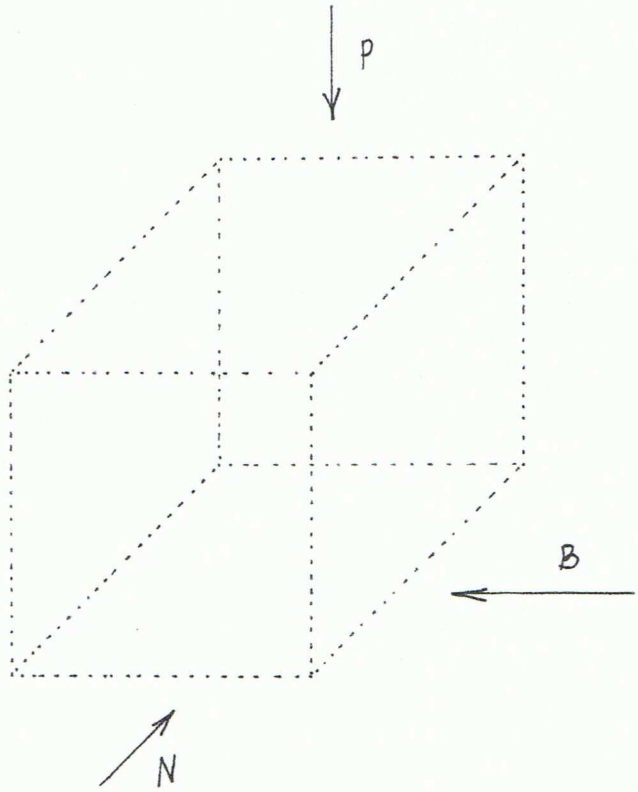




. Je dán půdorys P, nárys N a bokorys B prostorového objektu, který je umístěn v (pomocné) krychli. Viditelné a neviditelné hrany jsou rozlišeny plnou a čárkovanou čarou, tečkované čáry jsou pomocné.

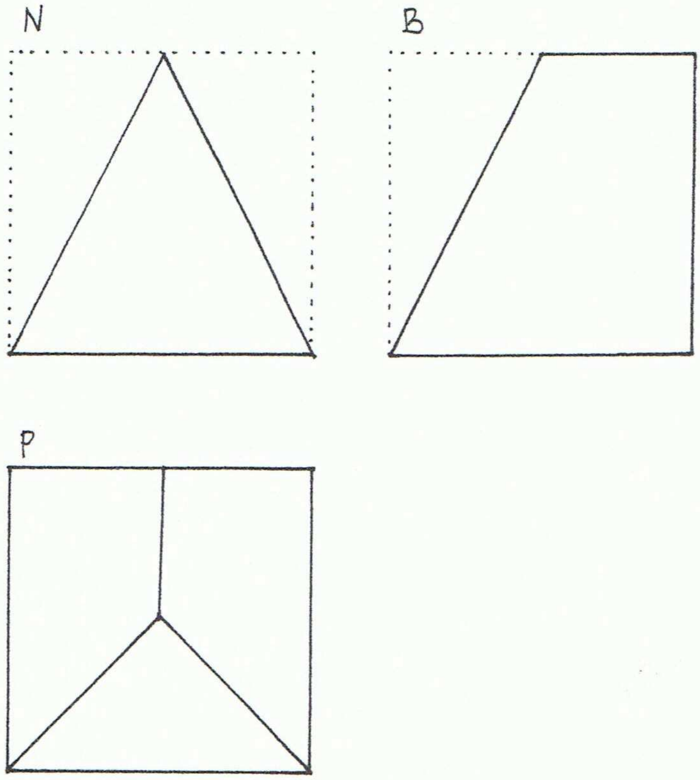
Objekt zobrazte v názorném promítání, které je určeno obrazem pomocné krychle.

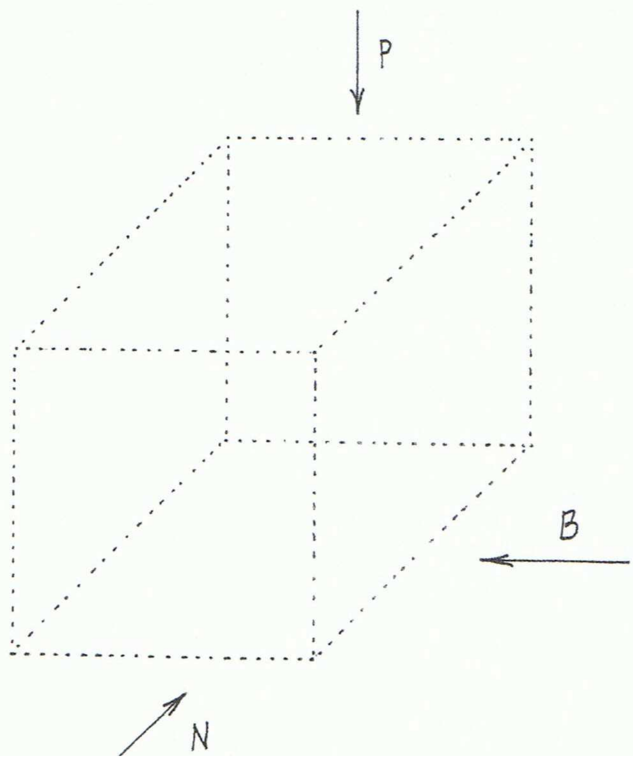




. Je dán půdorys P, nárys N a bokorys B prostorového objektu, který je umístěn v (pomocné) krychli. Viditelné a neviditelné hrany jsou rozlišeny plnou a čárkovanou čarou, tečkované čáry jsou pomocné.

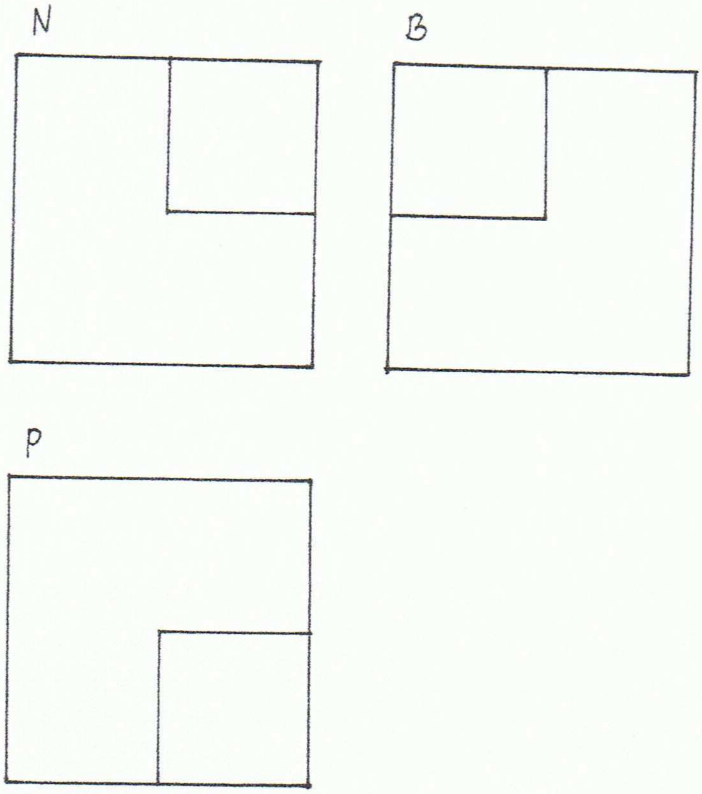
Objekt zobrazte v názorném promítání, které je určeno obrazem pomocné krychle.

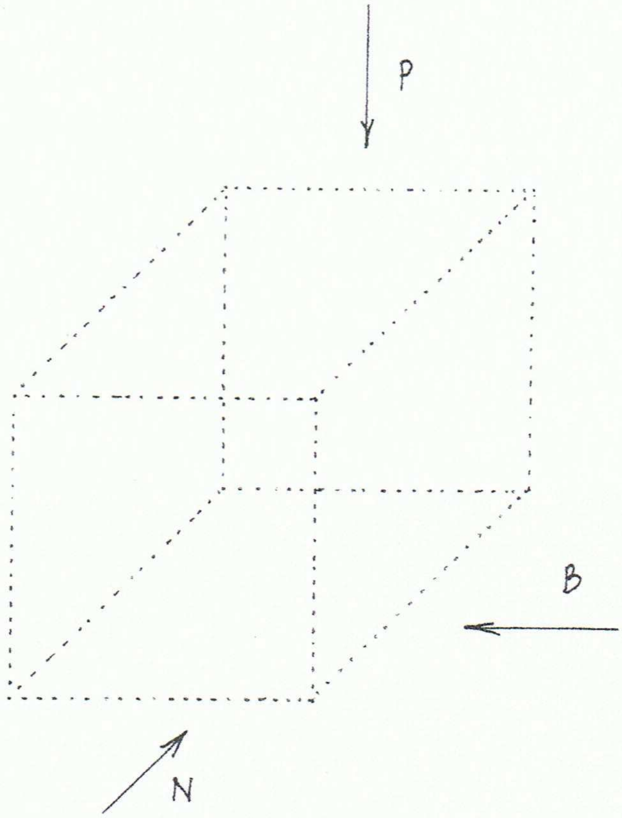




7. Je dán půdorys P, nárys N a bokorys B prostorového objektu, který je umístěn v (pomocné) krychli. Viditelné a neviditelné hrany jsou rozlišeny plnou a čárkovanou čarou, tečkované čáry jsou pomocné.

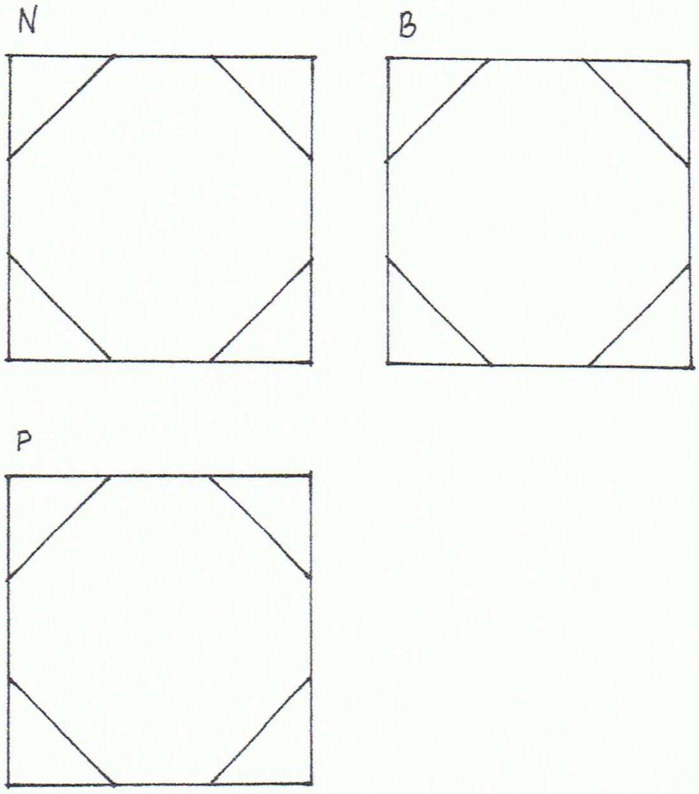
Objekt zobrazte v názorném promítání, které je určeno obrazem pomocné krychle.

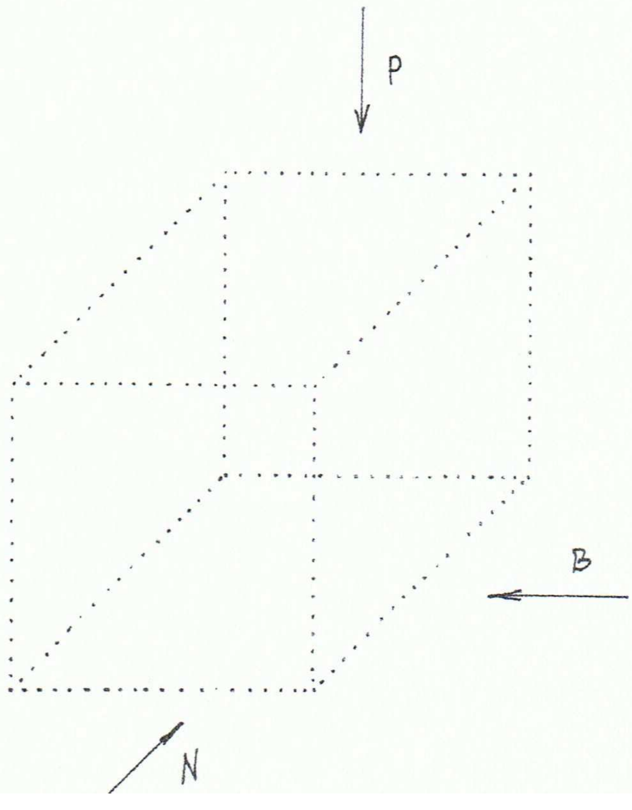




. Je dán půdorys P, nárys N a bokorys B prostorového objektu, který je umístěn v (pomocné) krychli. Viditelné a neviditelné hrany jsou rozlišeny plnou a čárkovanou čarou, tečkované čáry jsou pomocné.

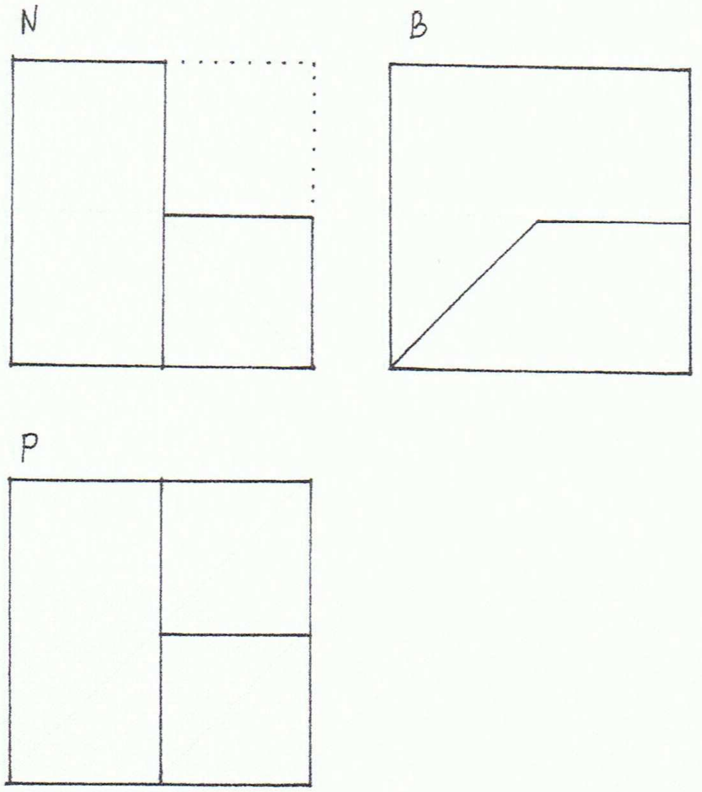
Objekt zobrazte v názorném promítání, které je určeno obrazem pomocné krychle.

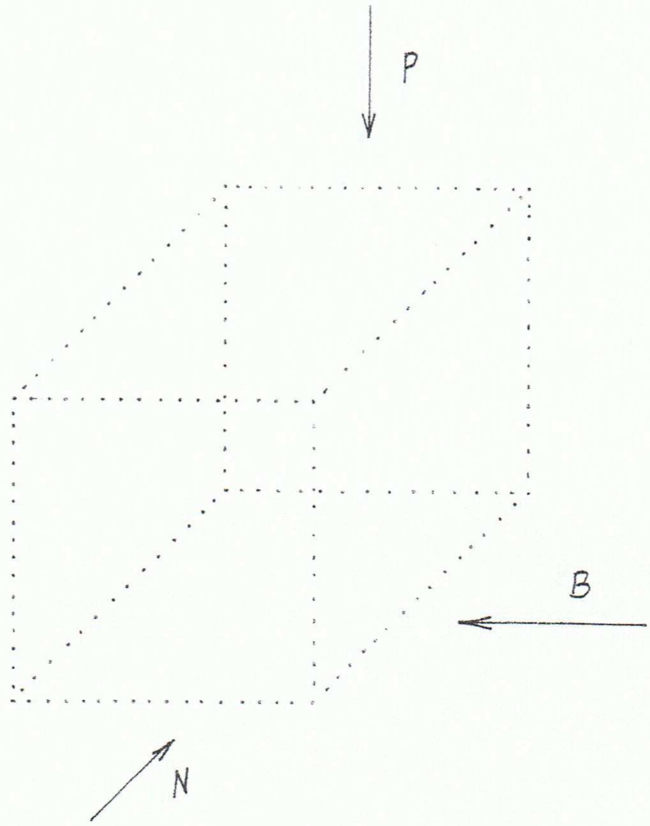




Je dán půdorys P, nárys N a bokorys B prostorového objektu, který je umístěn v (pomocné) krychli. Viditelné a neviditelné čáry jsou rozlišeny plnou a čárkovanou čarou, tečkované čáry jsou pomocné.

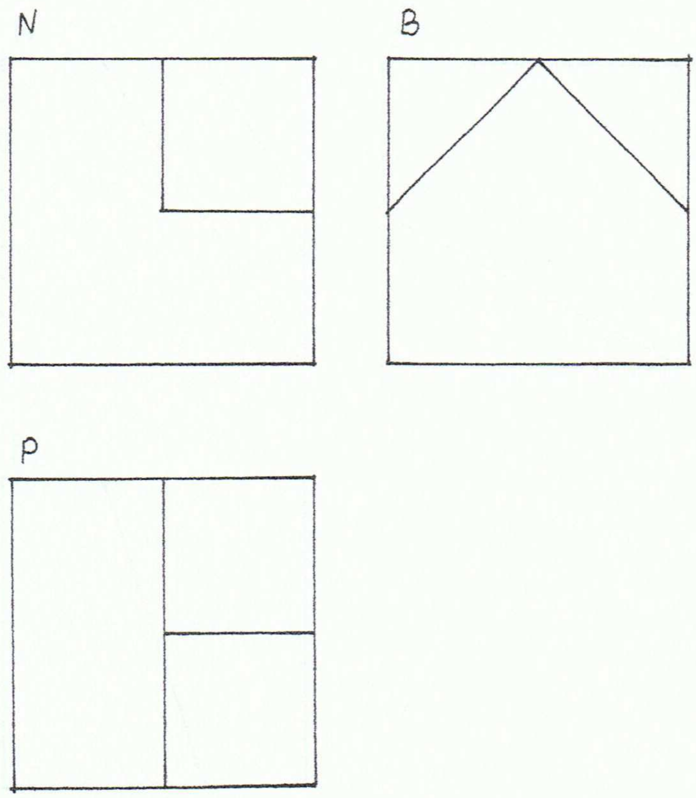
Objekt zobrazte v názorném promítání, které je určeno obrazem pomocné krychle.

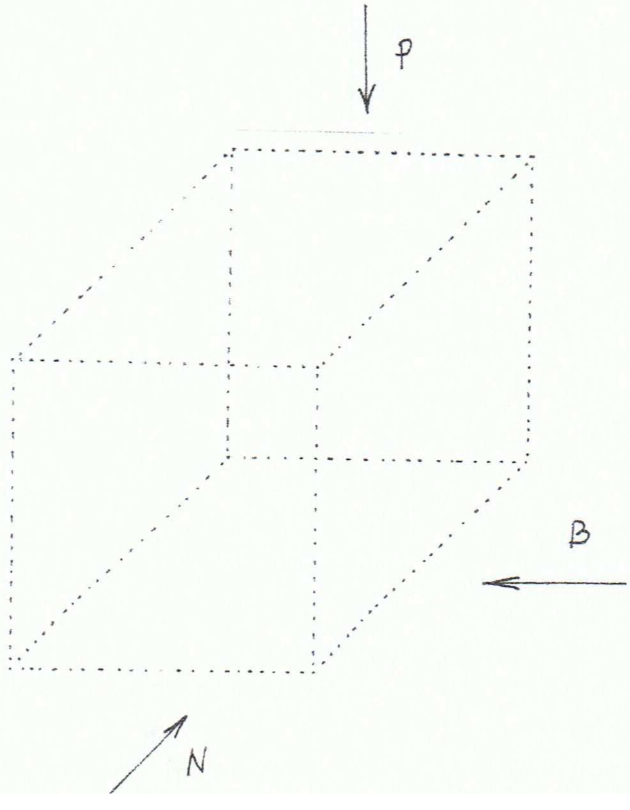




Je dán půdorys P, nárys N a bokorys B prostorového objektu, který je umístěn v (pomocné) krychli. Viditelné a neviditelné hrany jsou rozlišeny plnou a čárkovanou čarou, tečkované čáry jsou pomocné.

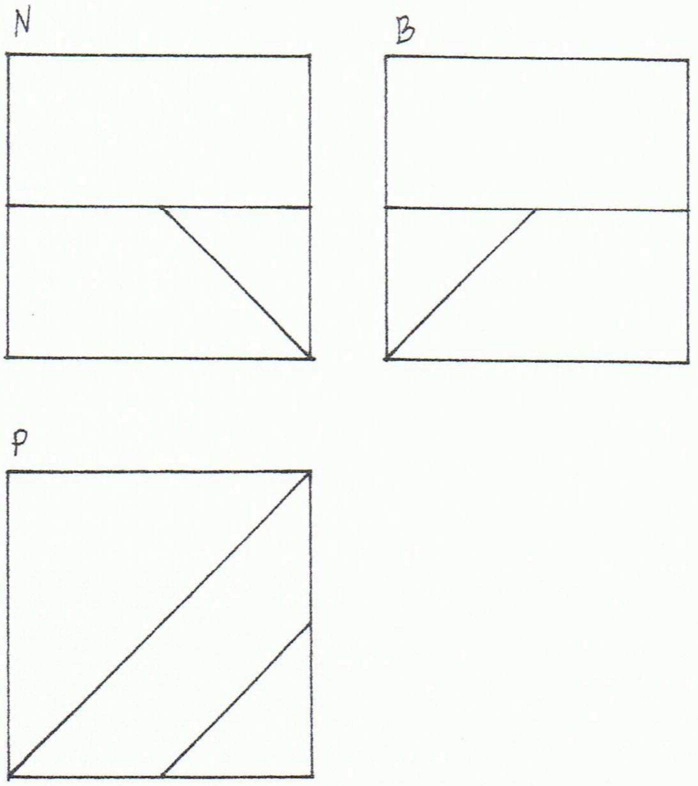
Objekt zobrazte v názorném promítání, které je určeno obrazem pomocné krychle.

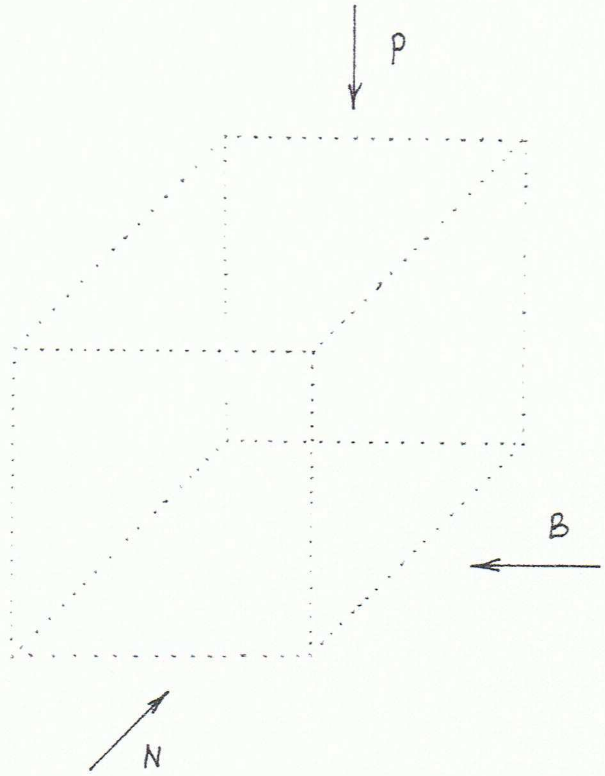




Je dán půdorys P, nárys N a bokorys B prostorového objektu, který je umístěn v (pomocné) krychli. Viditelné a neviditelné hrany jsou rozlišeny plnou a čárkovanou čarou, tečkované čáry jsou pomocné.

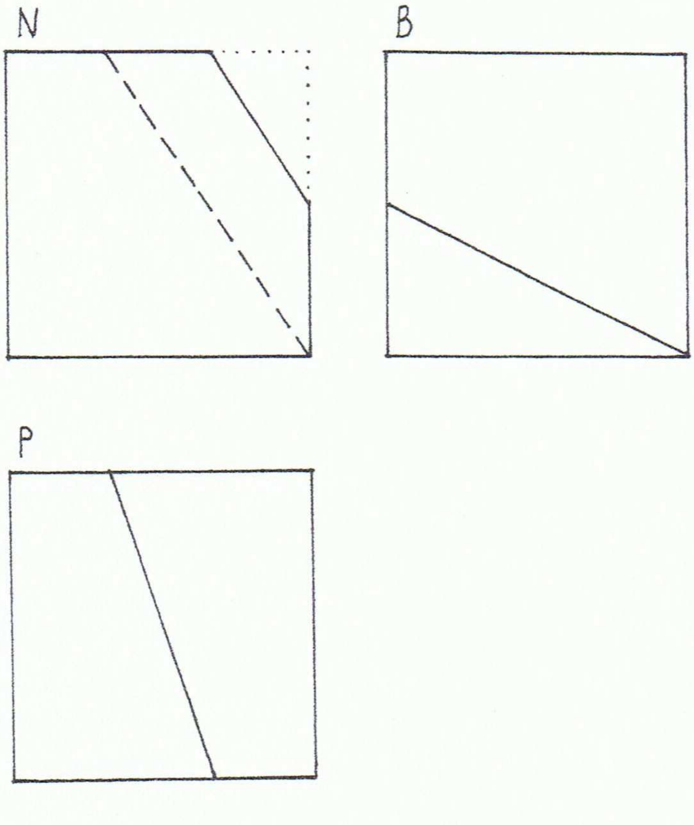
Objekt zobrazte v názorném promítání, které je určeno obrazem pomocné krychle.

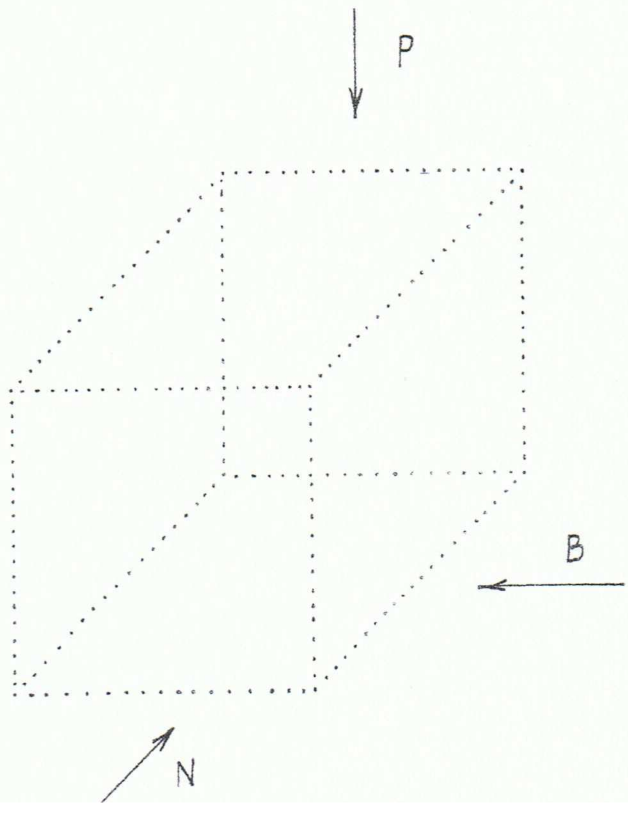




Je dán půdorys P, nárys N a bokorys B prostorového objektu, který je umístěn v (pomocné) krychli. Viditelné a neviditelné hrany jsou rozlišeny plnou a čárkovanou čarou, tečkované čáry jsou pomocné.

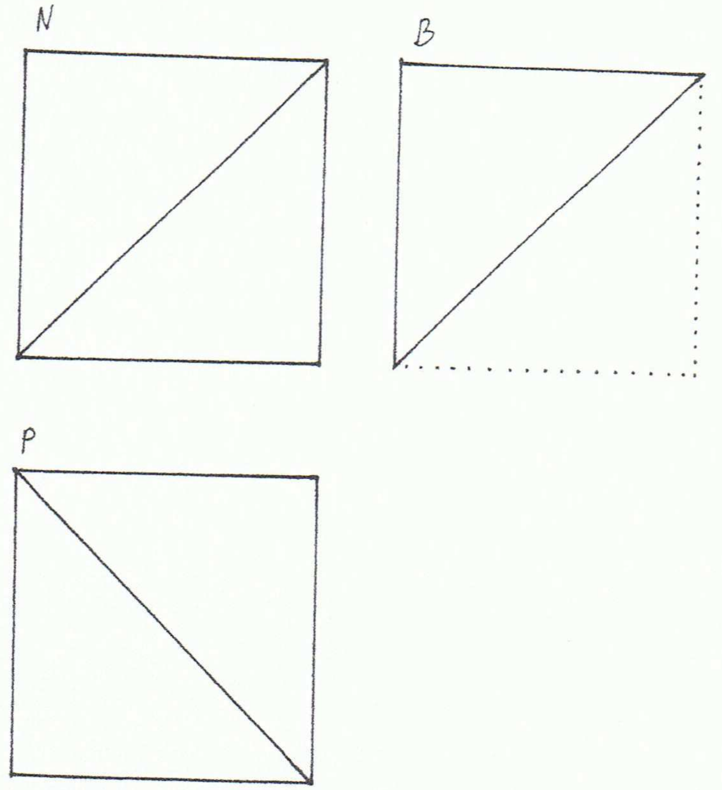
Objekt zobrazte v názorném promítání, které je určeno obrazem pomocné krychle.

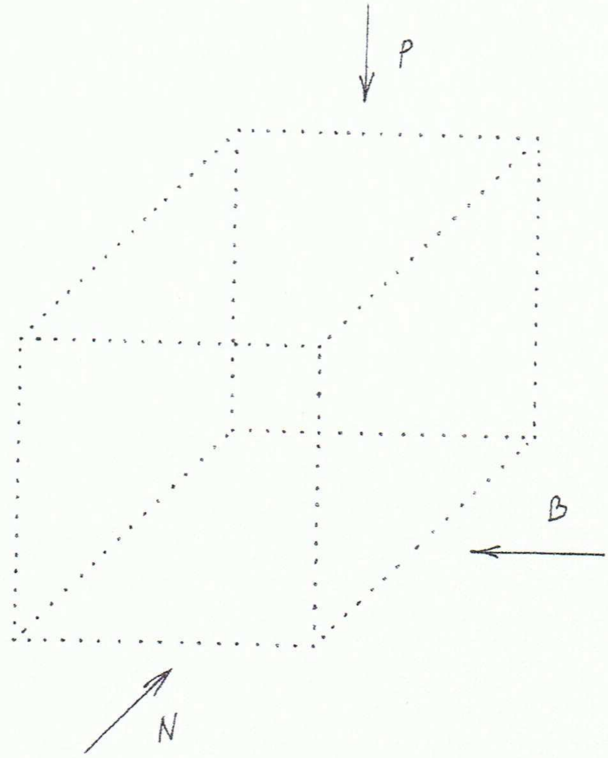




1. Je dán půdorys P, nárys N a bokorys B prostorového objektu, který je umístěn v (pomocné) krychli. Viditelné a neviditelné čáry jsou rozlišeny plnou a čárkovanou čarou, tečkované čáry jsou pomocné.

Objekt zobrazte v názorném promítání, které je určeno obrazem pomocné krychle.





2. Je dán půdorys P, nárys N a bokorys B prostorového objektu, který je umístěn v (pomocné) krychli. Viditelné a neviditelné hrany jsou rozlišeny plnou a čárkovanou čarou, tečkované čáry jsou pomocné.

Objekt zobrazte v názorném promítání, které je určeno obrazem pomocné krychle.